This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

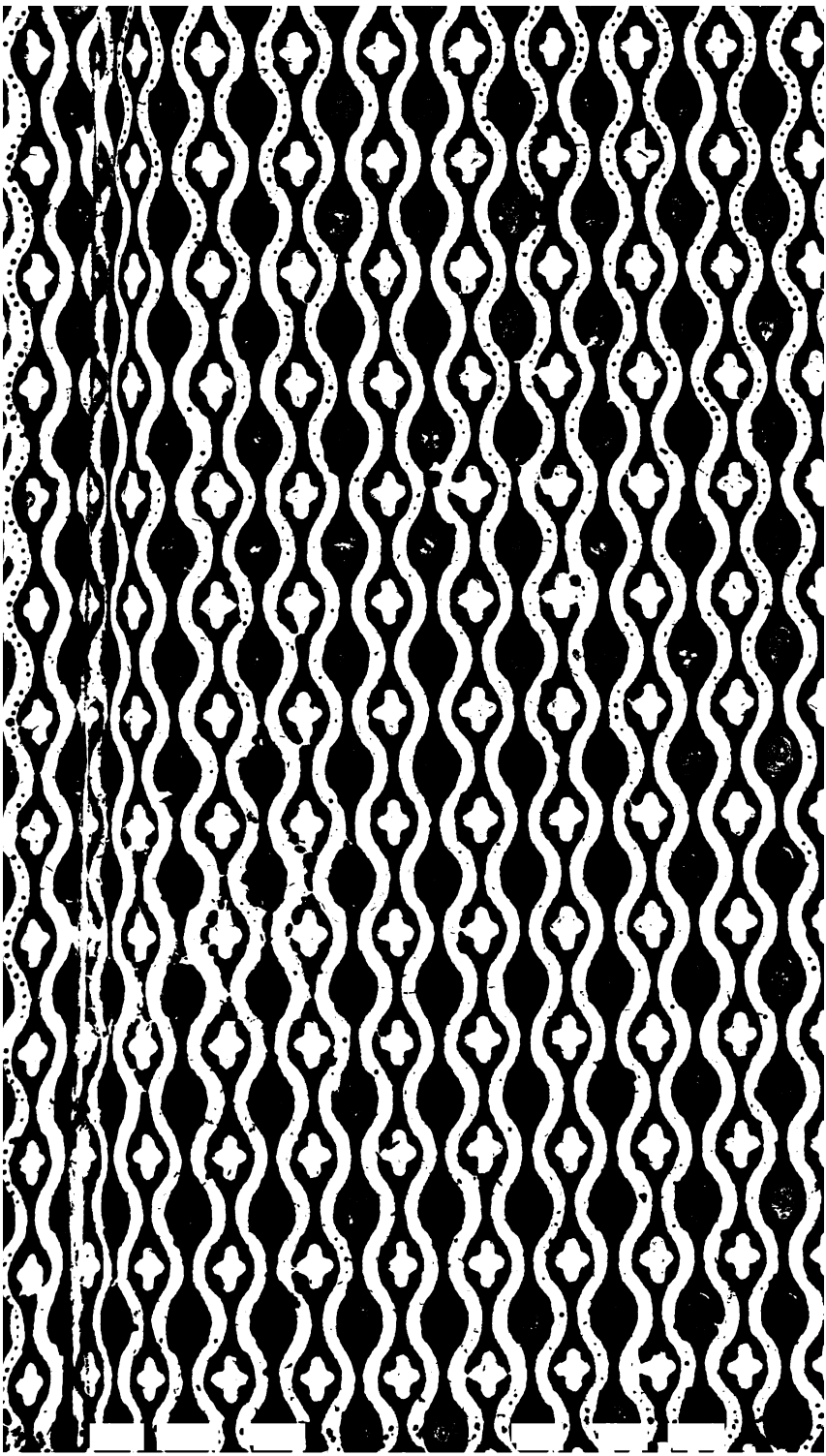
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Unterricht

in der

Mathematischen Analysis

und

Maschinen-Lehre

Zweyter Band

enthaltend

die Differential- und Integral-Rechnung

nebst Anwendung

auf die merkwürdigsten krummen Linien

Abgefaßt

von

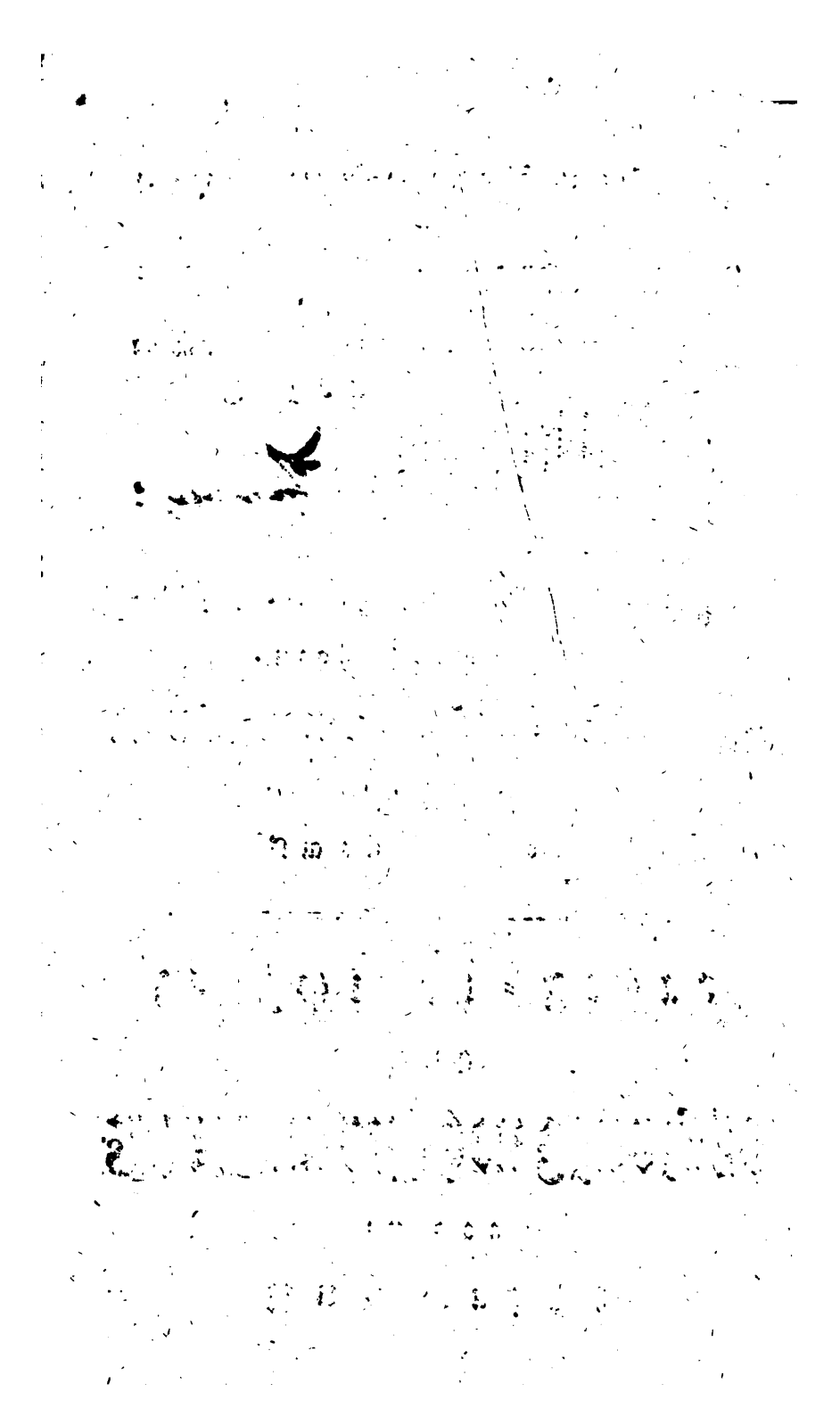
Johann Pasquich

der Philos. Doct. und ordentl. öffentlicher Prof. der höheren Mathematik an der Ungarischen Universität zu Pest

---

Leipzig

in der Weidmannschen Buchhandlung 1791



Hist. of Sci.
Rauschb'g
3-4-30
20588

Vorrede.

Gegenwärtiger Unterricht in der Differential- und Integral-Rechnung ist durch eine vollständige Bearbeitung der vor vier Jahren von mir angekündigten Gränzenlehre (Man sehe Leipziger Magazins für reine und angewandte Mathematik, 2tes Stück aufs Jahr 1787.) entstanden: die Betrachtungen über die Exhaustions-Methode der Alten und ihre Verbindung mit der neueren Infinitesimal-Rechnung habe ich ausgelassen, um für andere wichtige Untersuchungen Raum zu gewinnen, behalte mir aber vor, dieselben bey einer andern Gelegenheit unter dem Titel: Critische Untersuchungen über den Ursprung und Fortgang der Gränzenlehre, nachzuholen, wenn es mir meine sehr mißlich aussehenden Gesundheitsumstände erlauben. Itzt habe ich vorzüglich auf die Vollständigkeit der Untersuchungen, und die Deutlichkeit des Vortrags Rücksicht genommen, mit dem Vorhaben, etwas zu mehrerer Aufnahme und Ausbreitung der Differential- und Integral-Rechnung beyzutragen: ob aber dieses wirklich geschehen ist, überlasse

ich Kennern zu entscheiden, deren Tadel mir eben so, wie ihr Beyfall, willkommen seyn soll, wo immer ich ihn verdient habe. Deswillen werde ich den Plan, nach welchem dies Lehrbuch abgefaßt ist, nebst Gründen, die mich dazu bewogen haben, vorläufig und dergestalt anzeigen, daß mir zu meiner Rechtfertigung, deren ich aus irgend einer Ursache bedürfen mag, nichts übrig bleibe.

Den gesammten Unterricht, den dieses Lehrbuch enthalten soll, habe ich in drey Hauptstücke eingetheilt. Im ersten Hauptstücke wird die Differential-Rechnung mit Rücksicht auf die Functionen von einer absoluten veränderlichen Grösse aufs vollständigste abgehandelt. Ich habe bey Abfassung dieses Hauptstückes die gegründete Bemerkung der berühmtesten Mathematiker zum Grunde gelegt, daß nämlich die Gränzen der Verhältnisse zwischen den Differenzen veränderlicher Grössen und denen ihrer Functionen, welchen sie sich ohne Ende nähern würden, wenn jene Differenzen ohne Ende abnähmen, den Gegenstand der gesammten Differential-Rechnung ausmachen. Die Schwierigkeiten, welche man bey dieser Theorie finden will, hat Hr. Michelsen umständlich auseinander gesetzt. Weit scheinbarer ist die Theorie derer, sagt Hr. Michelsen, in Leonhard Eulers vollständ. Differential-Rechnung, aus dem Lat. übersetzt, und mit Anm. und Zus. begleitet, von J. A. C. Michelsen. I. Th. Seite 326. die behaupten, daß man durch die Differential-Formeln und Gleichungen weiter

nichts

nichts, als die Gränze gewiſſer Verhältniſſe, und z. B. durch $dy = nz^{n-1}dz$, oder $\frac{dy}{dz} = nz^{n-1}$ bloß die Gränze des Verhältniſſes ausdrucke, welcher ſich, wenn $y = z^n$ iſt, das Verhältniß $dy : dz$ ohne Ende nähern kann; allein genau geprüft kämpft ſie gleichwohl mit einer doppelten Unbequemlichkeit. Die eine iſt, daß man dabey nicht füglich vermeiden kann, dy und dz in Nichtſe zu verwandeln, und dann erſt den für $\frac{dy}{dz}$ gefundenen Ausdruck als eine genaue Beſtimmung ihres Verhältniſſes anzuſehen; die andere aber, daß man dabey gezwungen iſt, eine Menge uneigentlicher Redensarten, die einer weitläuftigen Erklärung bedürfen, einzuführen. Jenes thut ſelbſt Hr. Käſtner, in ſeinen Anfangsgründen der Analyſis des Unendlichen, S. 11. in dem Zuſatze 16; dieſes findet man allenthalben. Und wie ſchwer iſt das mit einander zu vereinigen, oder vielmehr wie unmöglich, fragt Hr. Michelſen, (a. a. O. Seite 332), daß man einmal durch keine noch ſo weit fortgeſetzte Theilung einer endlichen Gröſſe je auf Null kommen könne, und denn doch die endlichen Differenzen durch eine ſolche Theilung zu verſchwindenden Gröſſen machen ſoll? Wie läßt ſich bey einer ſolchen Theorie erklären, warum die beſtändigen Gröſſen kein Differential haben? (a. a. O. Seite 329.). Was für ſichere Regeln hat man da, wornach man ſich bey der Weglaſſung einiger Differential-Ausdrücke und der Beybehaltung anderer richten könnte? Und bleibt

nicht immer die Schwierigkeit zurück, daß man in der Differential-Rechnung bloße Nichtse untersuche, und ohne eine Verschiedenheit unter ihnen aus dem Begriffe derselben herleiten zu können, sie gleichwohl verschiedentlich bezeichne, und bey Vergleichung als wirklich von einander verschieden behandle? (daselbst). Wie kann man dabey die Integralien als Summen aller vorhergehenden Differentialien betrachten? (a. a. O. Seite 308.), da doch dieses bey der Integral-Rechnung und bey der Anwendung derselben wichtig und unentbehrlich ist (a. a. O. Seite 310.).

Es ist nicht meine Absicht, hier entweder Hrn. Michelsens eigene Theorie, oder irgend eine andere, welche zur Befreyung der Differential- und Integral-Rechnung von allen Zweifeln dienen sollte, zu bestreiten, oder zu vertheidigen, zumal da ich mir vorgenommen habe, dergleichen Bemühungen in den oben versprochenen kritischen Untersuchungen zu prüfen; daher werde ich hier nur diejenigen Bemerkungen beybringen, welche zur Erläuterung dessen, was ich bey Abfassung der Differential-Rechnung vor Augen gehabt habe, dienen mögen. Erstlich sehe ich mich genöthigt zu bekennen, daß mir keine Untersuchung in der Differential- oder Integral-Rechnung oder bey ihrer Anwendung bekannt ist, wobey man, wenn y eine Function von x, und x eine absolute veränderliche Grösse ist, nicht aber eine Function von einer andern veränderlichen Grösse, aus der Differential-

Formul

Formul $dy = pdx$ was mehr zu wiſſen brauchte, als den Werth $\frac{dy}{dx} = p$, welcher bey der Theorie, die auf der Betrachtung der Gränzen beruht, den Exponenten des ſogenannten Differential-Verhältniſſes $1 : p$ bedeutet: bey der Lehre von Gröſßten und Kleinſten, bey der Summirung der Reihen, bey der Zerlegung gebrochener Functionen in mehrere Brüche, oder ihrer Auflöſung in Reihen, bey der Beſtimmung der Tangenten, Subtangenten, und bey allen Unterſuchungen, welche mit Zuziehung der Differential- und Integral-Rechnung zu was immer für einer Abſicht angeſtellt werden, brauchen wir nur die Exponenten $\frac{dy}{dx} = p$ der Differential-Verhältniſſe, und nur auf dieſe werden alle die arithmetiſchen Arbeiten angewandt, welche bey dergleichen Unterſuchungen vorkommen, dergeſtalt, daß ſie allein den eigentlichen Gegenſtand der geſammten Differential- und Integral-Rechnung ausmachen. Wenn aber dieſes ſeine Richtigkeit hat; ſo ſehe ich gar keine Urſache ein, warum man vermeiden ſollte, die Differenzen Δx, Δy in der Differential-Rechnung in Nichtſe zu verwandeln, mir ſcheint es vielmehr nothwendig zu ſeyn: denn wenn ich z. B. $y = ax + bx^2$ mithin $\Delta y = (a + 2bx)\Delta x + b\Delta x^2$ habe, und vorausſetze, daß ich bey einer gewiſſen Unterſuchung weder dieſe Differenz, noch das Verhältniß $1 : a + 2bx + b\Delta x$, ſondern nur die Gränze $1 : a + 2bx$ dieſes Verhältniſſes zu wiſſen brauche; ſo muß ich ja ſagen, das, was hier

gesucht wird, ist der Werth, welchen jenes Verhältniß für $\Delta x = 0$ erlangt, indem nur dafür $1 : a + 2bx$ aus $1 : a + 2bx + b\Delta x$ entstehet. Unläugbar ist es zwar, daß bey einer solchen Theorie die Integralien als Summen aller vorhergehenden Differentialien nicht betrachtet werden können; ich möchte aber nur einen Satz entweder bey der Integral-Rechnung oder bey ihrer Anwendung kennen, welcher sich, ohne die Integralien als solche Summen zu betrachten, nicht aufs bündigste erweisen ließe.

Und bey dieser Voraussetzung glaubte ich, zur Erweiterung und näheren Aufklärung der Differential- und Integral-Rechnung nicht anders etwas beytragen zu können, als wenn ich bey der Ausführung ihrer allgemeinsten Gründe folgende Gesetze zu erfüllen suche.

1) Allgemeine Eigenschaften der Exponenten der Differential-Verhältnisse sollen ausdrücklich bestimmt, und erwiesen werden: z. B. daß der Exponent des Differential-Verhältnisses jeder Function eine reelle, durch die Function selbst vollkommen bestimmte Grösse, ist, und eine solche auch der Exponent $\frac{dy^n}{dx^n}$ des nten Differential-Verhältnisses, (wenn es so zu nennen erlaubt ist) seyn muß; daß ferner denjenigen Functionen, deren veränderliche Theile einander gleich sind, auch gleiche Exponenten, und denjenigen, deren veränderliche Theile ungleich sind, auch ungleiche

Exponenten ihrer Differential-Verhältnisse zugehören; und umgekehrt, daß die veränderlichen Theile zweer Functionen, welche mit gleichen oder ungleichen Exponenten zusammenhängen, auch gleich oder ungleich seyn müssen.

Wie einleuchtend auch diese Eigenschaften scheinen mögen; so ist doch ihre Bemerkung bey der Ausführung der Differential- und Integral-Rechnung aus der Ursache wichtig, weil sie bey wirklicher Anwendung einen solchen Einfluß in die dabey vorkommenden Untersuchungen haben, daß die Unfehlbarkeit derselben oft lediglich von ihnen abhängt. Wenn ich z. B. mit Hülfe der Integral-Rechnung die Oberfläche eines runden Körpers quadriren will; so suche ich diejenige Function y von einem unbestimmten Stücke x seiner Höhe, welche die Oberfläche des mit x zusammenhängenden Abschnittes ausdrücken soll. Gesetzt nun, ich habe auf einem sicheren Wege gefunden, die noch unbekannte Function y sey von der Beschaffenheit, daß der Exponent ihres Differential-Verhältnisses $\frac{dy}{dx} = p$ ist: sagt mir nun die Integral-Rechnung, daß $Z + Const.$ eine solche Function von x ist, deren Differential-Verhältnisses Exponent $= p$ gefunden wird; so schließe ich hieraus, es sey $Z + C$ diejenige Function y, welche die Oberfläche des mit x zusammenhängenden Abschnittes ausdrücken soll. Setzte ich aber hier nicht voraus, daß der Exponent $\frac{dy}{dx} = p$, den

ich für die verlangte Function y gefunden habe, nicht noch einer anderen Function $Z+C$ zugehören kann, deren veränderlicher Theil gröſſer oder kleiner, als jener Function ihrer wäre?

2) Man darf nicht ohne Beweis annehmen, daß aus $\frac{dy}{dx} = p$, wenn y eine Function von x ist, man $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ folgern, und nun x als eine Function von y betrachten kann, als welche durch die Gleichung bestimmt seyn soll, welche y durch x ausdrückte.

3) Der Grundsatz, worauf die Aufsuchung der Exponenten der Differential-Verhältnisse für unbekannte Functionen, die erst mit Hülfe der Integral-Rechnung bestimmt werden sollen, ausdrücklich anzeigen, und seine Unfehlbarkeit aufs schärfste darthun, indem dieses bey der Anwendung der Integral-Rechnung gewiß der wichtigste Umstand ist: dahin kann z. B. dieser Satz gehören. Wenn p eine reelle von Δx unabhängige Gröſſe ist, und m, n überhaupt die Form $\alpha+\beta\Delta x+\gamma\Delta x^2+\cdots$ haben, eine Function y aber so beschaffen ist, daß $\frac{\Delta y}{\Delta x} > p+m\Delta x$ und zugleich $\frac{\Delta y}{\Delta x} < p+n\Delta x$ für jeden wie immer kleinen Werth von Δx seyn muß; so ist $\frac{dy}{dx} = p$.

4) Bey Befolgung dieser Gesetze soll für die anschauliche Erkenntniß jeder Wahrheit, insofern ihrer analytische Untersuchungen fähig sind, gesorgt werden. Da

also die Exponenten der Differential-Verhältnisse aller Functionen durch ihre Differenzen vollkommen bestimmt sind, und aus ihnen abgeleitet werden; so sollen allgemeine und deutliche Darstellungen der Differenzen Δy vorausgeschickt werden, woraus sich die Verbindungsgesetze zwischen den Exponenten $\frac{dy}{dx}$ und den Functionen y leicht abnehmen lassen mögen. Dergleichen allgemeine Ausdrücke, welche ganz bestimmt das Gesetz vor die Augen legen, wornach die Differenzen der Functionen von den Differenzen veränderlicher Grössen abhängen, und welches man sonst bey den wichtigsten Sätzen und ihren Beweisen voraussetzen muß, da doch dasselbe weniger einleuchtend ist, als manche Sätze in der Geometrie, für die wir doch die schärfsten Beweise suchen, würden zugleich zur Abkürzung des Vortrags dienen.

Um nur ein einziges Beyspiel hievon zu geben, nehmen wir an, es soll dy für $y = uv$ gefunden werden, wobey vorausgesetzt wird, u, v seyen was immer für Functionen von einer veränderlichen Grösse x. Ganz richtig drücken wir die Differenz Δy durch $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta v\Delta u$ aus; wie geschieht aber der Uebergang zu $dy = udv + vdu$? Wird dabey nicht ausdrücklich vorausgesetzt, daß die Differenz jeder Function von x, mithin auch Δv, oder Δu von Δx dergestalt abhängt, daß man sie unter der Form $\alpha\Delta x + \psi\Delta x^2$ betrachten kann, und zwar in der Bedeutung, daß α eine von Δx unabhängige Grösse ist, ψ aber entweder eine solche Grösse

oder

oder eine Function von Δx ist, die aber entweder die Form $\beta+\gamma\Delta x+\delta\Delta x^2+\text{----}$ haben, oder einer Function von dieser Form gleich seyn soll? Und kann dieses für alle mögliche Functionen von x ohne allen Beweis zugegeben werden?

Gleichwohl habe ich mich bemüht, die Grundbegriffe aufs möglichste zu simplificiren, und mir die Freyheit genommen, das, was sonst der Exponent des Differential-Verhältnisses heißen, und mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet werden sollte, den Verschwindungs-Quotienten zu nennen, und mit dy zu bezeichnen, weshalben ich vielleicht den größten Tadel verdiene. Wie wenig Ursache ich dazu gehabt habe, werde ich in meinen oben erwähnten critischen Untersuchungen selbst zu beweisen suchen; itzt that ichs aber, um zu zeigen, daß alle Schwierigkeiten, welche man in der Differential- und Integral-Rechnung, wenn ihre Gründe aus der Betrachtung der Gränzen abgeleitet werden, finden will, sogleich verschwinden, sobald man die Exponenten der Differentialverhältnisse anders bezeichnet, und sollte dieses nicht ein überzeugender Beweis davon seyn, daß dergleichen Schwierigkeiten nur scheinbar waren? Dem zufolge will ich mich nun desjenigen Rechts bedienen, welches mancher Schriftsteller vor mir sich angemaßt hat, nämlich hier in einem Aufsatze das zu wiederholen, was ich schon im Lehrbuche selbst gesagt habe: Kennern soll es dienen, um mit einem Blicke zu übersehen, ob ich von dieser Seite ihren Tadel wirklich

verdiene;

verdiene; und Anfängern, wenn es sonst mir gelungen ist, meine Absicht zu erreichen, soll es aus der Ursache angenehm seyn, weil sie hier die merkwürdigsten Sätze in einer kurzen Kette unter einander verbunden, und einige anders vorgetragen finden werden, die sie aus dem Lehrbuche auf einem umständlicheren Wege werden kennen gelernt haben.

Uebersicht der allgemeinsten Grundsätze der Differential-Rechnung, in Verbindung mit den Grundbegriffen, worauf sie beruhen sollen.

I. Erklärungen.

Unveränderliche Grössen behalten in einer Rechnung immer einerley Werthe, da hingegen veränderliche Grössen allerley Werthe bekommen können, die Null nicht ausgenommen. Jeder analytische Ausdruck, worinn veränderliche Grössen sich befinden, heißt eine Function von diesen Grössen.

1. Zusatz. Jede Function ist eine veränderliche Grösse: mithin muß man unter veränderlichen Grössen einen Unterschied machen. Diejenigen, die wir uns in sich veränderlich vorstellen, indem andere gewisse Functionen von ihnen sind, können absolute, und diese abhängige veränderliche Grössen heissen.

2. Zusatz. Auf diese Art soll sich jede Function auf eine absolute veränderliche Grösse x beziehen, und durch

sie

sie entweder unmittelbar, wie z. B. $y=(a-x^2)^3$, oder mittelbar gegeben werden, wie $y=z^3$ für $z=a-x^2$.

II. Erklärungen.

Die Differenz Δx einer absoluten veränderlichen Grösse x bedeutet ein veränderliches Stück von x, um welches x zunehmen mag. Ist y eine Function von x; so heißt die erste Differenz Δy von y das, um was y sich ändert, wenn x um Δx wächst. Die zweyte Differenz $\Delta^2 y$ soll ferner in Ansehung der ersten Δy, die dritte $\Delta^3 y$ in Ansehung der zweyten $\Delta^2 y$, und überhaupt jede $(n+1)$te Differenz soll in Ansehung der $n$ten das seyn, was die erste Δy in Ansehung der Function y ist: $\Delta^{n+1} y$ ist nämlich die erste Differenz von $\Delta^n y$ als von einer Function von x.

1. Zusatz. Wenn y' aus y, und $\Delta^n y'$ aus $\Delta^n y$ entstehet, indem $x+\Delta x$ aus x bey y und $\Delta^n y$ wird; so ist $\Delta y=y'-y$ und $\Delta^{n+1} y=\Delta^n y'-\Delta^n y$.

2. Zusatz. Für $y=P+Q+\cdots+Z$ wird daher seyn $y'=P'+Q'+\cdots+Z'$, und $\Delta y=\Delta P+\Delta Q+\cdots+\Delta Z$ nach (1. Zus.).

3. Zusatz. Unmittelbar aus (1. Zus.) folgt, daß alle Differenzen einer Function y von x gleich Null seyn müßten, wenn man bey ihnen $\Delta x=0$ setzte.

4. Zusatz. Weil der Werth einer Function von dem jedesmaligen Werthe der darinn vorhandenen veränderlichen Grösse abhängt (1); so kann man nicht sagen,

zwo

zwo Functionen Z, X von x seyen einander gleich, ohne daß die Gleichheit Z = X für jeden Werth von x bestehen soll: daraus würde also folgen, es sey auch Z′ = X′, mithin auch Z′ − Z = X′ − X, oder ΔZ = ΔX (1. Zus.) für jeden Werth von Δx, auch wenn man Δx = 0 setzt (3. Zus.).

III. Aufgabe.

Den Werth zu bestimmen, welchen eine Function y von der veränderlichen Grösse z erlangen würde, wenn diese um eine Grösse ω zunähme.

Auflösung. 1) Was immer auch y für eine Function von z seyn mag; so ist doch gewiß, daß sie entweder die Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + \cdots$ wirklich hat, oder einer andern Function von dieser Form gleich ist. Bey der Voraussetzung des binomischen Lehrsatzes, welcher im ersten Bande erwiesen wurde, läßt sich dieses scharf darthun, wie es im (6. §. dieses Lehrbuchs) geschehen ist. Daher kann man setzen, es sey:

$$y = Az^a + Bz^b + Cz^c + \cdots + Pz^p + \cdots$$

2) Und wenn man nun y′ das nennt, was y, für z + ω statt z, giebt; so muß seyn

$$y' = A(z+\omega)^a + B(z+\omega)^b + \cdots + P(z+\omega)^p.$$

3) Wenn man nun nur das erste, zweyte und das rte Glied jeder Potenz von z + ω aufmerkt, wie es der binomische Lehrsatz giebt; so wird seyn:

y′ =

$$y' = Az^a + \frac{a}{1} Az^{a-1}.\omega + \cdots + \frac{Aa(a-1)\cdots(a-r+1)}{1.2\cdots r} z^{a-r}.\omega^r$$
$$+ Bz^b + \frac{b}{1} Bz^{b-1}.\omega + \cdots + \frac{Bb(b-1)\cdots(b-r+1)}{1.2\cdots r} z^{b-r}.\omega^r$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ Pz^p + \frac{p}{1} Pz^{p-1}.\omega + \cdots + \frac{Pp(p-1)\cdots(p-r+1)}{1.2\cdots r} z^{p-r}.\omega^r$$

u. ſ. f.

4) Da nun die Summe der erſten verticalen Reihe die Function y iſt; ſo bezeichne man mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ die Summen der Coefficienten von $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4 \cdots$ bey den darauf folgenden vertikalen Reihen, und dann wird man haben:

$$y' = y + \alpha\omega + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3 + \delta\omega^4 + \cdots\cdots$$

1. Zuſatz. Sey $\omega = \Delta z$; ſo iſt $y' = y + \alpha\Delta z + \beta\Delta z^2 + \gamma\Delta z^3$, daher für $\psi = \beta + \gamma\Delta z + \delta\Delta z^2 + \cdots$ iſt $y' - y = \alpha\Delta z + \psi\Delta z^2$, mithin $\Delta y = \alpha\Delta z + \psi\Delta z^2$ (II. 1. Zuſ.), das heißt: die erſte Differenz jeder Function y von z iſt einer Function von Δz von der Form $\alpha\Delta z + \psi\Delta z^2$ gleich, dergeſtalt, daß $\alpha = aAz^{a-1} + bBz^{b-1} + \cdots$ ſeyn muß, wenn $y = Az^a + Bz^b + \cdots$ iſt, es mag z eine abſolute oder abhängige veränderliche Gröſſe ſeyn (I. 1. 2. Zuſ.).

2. Zuſatz. Wenn dieſem Geſetze jede nte Differenz jeder Function y von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x untergeordnet wäre; ſo müßte man ſagen, ſie

ſey

ſey einer Function von Δx von der Form $P\Delta x^n + Q\Delta x^{n+\alpha}$ gleich, wobey P eine reelle, von Δx ganz unabhängige Gröſſe, und Q eine Function von Δx von der Form $\beta + \gamma\Delta x + \delta\Delta x^2 + \cdots$ ſeyn ſollte: da aber die erſte Differenz dieſem Geſetze gewiß unterworfen iſt (1. Zuſ.); ſo wird ihm auch jede nte Differenz unterworfen ſeyn, wenn es wahr iſt, daß, wenn man daſſelbe Geſetz für die nte Differenz gelten läßt, es auch für die $(n+1)$te gelten muß, welches ſo dargethan wird.

Aus (II. 1. 2. Zuſ.) erhält man für $\Delta^n y = P\Delta x^n + Q\Delta x^{n+1}$ die Differenz $\Delta^{n+1} y = \Delta P\Delta x^n + \Delta Q\Delta x^{n+1}$. Da nun P von Δx nicht abhängt, mithin nur von x eine Function ſeyn kann; ſo läßt ſich ΔP durch $p\Delta x + q\Delta x^2$ in der Bedeutung (1. Zuſ.) ausdrücken, und dafür iſt $\Delta^{n+1} y = p\Delta x^{n+1} + q\Delta x^{n+2} + \Delta Q\Delta x^{n+1}$. Da ferner Q eine Function von Δx von der Form $\beta + \gamma\Delta x + \delta\Delta x^2 + \cdots$ ſeyn ſoll; ſo iſt $\Delta Q = \Delta\beta + \Delta\gamma\Delta x + \Delta\delta\Delta x^2 + \cdots$ (II. 2. Zuſ.): und weil $\beta, \gamma, \delta \cdots$ von Δx unabhängige Gröſſen ſind; ſo laſſen ſich alle Differenzen $\Delta\beta, \Delta\gamma, \Delta\delta \cdots$ gewiſſen Functionen von Δx von der Form $k\Delta x + l\Delta x^2 + m\Delta x^3 + \cdots$ gleich ſetzen (1. Zuſ.), woraus erhellet, daß ΔQ einer Function von Δx von der Form $r\Delta x$ gleich ſeyn muß. Daher iſt $\Delta^{n+1} y = p\Delta x^{n+1} + q\Delta x^{n+2} + r\Delta x^{n+2}$, oder $\Delta^{n+1} y = p\Delta x^{n+1} + R\Delta x^{n+2}$ für $R = q + r$.

3. Zuſatz. Es giebt demnach keine Function y von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x, deren jede nte Differenz nicht einer Function von Δx von der Form $P\Delta x^n$

$P\Delta x^n + Q\Delta x^{n+\varkappa}$ gleich wäre; es ist aber hiebey P allemal eine reelle völlig bestimmte, von Δx ganz unabhängige Grösse, und Q eine Function von Δx von der Form $\beta + \gamma\Delta x + \delta\Delta x^2 + \text{---}$ (2. 1. Zus.).

4. Zusatz. Die Differenz Δx ist ein veränderliches Stück von einer absoluten veränderlichen Grösse x (II), wie x ein solches von irgend einer Grösse g, etwa ein veränderliches Stück von einer Linie zu bedeuten pflegt: so wie daher bey einer Function von x diese Grösse allmählig kleinere Werthe bekommen, hernach auch gleich Null gesetzt werden kann (I); eben so wird man bey einer Function von Δx dieser Differenz allmählig kleinere Werthe beylegen, und endlich sie auch gleich Null setzen können, wenn uns etwas daran gelegen ist, zu wissen, was für Veränderungen bey derselben Function für alle diese Werthe von Δx vorgehn würden.

5. Zusatz. Für $\Delta x = 0$ müssen alle Differenzen aller Functionen von x gleich Null werden (3. Zus.), wie dieses schon aus (I. 3. Zus.) erhellet. Wenn man aber diejenigen Functionen in Betrachtung ziehet, welche alle nten Differenzen von y durch die nten Potenzen von Δx wirklich dividirt geben mögen, und auf sie die Untersuchung (4. Zus.) anwendet; so wird man finden, es sey jede Function y von einer absoluten veränderlichen Grösse x so beschaffen, daß jede nte Differenz von y durch die nte Potenz von Δx wirklich dividirt, eine solche Function von Δx zum Quotienten geben muß, welche in dem bestimmten

Fall, wenn $\Delta x = 0$ würde, einen reellen vollkommen bestimmten Werth P erlangte (3. Zus.); und dieser Werth ist der eigentliche Gegenstand der Differential- und Integral-Rechnung, nachdem entweder er für jede vorgelegte Function y, oder diese aus ihm gesucht wird.

IV. Erklärung.

Derjenige Werth, welchen der durch wirkliche Division einer nten Differenz irgend einer Function y durch die nte Potenz von der Differenz der absoluten veränderlichen Grösse, auf die y sich bezieht (I. 1. 2. Zus.), zu erhaltende Quotient alsdann erlangen würde, wenn man bey ihm $\Delta x = 0$ setzte, soll der nte Verschwindungs-Quotient von y heissen, und allemal mit $d^n y$ bezeichnet werden.

1. Zusatz. Für die Function $y = ax + bx^2$ von einer absoluten veränderlichen Grösse x erhält man $\Delta y = (a + 2bx)\Delta x + b\Delta x^2$, und dieses durch Δx wirklich dividirt, giebt $a + 2bx + b\Delta x$, wovon $a + 2bx$ der Werth für $\Delta x = 0$ ist: also ist $dy = d(ax + bx^2) = a + 2bx$. Setzt man $b = 0$, $a = 1$; so ist $dx = 1$, das heißt: der einer absoluten veränderlichen Grösse x zugehörige Verschwindungs-Quotient ist allemal $= 1$.

2. Zusatz. Für eine unveränderliche Grösse A (I.), als welche von keiner veränderlichen abhängt, giebt es keine Differenz (II.), mithin auch keinen Verschwindungs-Quotienten, (Erklär.), und in dieser Bedeutung soll $dA = 0$ seyn.

3. Zuſatz. Jeder Function y von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe z gehört ein Verſchwindungs-Quotient $dy = \alpha = \alpha dz$ (1. Zuſ.) zu (Erklär. und III. 1. Zuſ.), der durch die Function y dergeſtalt beſtimmt iſt, daß $\alpha = aAz^{a-1} + bBz^{b-1} + \cdots$ ſeyn muß, wenn $y = Az^a + Bz^b + \cdots$ iſt.

Iſt aber z eine abhängige veränderliche Gröſſe, mithin eine Function von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x (I. 1. 2. Zuſ.); ſo iſt zwar $\Delta y = \alpha\Delta z + \psi\Delta z^2$, man kann aber nun auch $\Delta z = m\Delta x + n\Delta x^2$ ſetzen in der Bedeutung (III. 1. Zuſ.), mithin $\Delta y = \alpha(m + n\Delta x)\Delta x + \psi(m + n\Delta x)^2.\Delta x^2$, und hieraus und Δz erhält man $dy = \alpha m$, $dz = \alpha$ (Erklär.), folglich $dy = \alpha dz$.

4. Zuſatz. Für jede Function y, welche durch eine veränderliche Gröſſe z gegeben ſeyn mag, giebt es alſo einen Verſchwindungs-Quotienten $dy = \alpha dz$, bey dem α durch die Function y ſelbſt dergeſtalt beſtimmt iſt, daß $\alpha = aAz^{a-1} + bBz^{b-1} + \cdots$ ſeyn muß, wenn $y = Az^a + Bz^b + \cdots$ iſt, dz aber iſt entweder $= 1$, oder eine durch z eben ſo beſtimmte Function von irgend einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x, wie α durch y beſtimmt ſeyn ſoll, nachdem nämlich z eine abſolute, oder abhängige veränderliche Gröſſe iſt (3. Zuſ.).

5. Zuſatz. Wären u, v was immer für Functionen von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x, und hätte man $y = uv$; ſo wäre $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta v\Delta u$ (II. 1. Zuſ.), und man könnte ſetzen $\Delta v = \alpha\Delta x + \psi\Delta x^2$,

$\Delta u = m\Delta x + n\Delta x^2$ (III. 1. Zuſ.), mithin $\Delta y = u(\alpha+\psi\Delta x)\Delta x + v(m+n\Delta x)\Delta x + (\alpha+\psi\Delta x)(m+n\Delta x)\Delta x^2$, und nun $dv = \alpha$, $du = m$, $dy = u\alpha + vm$ (Erklär.), oder $dy = udv + vdu$.

6. Zuſatz. Weil $y = \frac{X}{Z}$ für alle Functionen X, Z von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x, wegen $yZ = X$, nach (5. Zuſ.) $ydZ + Zdy = dX$ giebt; ſo iſt $dy = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2}$.

7. Zuſatz. Und für $y = P + Q + \ldots + Z$ wäre $\Delta y = \Delta P + \Delta Q + \ldots + \Delta Z$ nach (II. 2. Zuſ.): alſo auch $dy = dP + dQ + \ldots + dZ$ nach (Erklär.).

8. Zuſatz. Aus $y = Z + C$, wenn C eine beſtändige Gröſſe iſt, erhielte man $\Delta y = \Delta Z$ nach (II. 1. Zuſ.), mithin auch $dy = dZ$ nach (Erklär.).

Und aus $y = AZ$ folgt $\Delta y = A\Delta Z$ (II. 1. Zuſ.), mithin $dy = AdZ$ nach (Erklär.).

9. Zuſatz. Nach (4. 5. 6. 7. 8. Zuſ.) findet man den Verſchwindungs-Quotienten jeder algebraiſchen Function von einer veränderlichen Gröſſe.

V. Aufgabe.

Aus dem gegebenen nten Verſchwindungs-Quotienten einer Function y von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x ihren (n+1)ten Verſchwindungs-Quotienten zu beſtimmen.

Auflöſung. Man kann ſetzen $\Delta^n y = P\Delta x^n + Q\Delta x^{n+1}$; $dP = p\Delta x + q\Delta x^2$; $\Delta^{n+1} y = p\Delta x^{n+1} + R\Delta x^{n+2}$

(III. 2. Zuſ.): alſo $d^n y = P$; $dP = p$; $d^{n+1} y = p$, nach (IV.), mithin $d^{n+1} y = d.d^n y$. Das heißt: den nten Verſchwindungs-Quotienten betrachte man als eine Function von x, und ſuche den ihr zugehörigen erſten Verſchwindungs-Quotienten, der den (n+1)ten Verſchwindungs-Quotienten von y geben wird.

1. Zuſatz. Weil der erſte Verſchwindungs-Quotient jeder Function von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x die Form Mdx haben muß, wo $dx = 1$ iſt (IV. 4. Zuſ.); ſo iſt $d^2 y = dx.d\alpha$ für $dy = \alpha dx$ nach (IV. 8. Zuſ.), oder $d^2 y = \beta dx^2$ für $d\alpha = \beta dx$; mithin $d^3 y = dx^2 d\beta$ (IV. 8. Zuſ.), oder $d^3 y = \gamma dx^3$ für $d\beta = \gamma dx$, u. ſ. f.

2. Zuſatz. Iſt aber $dy = \alpha dz$, und z eine Function von irgend einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x (IV. 4. Zuſ.); ſo wird ſeyn $d^2 y = d.\alpha dz = \alpha d.dz + dz d\alpha$ (IV. 5. Zuſ.) $= \alpha d^2 z + d\alpha dz$; und nun $d^3 y = d(\alpha d^2 z + d\alpha dz) = d.\alpha d^2 z + d.d\alpha dz$ (IV. 7. Zuſ.), $= \alpha d^3 z + d\alpha d^2 z + d\alpha d^2 z + d^2 \alpha dz$ (IV. 5. Zuſ.) $= \alpha d^3 z + 2 d\alpha d^2 z + d^2 \alpha dz$, u. ſ. f.

3. Zuſatz. Wenn eine Function y von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x ſo beſchaffen iſt, daß der nte Verſchwindungs-Quotient $d^n y = P dx^n$ von x gar nicht abhängt; ſo wird es für ſie keine höheren Verſchwindungs-Quotienten geben, oder es wird ſeyn: $d^{n+1} y = 0$, $d^{n+2} y = 0$ u. ſ. f. (IV. 2. Zuſ.).

4. Zu-

4. Zuſatz. Aus $y = Ax^a + Bx^b + \ldots + Px^p + \ldots$ erhält man $d^n y = d^n . Ax^a + d^n . Bx^b + \ldots + d^n . Px^p + \ldots$ (Aufg. und IV. 7. Zuſ.). Nun aber iſt $d^n . Ax^a = a(a-1)\ldots(a-n+1)Ax^{a-n}dx^n$ nach (1. Zuſ. und IV. 3. Zuſ.), auf welche Art man auch die übrigen Theile von $d^n y$ beſtimmen kann. Wenn alſo der Werth y' verlangt wird, welchen eine Function y von der abſoluten veränderlichen Gröſſe x in dem Fall erlangen würde, wenn dieſe um eine Gröſſe ω zunähme; ſo wäre er $y' = y + \frac{dy}{dx}\omega + \frac{d^2y}{2dx^2}\omega^2 + \frac{d^3y}{2 \cdot 3dx^3}\omega^3 + \ldots + \frac{d^n y}{2 \cdot 3 \ldots n dx^n}\omega^n$ (III. n. 3. 4.).

VI. Lehrſatz.

Wenn die veränderlichen Theile X, Z zweier Functionen $y = X + A$, $z = Z + B$ von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x einander gleich ſind; ſo müſſen auch die ihnen zugehörigen Verſchwindungs-Quotienten dy, dz einander gleich ſeyn.

Beweis. Es iſt $dy = dX$ und $dz = dZ$ nach (IV. 8. Zuſ.), daher ſoll $dX = dZ$ ſeyn, welches ſo dargethan wird. Für $\Delta X = M\Delta x + N\Delta x^2$, und $\Delta Z = m\Delta x + n\Delta x^2$ (III. 1. Zuſ.), iſt $dX = M$ und $dz = m$ (IV.): nun aber muß $M\Delta x + N\Delta x^2 = m\Delta x + n\Delta x^2$, mithin auch $M + N\Delta x = m + n\Delta x$ für jeden Werth von Δx, auch für $\Delta x = 0$ ſeyn (II. 4. Zuſ.), welches nur für $M = m$ gelten kann.

1. Zuſatz. Setzt man, es ſeyen die veränderlichen Theile X, Z ungleich, und $X > Z$; ſo muß auch $dy > dz$ ſeyn. Denn es muß ja für jeden Werth von x eine Differenz $\mu = X - Z$ als eine Function von x geben, wofür $X = Z + \mu$, daher $dX = d(Z+\mu)$ nach (Lehrſ.) $= dZ + d\mu$ nach (IV. 7. Zuſ.), mithin $dX > dZ$ ſeyn würde, folglich auch $dy > dz$ wegen $dy = dX$ und $dz = dZ$, wie beym Beweiſe des Lehrſatzes.

2. Zuſatz. Alſo auch umgekehrt, wenn zwoen Functionen y, z gleich groſſe Verſchwindungs-Quotienten zugehören; ſo müſſen ihre veränderlichen Theile gleiche Functionen von x ſeyn: wenn aber der Verſchwindungs-Quotient einer Function y gröſſer iſt, als der der andern z zugehörige; ſo muß auch der veränderliche Theil von y gröſſer ſeyn, als der von z.

3. Zuſatz. Es können daher weder einer und eben derſelben Function verſchiedene und ungleich groſſe Verſchwindungs-Quotienten, noch einem und eben demſelben Verſchwindungs-Quotienten verſchiedene mit ungleichen veränderlichen Theilen verſehene Functionen zugehören.

4. Zuſatz. Da aber jeder $(n+1)$te Verſchwindungs-Quotient einer jeden Function aus dem nten ſo entſtehet, wie der erſte aus der Function ſelbſt (V.); ſo iſt offenbar, daß alle Sätze (Lehrſ. 1, 2. 3. Zuſ.) für alle Verſchwindungs-Quotienten zwoer Functionen gelten müſſen.

Anmer-

Anmerkung.

Daß der veränderliche Theil einer Function hier im strengsten Verstande genommen worden ist, erhellet für sich: so soll z. B. bey $y=(a+x)^2+3g$ nicht $3g$, sondern a^2+3g der unveränderliche Theil, mithin $2ax+x^2=(a+x)^2-a^2$ der veränderliche Theil seyn.

VII. Lehrsatz.

Bey jeder Function $A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+\cdots$ kann Δx so genommen werden, daß dafür das erste Glied grösser wird, als die Summe aller darauf folgenden Glieder.

Beweis. 1) Es wird vorausgesetzt, A bedeute eine bejahte Grösse, und B, C, D---- seyen lauter bejahte, oder theils bejahte, und theils verneinte Grössen. Indessen wollen wir den ersten Fall betrachten.

2) Sey Z grösser, als jede unter den Grössen B, C, D----; so wird seyn $Z(\Delta x^2+\Delta x^3+\Delta x^4+\cdots)>B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+\cdots$. Und weil für jede Anzahl a von Gliedern der zwischen den Klammern befindlichen geometrischen Progression ihre Summe $=\frac{\Delta x^2(1-\Delta x^a)}{1-\Delta x}$ ist; so ist auch:

$$\frac{Z\Delta x^2(1-\Delta x^a)}{1-\Delta x}>A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+\cdots$$

3) Es mag nun $\frac{(Z+A)x}{A}$ eine wie immer grosse Zahl zum Quotienten geben; so ist doch noch allemal

eine andere Zahl $m > \frac{(Z+A)x}{A}$ möglich, und dafür wäre $\frac{1}{m}x < \frac{A}{Z+A}$. Da also Δx ein völlig unbestimmtes Stück von x bedeuten soll; so kann man $\Delta x = \frac{1}{m}x$, mithin $\Delta x < \frac{A}{Z+A}$ machen, und alsdann wäre $\frac{Z\Delta x^2}{1-\Delta x} < A\Delta x$. Es ist aber $\frac{Z\Delta x^2}{1-\Delta x} > \frac{Z\Delta x^2(1-\Delta x)}{1-\Delta x}$: also ist um desto eher $A\Delta x > B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 + \cdots$, wegen (n. 2.).

4) Wenn nun einige unter den Gliedern $B\Delta x^2$, $C\Delta x^3$, $D\Delta x^4 \cdots$ bejaht, und andere verneint sind; so sey S die Summe aller bejahten, $-s$ die Summe aller verneinten, mithin $S - s$ die Summe der bejahten und verneinten Glieder zusammen. Weil $A\Delta x > S$ werden kann (n. 3.); so wird um desto eher $A\Delta x > S - s$ werden können.

Zusatz. Es kann daher $2A\Delta x > A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \cdots$ werden. Wenn nun μ eine wie immer kleine Grösse, mithin $\frac{x}{\sqrt{\frac{\mu}{2A}}}$ eine wie immer grosse Zahl ist; so ist doch eine andere Zahl $m > \frac{x}{\sqrt{\frac{\mu}{2A}}}$ möglich, wofür $\frac{1}{m}x < \sqrt{\frac{\mu}{2A}}$, daher für $\frac{1}{m}x = \Delta x$ auch $2A\Delta x^2 < \mu$, folglich um desto eher $A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \cdots < \mu$ seyn muß.

VIII. Lehr-

VIII. Lehrſatz.

Wenn M, N reelle von Δx unabhängige Gröſſen, und P, Q entweder ſolche Gröſſen, oder Functionen von Δx von der Form $A+B\Delta x+C\Delta x^2+\cdots$ bedeuten, wo doch eine von ihnen auch gleich Null ſeyn kann, etwa $P=0$; wenn ferner $M>N+P\Delta x$ und zugleich $M<N+Q\Delta x$ für jeden wie immer kleinen Werth von Δx iſt; ſo muß $M=N$ ſeyn.

Beweis. Weil M, N, nicht Nichtſe, ſondern wirkliche von Δx unabhängige Gröſſen ſeyn ſollen; ſo kann man $M=N$ dadurch beweiſen, wenn man darthut, es ſey weder $M>N$ noch $M<N$ möglich.

1) Dem zufolge merke man ſich vorläufig, daß M, N entgegengeſetzte Gröſſen nicht ſeyn können, ſondern entweder beyde bejaht, oder beyde verneint ſeyn müſſen.

Denn wenn N einen bejahten Werth hat; ſo wird $P\Delta x$ einen bejahten oder verneinten Werth haben: im erſten Fall wird auch $N+P\Delta x$ einen bejahten Werth haben müſſen, mithin muß $M>N+P\Delta x$ bejaht ſeyn, weil, wenn M verneint, etwa $M=-m$ wäre, auch $-m>N+P\Delta x$, folglich $0>N+P\Delta x+M$ ſeyn müßte, welches unmöglich iſt: hat aber $P\Delta x$ einen verneinten Werth, etwa $P\Delta x=-p\Delta x$, weil $p\Delta x<N$ werden kann (VII. Zuſ.), und $M>N+P\Delta x$ für jedes Δx ſeyn ſoll; ſo wird erſtlich $N+P\Delta x=N-p\Delta x$ einen bejahten Werth haben können, und doch noch $M>N+P\Delta x$, mithin, wie zuvor, M bejaht ſeyn müſſen.

Nimmt

Nimmt man aber an, N habe einen verneinten Werth, etwa $-n$; ſo hat man $M < -n + Q\Delta x$ vermöge der Vorausſetzung. Nun hat $Q\Delta x$ einen bejahten oder verneinten Werth; im erſten Fall, weil $Q\Delta x < n$ werden kann (VII. Zuſ.), wird $-n + Q\Delta x$ einen verneinten Werth haben können, mithin muß M einen verneinten Werth haben, weil, wenn er bejaht wäre, $M + n - Q\Delta x < 0$ oder eine bejahte Gröſſe kleiner als Null ſeyn könnte, welches unmöglich iſt. Hat aber $Q\Delta x$ einen verneinten Werth, etwa $-q\Delta x$; ſo iſt eigentlich $M < -n - q\Delta x$, folglich iſt M verneint, weil ſonſt $M + n + q\Delta x < 0$ oder eine bejahte Gröſſe kleiner als Null wäre.

Dieſes vorausgeſetzt kann man ſich nun von der Unmöglichkeit der Bedingungen $M > N$, $M \leq N$ aufs vollkommenſte ſo überzeugen.

Erſter Fall $M > N$.

2) Es muß N einen bejahten oder verneinten Werth haben: iſt N bejaht; ſo iſt es auch M, nach (n. 1.). Und nun wird es eine bejahte Differenz $M - N$ geben müſſen, wenn $M > N$ iſt, und weil $M < N + Q\Delta x$ ſeyn ſoll; ſo wird $M - N < Q\Delta x$ ſeyn müſſen.

3) Es mag aber die bejahte Differenz $M - N$ wie immer klein ſeyn; ſo kann doch Δx ſo genommen werden, daß dafür $M - N > Q\Delta x$ wird (VII. Zuſ.).

4) Da alſo $M < N + Q\Delta x$ für jeden Werth von Δx gelten ſoll, vermöge der Vorausſetzung; ſo wird, wenn

M

$M > N$ ist, für einen und eben denselben Werth von Δx, wofür $M - N > Q\Delta x$ seyn mag 3) zugleich $M - N < Q\Delta x$ seyn können 2), welches aber unmöglich ist.

5) Hat hingegen N einen verneinten Werth; so hat einen solchen auch M nach 1), mithin kann man $N = -n$ und $M = -m$ setzen. Wird daher $M > N$ angenommen; so ist $-m > -n$, das heißt $m - n < 0$, folglich $m - n$ gewiß eine verneinte, und $n - m$ eine bejahte Gröſſe, und, weil $M < N + Q\Delta x$ für jedes Δx seyn soll, wegen der Voraussetzung; so ist auch $M - N < Q\Delta x$ oder $n - m < Q\Delta x$.

6) Man kann aber für jede Differenz $n - m$ wegen (VII. Zus.) $Q\Delta x < n - m$ machen.

7) Wenn also $M > N$ wäre; so könnte für eben den Werth von Δx, wofür $n - m > Q\Delta x$ ist 6) auch $n - m < Q\Delta x$ seyn 5), welches doch unmöglich ist.

Zweyter Fall $M < N$.

8) Sey N ein bejahter Werth; so ist ein solcher auch M, daher $N - M$ eine bejahte Differenz, und, weil $M > N + P\Delta x$ seyn soll, allemahl $N - M < -P\Delta x$.

9) Es kann aber $-P\Delta x < N - M$ werden (VII. Zus.): wenn also $M < N$ wäre; so könnte für eben den Werth von Δx, wofür $-P\Delta x < N - M$ seyn muß, zugleich $-P\Delta x > N - M$ seyn 8), welches unmöglich ist.

10) Es habe N einen verneinten Werth; so ist auch M verneint 1), daher kann man $N = -n$ und $M = -m$ setzen. Wegen $M < N$ wäre daher $-m < -n$ und $n - m < 0$, folglich $n - m$ gewiß verneint, und $m - n$

eine

eine beſtimmte Differenz. Weil ferner $M > N+P\Delta x$ für jedes Δx ſeyn ſoll; ſo wird auch $-m > -n+P\Delta x$, oder $m-n < -P\Delta x$ ſeyn.

11) Es kann aber Δx ſo genommen werden, daß $-P\Delta x < m-n$ wird (VII. Zuſ.): wenn alſo $M < N$ wäre; ſo könnte für den Werth von Δx, wofür $-P\Delta x < m-n$ ſeyn müßte, zugleich $-P\Delta x > m-n$ ſeyn, welches unmöglich iſt.

Zuſatz. Iſt demnach eine Function y von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x ſo beſchaffen, daß für ſie $\frac{\Delta y}{\Delta x} > N+p\Delta x$ und zugleich $\frac{\Delta y}{\Delta x} < N+q\Delta x$ für jeden wie immer kleinen Werth von Δx ſeyn muß; ſo iſt der ihr zugehörige Verſchwindungs-Quotient $dy=Ndx$. Denn es erhellet aus (III. 1. Zuſ. und IV. 3. Zuſ.), daß man $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x+\psi\Delta x^2$ ſetzen kann: alſo wird ſeyn

$$\frac{dy}{dx}+\psi\Delta x > N+p\Delta x \text{ und } \frac{dy}{dx}+\psi\Delta x < N+q\Delta x$$

mithin auch

$$\frac{dy}{dx} > N+(p-\psi)\Delta x \text{ und } \frac{dy}{dx} < N+(q-\psi)\Delta x$$

folglich $\frac{dy}{dx}=N$ nach Lehrſ.

Was nun das zweyte und dritte Hauptſtück des Lehrbuchs anbelangt, ſo habe ich im zweyten das Wichtigſte aus der Integral-Rechnung, und im dritten die merkwürdigſten Anwendungen der Differential- und Integral-Rechnung abgehandelt. Bey der Integral-Rechnung habe ich vorzüglich dafür geſorgt, daß die Integrir-irrationaler Verſchwin-

schwindungs-Quotienten aufs möglichste erleichtert, und überall der vortheilhafteste Weg dazu vorgeschlagen werde: aus dieser Ursache sind die Integralien, welche mit den trinomischen Verschwindungs-Quotienten $x^m dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{n}{x}}$, und den damit für $\beta=0$ oder $\gamma=0$ verbundenen binomischen zugehören, aufs vollkommenste bestimmt worden.

Zum Beschluß benutze ich diese Gelegenheit, dem mir unbekannten Hrn. Recensenten, in Gött. Anz. 201. St. S. 2015. aufs J. 1790, für den dem ersten Bande ertheilten gütigen Beyfall den verbindlichsten Dank abzustatten, nicht anders, als wenn ich der darinn enthaltenen Buchstaben-Rechenkunst und Analysis Verfasser wäre. Gleichwohl finde ich bey jener Recension eine Stelle, die mir nachtheilig werden könnte, nämlich wo gesagt wird: daß ich verspreche, mehr Aufsätze des sel. Mitterpachers herauszugeben: zugleich sehe ich mich aber gezwungen, zu erkennen, daß ich selbst diese Aeusserung durch meine Unvorsichtigkeit veranlaßt habe, indem die auf dem Titel des ersten Bandes befindlichen Worte — wie sie in seinen Papieren Hr. Joseph Mitterpacher hinterlassen hat, nichts anders bedeuten konnten, als, es sey das, was der erste Band enthält, vollkommen so, wie es da stehet, in den Papieren des sel. Mitterpachers vorhanden gewesen, und bey dieser Voraussetzung konnte die dortige Vorrede, worinn ich meine eigene Arbeit mit wenigen Worten anzeigen wollte, nicht anders verstanden werden, als daß diejenigen Aufsätze, von deren Ausarbeitung daselbst die Rede ist, erst herauskommen sollen: daher finde ich es für

nöthig,

nöthig, diejenige Erklärung herzusetzen, welche ich in der Vorrede zum ersten Bande hätte geben sollen, daß nämlich die darinn ausgeführte Buchstaben-Rechenkunst und Analysis aus den Aufsätzen entstanden ist, welche ich nach den lateinischen Entwürfen des sel. Mitterpachers ausgearbeitet habe. Dergleichen Entwürfe befanden sich in den mathematischen Fragmenten, die mir sein würdigster Bruder, Herr Ludwig Mitterpacher, Prof. bey der hiesigen Universität, mit dem Ansuchen übergeben hatte, diejenigen, die es verdienen möchten, auf irgend eine Art durch den Druck bekannt zu machen: zufrieden damit, daß dieser einsichtsvolle Mann von der schweren Arbeit, die mir der erste Band kostete, überzeugt ist, wiederhole ich nur das, was ich schon in der dortigen Vorrede gesagt habe, daß ich nämlich dabey nichts zu thun hatte, als des Seligen Gedanken getreu zu bleiben, sie bisweilen zu entwickeln, Zwischenideen einzuschalten, und die nach seinen Entwürfen ausgearbeiteten Aufsätze in Verbindung unter einander zu bringen, so, wie er es selbst gethan haben würde, wenn er sich je entschlossen hätte, ein Lehrgebäude aufzuführen, wodurch ich die im ersten Bande ausgeführte Algebra verstund. Ausser den Fragmenten, die dazu dienten, ist nur noch ein Fragment übrig, welches die periodischen Decimal-Brüche betrifft, und meiner Willkühr überlassen worden ist, es auf einem beliebigen Wege bekannt zu machen.

Pest den 2ten Juni 1791.

J. Pasquich.

Inhalt

Inhalt des ersten Bandes.

Der I. Abschnitt. Von entgegengesetzten Zahlen und den damit vorzunehmenden Arbeiten.

1. §. Möglichkeit solcher Zahlen, deren gleich grosse Theile in Ansehung dessen, was man durch sie zu bestimmen sucht, einander aufheben.

2. §. Erklärung entgegengesetzter Zahlen, welche durch willkührliche Benennungen, (bejaht und verneint) von einander unterschieden werden.

3. §. 1 — 6. Zusatz. Willkührliche Bezeichnung entgegengesetzter Zahlen mit (+ —); was (+) und was (—) bedeuten soll, muß gleich im Anfange einer Rechnung festgesetzt werden; übrigens gehen diese Zeichen die Grösse der Zahlen gar nicht an, sie beziehen sich vielmehr nur auf die entgegengesetzten Umstände, worunter dieselben durch die Einheiten verstandener Grössen betrachtet werden; die wahre Bedeutung der Summe entgegengesetzter Zahlen; und die Art, wie man die Zeichen (+ —) in einer Rechnung zu nehmen hat, indem damit sonst auch die Begriffe der Addition und Subtraction verbunden sind.

4. §. Bey jeder Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen kann man die Einheit überall für bejaht annehmen.

5—7. §. Sätze die Subtraction, Multiplication und Division entgegengesetzter Zahlen betreffend; nebst Berichtigung der hierbey gewöhnlichen Redensarten.

Der II. Abschnitt. Gründe der Buchstaben-Rechenkunst.

8. 9. §. Zusatz. Bezeichnungen arithmetischer Arbeiten, und die sich darauf gründende Bedeutung von $a^{\frac{1}{n}}$.

10. §. 1—16. Zusatz. Allgemeine Begriffe von Potenzen; nebst Sätzen für Potenzen von a, deren Exponenten ganze, übrigens bejahte oder verneinte Zahlen sind, wie auch für die Multiplication und Division solcher Potenzen durch einander, und ihre Erhebung auf höhere Potenzen.

11—13. §. Begriffe von Wurzeln, Wurzelgrössen, Wurzelexponenten, gleichnamichten Potenzen und Wurzeln.

14. §. 1. 2. Zusatz. Grundsätze die Gleichheit und Ungleichheit gleichnamichter Potenzen und Wurzeln wegen der Gleichheit und Ungleichheit der Grössen, wofür sie verlangt werden, betreffend; Entstehung jeder Wurzel eines Bruchs durch die Wurzeln des Zählers und Nenners, und jedes Products durch die seiner Factoren.

15. §. 1—9. Zusatz. Sätze für Potenzen, deren Exponenten gebrochene Zahlen sind, und für die Multiplication, und Division solcher Potenzen von einer Grösse a durch einander, wie auch für die Erhebung derselben auf andere Potenzen, und die Ausziehung der Wurzeln aus ihnen.

16—18. §. Begriffe von vieltheilichten Grössen, ihren Gliedern und Coefficienten, wie auch von einfachen gleichartigen und ungleichartigen Grössen.

19—22. §. Die Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischer Grössen.

23—26. §. Begriffe von einer Function, und den Coefficienten ihrer Glieder; Reihen für $\frac{1}{1 \pm z}$, und Untersuchungen, ob Producte, Quotienten, und alle Potenzen, welche aus Functionen von der Form $1+ax+bx^2+\cdots$ entstehen, auch Functionen von dieser Form sind.

Der III. Abschnitt. Anwendung der Buchstaben-Rechenkunst auf die Auflösung mathematischer Aufgaben.

27—29. §. Begriffe von mathematischen Aufgaben, und Gleichungen überhaupt genommen.

30. §. 1—3. Zusatz. Verwandlungen einer Gleichung durch die Transposition ihrer Glieder.

31. §. 1—3. Zusatz. Dergleichen durch die Multiplication und Division.

32. §. 1—5. Zusatz. Auflösung mathematischer Aufgaben für eine unbekannte Grösse.

33. §. 1—3. Zusatz. Auflösung bestimmter Aufgaben vom ersten Grad für mehrere unbekannte Grössen.

Der IV. Abschnitt. Anwendung der Buchstaben-Rechenkunst auf die merkwürdigsten Eigenschaften der geraden, ungeraden und Primzahlen.

34—38. §. Was theilbare und nicht theilbare Zahlen bedeuten? Was ein Maaß, und was das gemeinschaftliche und größte Maaß zweer oder mehrerer Zahlen ist? Was absolute und

unter sich Primzahlen, ingleichen gerade und ungerade Zahlen heißen? Was ein aliquoter Theil, und ein Vielfaches heißt.

39. 49. §. Zusatz. Die Summe oder Differenz einer ganzen Zahl und eines Bruchs, der keiner ganzen Zahl gleich ist, kann nie eine ganze Zahl geben: wenn A durch B und B durch n theilbar ist; so ist es auch A durch n; mithin wenn B durch n, aber nicht A durch n theilbar ist; so ist A durch B nicht theilbar.

41. §. 1 — 8. Zusatz. Die Summe mehrerer Zahlen A,B,C--- ist nur alsdann durch μ theilbar, wenn entweder jede Zahl für sich durch μ theilbar ist, oder wenn es die Summe der Reste ist, welche dieselben Zahlen durch μ dividirt geben: daher ist a+b nicht theilbar durch μ, wenn a aber nicht auch b durch μ theilbar ist; wenn a+b und a, durch μ theilbar sind; so ist es auch b; wenn eine unter den Zahlen a+b und a durch μ theilbar, und die andere nicht theilbar ist; so ist b durch μ nicht theilbar: wenn beyde Zahlen A, B durch μ theilbar sind, so muß es auch ihre Differenz seyn; ist aber nur eine von ihnen durch μ theilbar, so ist ihre Differenz durch μ nicht theilbar; sind die Differenz A — B und eine Zahl A oder B durch μ theilbar, so ist es auch die andere; ist aber A — B durch μ nicht theilbar, wohl aber eine Zahl A oder B, so kann die andere durch μ nicht theilbar seyn: die Summe gerader Zahlen ist allemal gerad; die Summe ungerader Zahlen ist aber gerad oder ungerad, nachdem es ihre Menge ist; mithin ist auch die Summe gerader und ungerader Zahlen gerad oder ungerad, nachdem die Menge der ungeraden gerad oder ungerad ist;

die

die Differenz gerader Zahlen ist allemal gerad, und die Differenz zwoer Zahlen, worunter eine gerad, und die andere ungerad ist, ist allemal ungerad.

42. §. Zusatz. Wenn weder A noch B durch μ theilbar ist; so kann es $A - B$ nur alsdann seyn, wenn A, B durch μ dividirt, gleiche Reste geben: daher ist die Differenz zwoer ungeraden Zahlen allemal gerad.

43. §. Zusatz. Jedes Product ist durch μ theilbar, wenn es nur ein Factor ist: mithin ist das Product aus ganzen Zahlen allemal eine gerade Zahl, wenn eine solche nur ein Factor ist.

44. §. Zusatz. Wenn weder A noch B durch μ theilbar ist; so kann es AB nur alsdann seyn, wenn es das Product aus den Resten ist, welche A, B durch μ dividirt geben: daher ist das Product aus ungeraden Zahlen allemal ungerad.

45. §. 1. u. 2. Zusatz. Wenn $A > B$ durch μ theilbare Zahlen sind, und A durch B dividirt, den Rest R giebt; so ist R durch μ theilbar: daher wenn auch B durch R dividirt, einen Rest r, und R durch r dividirt einen Rest s giebt u. s. f. so sind alle Reste r, s durch μ theilbar: und wenn B durch R theilbar wäre; so müßte μ das größte gemeinschaftliche Maaß von A, B seyn.

46. §. Das größte gemeinschaftliche Maaß zwoer ganzen Zahlen zu bestimmen.

47. §. Wenn zwo Zahlen durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß dividirt werden; so sind die Quotienten unter sich Primzahlen.

48. §. 1 — 8. Zusatz. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner unter sich Primzahlen sind, kann durch kleinere Zahlen ohne Aenderung seines Werthes nicht ausgedrückt werden: mithin können jene Brüche nicht einander gleich seyn, welche mit ungleichen Zählern und Nennern versehen sind, so daß jedes Bruches Zähler und Nenner entweder absolute oder unter sich Primzahlen sind: wenn zwo Zahlen durch μ dividirt unter sich Primzahlen zu Quotienten geben, so war μ ihr größtes gemeinschaftliches Maaß: das Product aus einigen absoluten Primzahlen kann nicht aus andern eben so vielen, wenigeren oder mehreren absoluten Primzahlen bestehen, mithin auch weder durch eine andere absolute Primzahl, noch durch das Product aus mehreren andern absoluten Primzahlen theilbar seyn: daher können zwo Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben, wenn alle einfache Factoren der einen Zahl von allen der andern unterschieden sind; haben aber zwo Zahlen gemeinschaftliche einfache Factoren, so ist das Product aus diesen ihr größtes gemeinschaftliches Maaß; und dieses gilt auch für mehrere Zahlen.

49. 50. §. Durch 2, 3, 5, 9 theilbare Zahlen.

51. 52. §. Zerlegung einer Zahl in ihre Factoren, und Ausdrückung eines Bruchs durch kleinste Zahlen, ohne Aenderung seines Werthes.

53. 54. §. Darstellung der Gewißheit, welche mit der Beweisart verbunden ist, deren man sich nun statt der sonst gewöhnlichen Induction bedient.

Der

Der V. Abschnitt. Anwendung der Buchstaben-Rechenkunst auf die Lehre von zusammenhängenden Brüchen, und die Erfindung der um Eins unterschiedenen Vielfachen zwoer Primzahlen.

55, 56. §. 1. u. 2. Zusatz. Erklärung zusammenhängender Brüche, und Verwandlung jedes unächten Bruchs $\frac{A}{B}$ in einen zusammenhängenden

$$\frac{A}{B} = C + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{F + \cfrac{1}{\text{ꝛc. ꝛc.}}}}}$$

Wenn man nämlich A durch B dividirt; so entstehet ein Quotient C und ein Rest, durch welchen B dividirt soll den Quotienten D und einen Rest geben, durch welchen der vorige Rest dividirt giebt den Quotienten E und einen neuen Rest, u. s. f. Nun kann man durch den ersten Quotienten C einen Bruch $= \frac{C}{1}$, durch die zween ersten Quotienten C, D einen Bruch $= C + \frac{1}{D}$, durch die drey ersten Quotienten einen Bruch $= C + \cfrac{1}{D + \frac{1}{E}}$ u. s. f. bestimmen, und dieses sollen Partialbrüche heißen, der erste $= \frac{C}{1}$ der zweyte $= \frac{CD+1}{D}$ u. s. f.

57. §. 1—7. Zusatz. Gesetz, nach welchem sich jeder $(n+1)$te Partialbruch aus dem nächst vorhergehenden $n$ten und $(n-1)$ten durch die Quotienten bestimmen läßt, welche bey der Verwandlung eines Bruches $\frac{A}{B}$ in einen zusammenhängenden erhalten werden: man mag was immer für zween nächste Partialbrüche nehmen; so ist doch der Unterschied der Producte, welche entstehen, wenn man den Zähler jedes Bruches mit dem Nenner des andern multiplicirt, allemal $= 1$: jeder $n$te Partialbruch ist gröſſer oder kleiner als der nächst vorhergehende $(n-1)$te, nachdem n gerad oder ungerad ist; die Differenz aber zwischen zween nächsten Partialbrüchen hat allemal Eins zum Zähler und das Product aus ihren Nennern zum eigenen Nenner; sie ist zugleich desto kleiner, je weiter dieselben Brüche vom ersten abstehen: der Zähler und Nenner jedes Partialbruches sind unter sich Primzahlen, weswegen sich kein Partialbruch durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, so wie auch zwischen zween nächsten Partialbrüchen ein dritter Bruch nicht möglich ist, welcher aus kleineren Zahlen bestünde.

58. §. 1—3. Zusatz. Bestimmung der Differenz jedes $n$ten Partialbruches vom Bruche $\frac{A}{B}$, woraus Partialbrüche entstanden sind: daraus erhellet, daß die Differenz jedes Partialbruches von $\frac{A}{B}$ desto kleiner ist, je gröſſer die Quotienten sind, woraus er entstehet, und je mehr er vom ersten Partialbrüche sich entfernet, und daß jeder $n$te Partialbruch gröſſer oder kleiner ist, als $\frac{A}{B}$, nachdem n eine gerade oder ungerade Ordnungszahl ist; auch die Methode,

das

das gröſste gemeinſchaftliche Maaſs zwoer Zahlen zu beſtimmen iſt eine leichte Folge hievon.

59. §. Die um Eins unterſchiedenen Vielfachen zwoer gegebenen unter ſich Primzahlen zu finden.

60. §. Einen Bruch $\frac{A}{B}$ und ſo auch ein Verhältniſs B:A, wenn A, B unter ſich Primzahlen ſind, durch kleinere Zahlen auszudrücken, ohne beträchtliche Aenderung ſeines Werthes.

Der VI. Abſchnitt. Von der Rechnung mit Wurzelgröſſen.

61. §. Vorläufige Begriffe von Wurzelgröſſen, ihren Coefficienten, gleichartigen Wurzelgröſſen, und Rationalgröſſen.

62. §. 1—3. Zuſatz. Den Coefficienten unter das Wurzelzeichen zu bringen, oder einen Factor der Gröſſe unter dem Wurzelzeichen vor daſſelbe zu bringen, wodurch zuweilen gleichartige Wurzelgröſſen aus ungleichartigen erhalten werden.

63. §. 1 u. 2. Zuſatz. Jede nte Potenz einer Wurzelgröſſe zu finden.

64. §. 1 u. 2. Zuſatz. Jede nte Wurzel von einer Wurzelgröſſe zu beſtimmen.

65. §. Eine gegebene Wurzelgröſſe mit einer andern Gröſſe ohne Aenderung ihres Werthes zu multipliciren.

66. §. Zuſatz. Wurzelgröſſen mit verſchiedenen Exponenten unter einerley Exponenten zu bringen.

67—69. §. Die Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion mit Wurzelgröſſen zu verrichten.

70. §. 1 — 5. Zusatz. Alle gerade Potenzen einer Zahl sind bejaht, die ungeraden Potenzen aber sind bejaht oder verneint, nachdem dieselbe Zahl bejaht oder verneint ist; daher nehmen unmögliche Grösse ihren Ursprung.

71. §. Vier Rechnungsarten mit unmöglichen Grössen.

72. §. Wenn das Quadrat einer unmöglichen Grösse eine mögliche Grösse ist; so müssen auch alle gerade Potenzen davon mögliche, und alle ungerade unmögliche Grössen seyn.

73. §. Wenn ein Bruch keiner ganzen Zahl gleich ist; so kann auch keine Potenz davon einer ganzen Zahl gleich seyn; mithin wenn eine Wurzel von einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie auch kein Bruch.

74. §. Erklärung der Irrationalzahlen, welche man von unmöglichen wohl unterscheiden muß.

75. §. Wenn das Quadrat einer Irrationalzahl rational ist; so ist jede gerade Potenz davon rational, und jede ungerade irrational.

Der VII. Abschnitt. Von der Erfindung des binomischen Lehrsatzes und seinem Gebrauche.

76. §. 1 — 12. Zusatz. Vier erste Potenzen von $a+b$; deutliche Darstellung des Gesetzes, welchem ihre Glieder unterworfen sind; läßt man es für jede ganze und gebrochene, bejahte und verneinte Zahl m gelten, so erhält man $(a+b)^m$ durch eine Reihe, welche für eine ganze bejahte Zahl m abbrechen, und für jede andere ohne Ende fortlaufen muß; Abkürzungen dieser Formul; Ausdrückungen von $a^{2r} - b^{2r}$ und $a^{2r+1} \pm b^{2r+1}$ durch einen vieltheilichten und einen zweytheilichten Factor.

77. 78. §.

77. 78. §. Wirkliche Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf einzelne Binomien.

79. §. Anwendung auf die Erfindung der Formuln, welche dienen mögen, die Irrationalwurzeln einer Zahl durch eine schnelle Näherung zu bestimmen.

80. §. 1—3. Zusatz. Das Polynomium zu finden, womit eine zweytheilichte Wurzelgrösse von der Form $\sqrt[n]{A} \pm \sqrt[m]{B}$ multiplicirt ein rationales Binomium zum Product giebt.

Der VIII. Abschnitt. Allgemeiner Beweis des binomischen Lehrsatzes, und Anwendung derselben Beweisart auf die Erfindung der unbestimmten Potenz jeder ohne Ende fortlaufenden Function $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+----$,

81. §. 1. u. 2. Zusatz. Wenn man mit y.E bezeichnet, was eine Function $y=\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+----$ geben würde, wenn man alle ihre Glieder mit den ihnen zugehörigen Exponenten 0, m, n, p --- von x multiplicirte; so wird allemal seyn $y^2.E=2y.Ey$: hieraus folgt aber für zwo dergleichen Functionen Z, X von x, es sey allemal $XZ.E=Z.EX+X.EZ$.

82. §. Und wenn nun $Z=1+\alpha x+\beta x^2+---$, m aber was immer für eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl ist; so hat man allemal $Z^m.E=mZ.EZ^{m-1}$.

83. §. Wenn eine Function $A+Bx+Cx^2+---$ für jeden Werth von x gleich Null seyn soll; so müssen alle Coefficienten gleich Null seyn.

84. §. Für $y=1+x$ erhält man $\frac{my.EZ}{x}=\frac{Z.Ey}{x}$, aus welcher

welcher Gleichung sich die Coefficienten der Reihe $(1+x)^m = A+Bx+Cx^2+\text{---}=Z$ bestimmen lassen.

85. §. Für $y=1+\alpha x+\beta x^2+\text{----}$ findet man aus derselben Gleichung auch y^m durch eine Reihe Z.

Der IX. Abschnitt. Von den quadratischen Gleichungen und unbestimmten Aufgaben.

86. §. Alle Wurzelgrössen, welche eine Gleichung enthalten mag, können aus ihr weggeschaft werden.

87. 88. §. Erklärung quadratischer Gleichungen, und Auflösung der bestimmten quadratischen Aufgaben.

89. §. Begriffe von unbestimmten Aufgaben.

90. §. Auflösung der Gleichungen $y=A\pm Bx$, $y=\frac{A}{C}\pm Bx$, $y=\frac{Bx}{A}$, $y=\frac{Bx\pm C}{A}$ durch ganze und bejahte Zahlen y, x, wenn solche A, B, C bedeuten.

Der X. Abschnitt. Von den allgemeinsten Eigenschaften höherer Gleichungen, und den vorzüglichsten Veränderungen, welche sich damit machen lassen.

91—93. §. Rationale und irrationale Gleichungen; verschiedene Ordnungen rationaler Gleichungen; die Art ihre Glieder zu ordnen, und die fehlenden zu bezeichnen; zu jeder Gleichung werden um Eins mehr Glieder gerechnet, als der Exponent der Ordnung Einheiten hat.

94. §. 1—3. Zusatz. Erklärung der Wurzeln einer Gleichung; für jede Gleichung giebt es gewiß eine Wurzel; bey der quadratischen sind allemal zwo Wurzeln vorhanden, beyde mögliche, oder beyde unmögliche Gröffen.

95. §.

95. §. 1—9. Zusatz. Gesetz, welchem der Quotient $\frac{Z}{x-\alpha}$ unterworfen ist, wenn $Z = x^m + Ax^{m-1} + \cdots + U$ ist: für jede Gleichung $Z = 0$ von der Ordnung m giebt es gewiß m Factoren von der Form $x - \alpha$, eben so viele Wurzelgleichungen $x - \alpha = 0$, und eben so viele Wurzeln $= \alpha$, welches doch nichts anders sagen will, als daß es m Gröſſen $\alpha, a, b, c \cdots$ giebt, worunter jede, welche man will, für eine Wurzel von $Z = 0$ genommen werden kann.

96. §. 1—3. Zusatz. Eine Gleichung kann weder mehr noch weniger Wurzeln haben, als der Exponent ihrer Ordnung Einheiten hat; werden zwo Gleichungen, eine von der Ordnung m und eine andere von der Ordnung n in einander multiplicirt; so entstehet eine Gleichung von der Ordnung $m+n$, welche alle Wurzeln jener Gleichungen zu ihren eignen Wurzeln hat.

97. 98. §. 1—4. Zusatz. Gesetz für die Coefficienten der Glieder einer Gleichung in Beziehung auf ihre Wurzeln: Beschaffenheit der Wurzeln, wenn das zweyte Glied einer Gleichung bejaht oder verneint seyn, oder wegfallen soll: ob aber das letzte Glied einer Gleichung bejaht oder verneint seyn soll, dieses hängt von dem Exponenten der Ordnung, zu welcher die Gleichung gehört, und von der Anzahl ihrer bejahten und verneinten Wurzeln ab.

99. §. 1—3. Zusatz. Die Wurzeln einer Gleichung um eine gegebene Zahl zu vermehren oder zu vermindern; wodurch bejahte Wurzeln in verneinte, und verneinte in bejahte verwandelt werden können, und die Gleichung um einen Grad niedriger werden kann.

100. §. 1. u. 2. Zusatz. Die Wurzeln einer Gleichung mit einer Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, wodurch gebrochene Coefficienten in ganze, und bisweilen irrationale in rationale verwandelt werden.

101. §. Eine Gleichung, wo einige Glieder fehlen, in eine andere zu verwandeln, welche alle Glieder haben soll.

102. §. Aus einer Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen.

Der XI. Abschnitt. Von den Gränzen der Wurzeln einer Gleichung überhaupt.

103 — 106. §. Sätze die Gränzen betreffend, welchen ohne Ende ab- oder zunehmende Gröſſen sich nähern können.

107 — 109. §. Was heißt, α liege zwischen a und b? Was versteht man durch die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung? Was ist ein Gröſstes oder Kleinstes einer Function von x?

110. §. Zusatz. Bestimmung der Werthe, welche eine Function $Z = x^m + Ax^{m-1} + \cdots + U$ für $x = a + \omega$ und $x = a - \omega$ erlangt, und was hieraus folgt, wenn dieselbe Function für $x = a$ am gröſsten oder kleinsten wird.

111. §. 1. u. 2. Zusatz. Wenn Z bey $Z = 0$ bejaht für $x = \alpha$ und verneint für $x = \beta$ ist; so muß wenigstens eine Wurzel zwischen α und β liegen: sind daher α, β mögliche Zahlen; so giebt es für die Gleichung wenigstens eine mögliche Wurzel: sind a, b zwo mögliche Wurzeln einer Gleichung $Z = 0$, wozwischen keine andere Wurzel liegen soll; so muß Z für beyde Werthe a, b von x bejaht oder für beyde verneint werden.

112. §. 1 — 3. Zusatz. Wenn zwischen zwoen möglichen Zahlen α, β mehrere Wurzeln einer Gleichung $Z = 0$ liegen; so

ist

ist die Anzahl dieser Wurzeln gerad oder ungerad, nachdem Z für beyde Werthe α, β von x bejaht oder verneint, oder aber für einen von ihnen bejaht und für den andern verneint wird: mithin ist die Anzahl aller möglichen Wurzeln einer Gleichung allemal gerad oder ungerad, nachdem der Exponent ihrer Ordnung eine gerade oder ungerade Zahl ist.

113. §. 1—10. Zusatz. Wenn man die Glieder einer Gleichung $Z=0$ mit den ihnen zugehörigen Exponenten von x multiplicirt; so erhält man eine um einen Grad niedrigere Gleichung $L=\delta$, welche die erste Exponentialgleichung heißen kann: die Wurzeln von $L=0$ sind diejenigen Werthe von x, wofür Z am größten oder kleinsten wird: sind daher alle Wurzeln von $Z=\delta$ möglich; so sind es auch alle von $L=0$: hat aber $Z=\delta$ von der Ordnung m nur n mögliche Wurzeln; so hat ihrer $n-1$ die Gleichung $L=\delta$: und wenn r gleiche Wurzeln unter n möglichen von $Z=\delta$ sich befinden; so folgen daraus nur $n-r$ mögliche Wurzeln für $L=\delta$: die Wurzeln der Hauptgleichung kann man als Gränzen der Wurzeln ihrer Exponentialgleichung, und umgekehrt, betrachten: mithin, wenn alle Wurzeln der Hauptgleichung möglich sind, hat sie wenigstens so viel bejahte Wurzeln, als ihre Exponentialgleichung: und die Hauptgleichung hat allemal unmögliche Wurzeln, wenn es dergleichen für ihre Exponentialgleichung giebt: so wie man aber die erste Exponentialgleichung $L=0$ aus der Hauptgleichung $Z=0$ erhalten hat, eben so kann man aus jener die zweyte, aus dieser die dritte, aus dieser die vierte u. s. f. Exponentialgleichung erhalten: jede rte Exponentialgleichung wird um einen Grad niedriger seyn, als

die

die nächst vorhergehende $(r-1)^{te}$, und für jene wird in Ansehung dieser alles gelten, was für die erste in Ansehung der Hauptgleichung gelten soll; sind daher alle Wurzeln einer Hauptgleichung möglich, so müssen auch alle Wurzeln aller Exponentialgleichungen möglich seyn.

Der XII. Abschnitt. Von der Zahl und den Kennzeichen der bejahten und verneinten, möglichen und unmöglichen, rationalen und irrationalen und gleichen Wurzeln einer höheren Gleichung.

114. §. Wenn eine Gleichung von der Ordnung m eine Anzahl n von gleichen Wurzeln hat; so gehören $n-1$ solche Wurzeln zu ihrer ersten Exponentialgleichung.

115. §. 1. u. 2. Zusatz. Eine rationale Gleichung hat keine unmögliche Wurzeln, oder die Anzahl ihrer unmöglichen Wurzeln ist gerad: Gleichungen von einer geraden Ordnung können lauter unmögliche Wurzeln haben; eine Gleichung aber von einer ungeraden Ordnung muß wenigstens eine mögliche Wurzel haben: es hat aber jede Hauptgleichung so viel Paare unmöglicher Wurzeln, wie viel ihrer ihre erste Exponentialgleichung hat.

116. §. Zusatz. Wenn eine Gleichung, deren Coefficienten, alle rational sind, eine irrationale Wurzel von der Form $p+q\sqrt{r}$ oder eine unmögliche von der Form $p+q\sqrt{-a}$ hat; so muß sie noch eine irrationale Wurzel von der Form $p-q\sqrt{r}$ oder unmögliche $p-q\sqrt{-a}$ haben.

117. §. Wenn alle Wurzeln einer Gleichung von der Ordnung m möglich und gleich sind; so ist das Quadrat jedes r^{ten} Coefficienten grösser als das Product aus den nächst anliegenden

genden Coefficienten: wenn man aber jenes Quadrat mit $\frac{(m-r)r}{(m-r+1)(r+1)}$ multiplicirt; so ist das Product dem Producte aus den nächst anliegenden Coefficienten gleich.

118 — 120. §. 1. — 7. Zusatz. Bey jeder Gleichung, deren alle Wurzeln möglich sind, müssen so viele Abwechslungen der Zeichen, als bejahte Wurzeln, und so viele Folgen, als verneinte Wurzeln vorkommen: multiplicirt man $Z=0$ mit $x+\alpha$ oder $x-\beta$, und findet man, daß bey $Z(x+\alpha)$ nicht so viele Abwechslungen, oder bey $Z(x-\beta)$ nicht so viele Folgen der Zeichen vorkommen, als bey Z; so wird $Z=0$ gewiß einige unmögliche Wurzeln haben.

121. §. Der erste Theil des Satzes (117. §.) wird auf alle rationalen Gleichungen ausgedehnt.

Der XIII. Abschnitt. Von der Auflösung höherer Gleichungen überhaupt.

122. §. Zu untersuchen, ob nicht eine vorgelegte rationale Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

123. §. 1—3. Zusatz. Die gleichen Wurzeln, welche vielleicht eine Gleichung hat, zu finden.

124. §. 1. u. 2. Zusatz. Zu untersuchen, ob es nicht für eine vorgelegte Gleichung eine rationale ganze Wurzel giebt.

125. §. Verwandlung einer Gleichung in eine andere, wo das letzte Glied aus wenigeren Factoren bestehen mag.

126. §. 1. u. 2. Zusatz. Die Gränzen anzugeben, wozwischen die möglichen Wurzeln, welche eine gegebene Gleichung haben mag, liegen, und dadurch dieselben Wurzeln entweder genau, oder durch Näherung zu bestimmen.

127. §. Formuln zur Bestimmung irrationaler Wurzeln einer Gleichung durch eine schnellere Näherung.

128. §. Wie soll man zu Werke gehen, um die möglichen Wurzeln einer vorgelegten Gleichung zu bestimmen?

Der XIV. Abschnitt. Von den Reihen überhaupt, und der Verwandlung gebrochener Functionen in Reihen.

129. 130. §. Begriffe von Reihen, ihren allgemeinen und summatorischen Gliedern, und Ergänzungen ihrer Summen.

131. §. Die Art eine gebrochene Function in eine Reihe aufzulösen.

132. 133. §. Begriffe von steigenden und fallenden, convergirenden und divergirenden Reihen: bey wirklicher Anwendung der Reihen muß man dafür sorgen, daß sie sich so schnell, als möglich, nähern mögen: Beyspiele, welche zeigen sollen, daß dieses oft in unserer Gewalt stehet, worunter die Formuln zur Bestimmung irrationaler Wurzeln gegebener Zahlen vorkommen.

Der XV. Abschnitt. Von der Berechnung der Logarithmen.

134. §. 1—5. Zusatz. Erklärung der Logarithmen, logarithmischen Systeme, und ihrer Grundzahlen: in verschiedenen Systemen hängen verschiedene Logarithmen mit einerley Zahlen, und umgekehrt, zusammen: in einem Systeme aber hängen gleiche Logarithmen allemal mit gleichen Zahlen, und ungleiche mit ungleichen, gröſſere mit gröſſeren und kleinere mit kleineren zusammen: in jedem Systeme ist der Loga-

rithme von 1 gleich Null, und $=1$ der Logarithme der Grundzahl: werden in einem Systeme die Logarithmen ganzer Zahlen und unächter Brüche für bejaht angenommen; so stehen ächte Brüche mit verneinten Logarithmen in Verbindung.

135. 136. §. Der Logarithme eines Products aus zween Zahlen ist durch die Logarithmen dieser Zahlen, und der Logarithme eines Quotienten ist durch die Logarithmen des Divisors und Dividendus, der Logarithme aber einer jeden ganzen und gebrochenen Potenz von einer Zahl ist durch den Logarithmen dieser Zahl bestimmt.

137. §. Reihen für $\log(1+x)$, $\log(1-x)$, $\log\frac{1+x}{1-x}$, $1+x$ und für die Grundzahl und den Modul des Systems.

138. §. 1—5. Zusatz. Berechnung des Moduls für gemeine und der Grundzahl für natürliche Logarithmen: Vergleichung der Logarithmen einer Zahl in verschiedenen Systemen, nebst Zahlen, welche zur Verwandlung der gemeinen Logarithmen in natürliche, und dieser in jene dienen.

139. §. 1. u. 2. Zusatz. Berechnung der natürlichen Logarithmen für die zehn ersten Zahlen 1, 2 — 10, und eine sehr schnell abnehmende Reihe zur Berechnung der Logarithmen für alle Primzahlen.

Der XVI. Abschnitt. Das Merkwürdigste von der Summirung der Reihen.

140. §. Zusatz. Wenn Z das allgemeine Glied einer Reihe ist; so bezeichnet man ihr summatorisches Glied mit ΣZ: ist nun $Z=A+B+C+D+\ldots$, und A, B, C, D ebenfalls

Functionen des Indicis n; so muß auch $SZ = SA + SB + SC + \text{---}$ seyn.

141. §. 1. u. 2. Zusatz. Ausdruck für das summatorische Glied Sn^m einer Potenzenreihe, wenn der Exponent m der Potenz, auf welche der Index n erhoben wird, eine ganze bejahte Zahl ist, nebst Anwendung auf die Summirung der Reihen natürlicher Zahlen, ihrer zweyten, dritten, vierten Potenzen, u. s. f.

142. §. Summatorische Glieder derjenigen Reihen, deren allgemeine Glieder unter die Form $A + Bn + Cn^2 + \text{---} + Pn^m$ gehören.

143. §. 1 — 3. Zusatz. Erklärung arithmetischer Reihen von jedem Range; für jede dergleichen Reihe läßt sich nach (142. §.) sowohl das allgemeine als summatorische Glied angeben, welches bey Reihen vom ersten und zweyten Range gezeigt wird.

144. §. Zwanzig Formuln zur Auflösung eben so vieler Aufgaben bey einer arithmetischen Progression.

145. §. 1 — 9. Zusatz. Allgemeine Darstellung figurirter Reihen: welche ist die Reihe der Polygonalzahlen, und wann enthält sie die Triangular-Tetragonal-Pentagonal-Hexagonal-Zahlen u. s. f.? Die daraus entstandenen Reihen enthalten Pyramidalzahlen von allen Ordnungen, nämlich dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Pyramidalzahlen, u. s. f. das allgemeine und summatorische Glied jeder Reihe von Polygonalzahlen; und wenn sie nicht als eine figurirte Reihe, sondern als eine von der Einheit anfangende arithmetische Reihe betrachtet wird: wie werden die allgemeinen und summatorischen Glieder der figurirten Reihen von Pyramidal-

midalzahlen erhalten? Uebergang zu figurirten Zahlen, wie sie am gewöhnlichsten sind: allgemeine Untersuchung über die allgemeinen und summatorischen Glieder dieser figurirten Reihen; auch wenn man sie von 1 anfangen läßt.

146. §. Von Reihen, deren summatorische Glieder unter die nachstehende Form gehören.

$$\frac{Ln+Mn^2+Nn^3+\text{----------}+Rn^m}{(A+B(n+m+1))(A+B(n+m+2))\text{---}(A+B(n-1))(A+Bn)}$$

147. §. Von Reihen, deren summatorische Glieder unter die folgende Form gehören.

$$L-\frac{L}{(A+B+C+\text{---})(A+2B+4C+\text{---})\text{--}(A+nB+n^2C+\text{----})}$$

148. §. Erklärung geometrischer, zusammengesetzter, und vermischter Reihen.

149. §. Von Reihen, deren summatorische Glieder unter die Form $(A+Bn+Cn^2+\text{---}+Rn^m)K^n-A$ gehören.

150. §. Aus einigen ersten Gliedern einer geometrischen Reihe das allgemeine und summatorische Glied zu bestimmen.

151. §. Zwanzig Formeln zur Auflösung so vieler Aufgaben bey einer geometrischen Progression.

152. §. Das allgemeine und summatorische Glied für eine vorgelegte zusammengesetzte Reihe zu bestimmen.

153. §. Eine vorgelegte vermischte Reihe zu summiren.

Der XVII. Abschnitt. Anwendung der Analysis auf die ebene Trigonometrie.

154. §. Die hier angeführte Grundlehre setzt die Elementar-Begriffe von trigonometrischen Linien voraus. Vierzehn

Elementar-Formuln für einzeln genommene trigonometrische Linien eines Kreisbogens A sowohl für den Halbmesser $=r$, als $=1$. Ist eine Function gegeben, welche durch trigonometrische Linien des natürlichen Systems bestimmt ist; so kann man ihren Werth leicht für jedes künstliche System bestimmen, und aus dieser Ursache begnügt man sich allemal mit solchen Formuln, die sich auf das natürliche System beziehen. Begriffe von bejahten und verneinten trigonometrischen Linien werden festgesetzt, hierauf diejenigen Linien bestimmt, welche mit den Kreisbogen zusammenhängen, die zu den Reihen gehören, wovon $2k\pi \pm A$; $(2k-1)\pi \pm A$; allgemeine Glieder sind. Ausser diesen sind noch die Kreisbogen 0π, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π am merkwürdigsten, welchen vollkommen bestimmte trigonometrische Linien zugehören sollen. Bejahte und verneinte Bogen, welchen einerley trigonometrische Linien zugehören.

165. §. 1. — 10. Zusatz. Die Seiten eines Dreyecks verhalten sich gegen einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel. Formuln zur Auflösung eines rechtwinklichten Dreyecks. Formuln um aus zwoen Seiten eines Dreyecks, und dem eingeschlossenen Winkel entweder die dritte Seite, oder einen von den übrigen Winkeln unmittelbar zu bestimmen. Formuln um aus drey Seiten jeden Winkel, oder die Höhe des Dreyecks für jede zur Grundlinie angenommene Seite, oder den Flächeninhalt unmittelbar zu bestimmen, den man auch aus zwoen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel erhält. Formul um aus dem Flächeninhalte und zwoen Seiten eines Dreyecks den eingeschlossenen Winkel zu finden. Die grösste Seite eines

Dreyecks

Dreyecks verhält sich zur Summe der zwey übrigen Seiten, wie die Differenz dieser Seiten zur Differenz der Stücke, in welche die gröſste Seite durch das Loth aus dem gegenüberstehenden Winkel gefällt wird.

156. §. 1—7. Zusatz. Vier Formuln für den Sinus und Cosinus der Summe und des Unterschiedes zweener Winkel. Vier und zwanzig Formuln für die Summen und Unterschiede der Sinus und Cosinus der Summen und Unterschiede zweener Winkel; für dergleichen Summen und Unterschiede durch einander dividirt; für die Summen und Unterschiede der Tangenten und Cotangenten zweener Winkel; für dieselben durch einander dividirt; für die Tangente und Cotangente der Summe und des Unterschiedes zweener Winkel; für die Summe und Differenz der Tangenten eines Winkels A und des Unterschiedes A—B zweener Winkel; für die Producte aus den Sinussen und Cosinussen der Summen und Unterschiede zweener Winkel. Neun Formuln für den Sinus und Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Winkels 45° ± B. Sechs Formuln für die Sinus und Cosinus der Winkel 30° ± B; 60° ± B. Vier und zwanzig Formuln für die Vergleichung der trigonometrischen Linien der einfachen und doppelten Winkel. Funfzehn Formuln für die Summen und Unterschiede der Sinus und Cosinus zweener Winkel; für dieselben durch einander dividirt; für die Summe und Differenz der Tangenten der Hälften der Summe und der Differenz zweener Winkel. Sechszehn Formuln für die Bestimmung des Sinus und Cosinus des halben Winkels durch den Cosinus des ganzen, des Sinus des ganzen durch den Sinus und Cosinus des

halben; für die Tangente des halben Winkels durch den Cosinus allein, oder durch ihn und den Sinus des ganzen; für die Cosecante des ganzen Winkels durch die Cotangente des ganzen und halben Winkels; für die Cosecante von $90° - A$; für den Sinus, Cosinus, und die Tangente des Winkels $45° - \frac{1}{2}A$; für die Summe und Differenz der Tangente und Cotangente eines halben Winkels.

157. §. Reihen für den Sinus und Cosinus des vielfachen Bogens durch den Sinus und Cosinus des einfachen.

158. §. 1. u. 2. Zusatz. Reihen für den Sinus und Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Bogens durch den Bogen selbst.

159. §. 1 — 3. Zusatz. Einrichtung der Reihen zur schnellen Berechnung des Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten gegebener Winkel $\frac{m}{n} 90°$.

160. §. 1 — 3. Zusatz. Zerfällung der Reihen für den Sinus und Cosinus in Factoren; dergleichen können nun auch für die Tangente und Cotangente eines Winkels angegeben werden; und darauf gründen sich die Formuln zur schnellsten Berechnung der natürlichen Logarithmen der halben Kreislinie, und der natürlichen und gemeinen Logarithmen der Sinus und Cosinus, wie sie hier wirklich angeführt werden.

Der XVIII. Abschnitt. Von der Zerlegung gebrochener Functionen.

161. §. Erklärung ganzer und rationaler Functionen von x, ihrer verschiedenen Ordnungen, wie auch ihrer einfachen und zusammengesetzten Factoren.

162. §. 1—5. Zusatz. Für jede solche Function von der Ordnung m giebt es m einfache Factoren von der Form $p-qx$; sie können alle mögliche Grössen seyn, es können aber darunter auch unmögliche Factoren, doch allemal paarweise vorkommen, und dann entstehet aus jedem Paar unmöglicher Factoren ein dreytheilichter Factor, welcher durch eine bestimmte Form angegeben wird.

163. 164. §. Gebrochene rationale Functionen werden in ächte und unächte eingetheilt; jede unächte kann in eine ganze und eine gebrochene ächte zerlegt werden.

165. §. Eine ächte gebrochene Function von x, deren Nenner aus lauter ungleichen einfachen Factoren bestehet, in so viele Brüche zu zerlegen, als solche Factoren im Nenner stecken, so, daß jeder Bruch einen von diesen Factoren zum Nenner bekomme, und die Summe aller Brüche der gegebenen gebrochenen Function gleich sey.

166. §. Eine solche Zerlegung für den Fall zu verrichten, wenn der Nenner einige gleiche Factoren hat.

167. §. Und wenn alle einfache Factoren des Nenners einander gleich sind.

Inhalt des zweyten Bandes.

Erstes Hauptstück.

Anfangsgründe der Differential-Rechnung.

Der I. Abschnitt. Grundlehre der Differential-Rechnung.

1. 2. §. Vorläufige Begriffe von beständigen und veränderlichen Grössen, und ihren Functionen.

3. §. Von ersten Differenzen veränderlicher Grössen und ihrer Functionen.

4. 5. §. Von Verschwindungs-Quotienten, und ihren allgemeinsten Eigenschaften.

6. §. Allgemeine Ausdrücke für Functionen, ihre Differenzen und Verschwindungs-Quotienten, nebst Grundsätzen, worauf alle Untersuchungen, die sich damit anstellen lassen, beruhen.

Der II. Abschnitt. Von Verschwindungs-Quotienten, welche algebraischen Functionen zugehören. Von der Umkehrung der Functionen, und verschiedenen Ordnungen der Verschwindungs-Quotienten.

7—9. §. Bestimmung der Verschwindungs-Quotienten für einfache Potenzen von einer absoluten veränderlichen Grösse, und jeder Function von ihr; ferner für solche Functionen, welche entweder Producte aus mehreren Functionen, oder gebrochenen Functionen sind.

10. 11. §. Umkehrung der Functionen, und der ihnen zugehörigen Verschwindungs-Quotienten.

12 — 15. §. Von verschiedenen Ordnungen der Differenzen und Verschwindungs-Quotienten, nebst ihren vorzüglichsten und allgemeinsten Eigenschaften.

Der III. Abschnitt. Von Verschwindungs-Quotienten, welche logarithmischen und trigonometrischen Functionen, wie auch den Exponentialgrössen zugehören.

16. §. Allgemeine Eigenschaften logarithmischer Systeme, ihrer Grundzahlen und Moduln.

17. §. Bestimmung der Verschwindungs-Quotienten für einfache und wie immer zusammengesetzte logarithmische Functionen, und die damit verbundenen Exponentialgrössen, nebst einigen Anwendungen.

18 — 20. §. Aus der Archimedeischen Exhaustions-Methode entlehnter Satz, welcher zur Bestimmung der Verschwindungs-Quotienten für unbekannte Functionen dienen soll.

21 — 23. §. Bestimmung der Verschwindungs-Quotienten für trigonometrische, und die aus trigonometrischen, logarithmischen, und algebraischen Functionen wie immer zusammengesetzten Functionen, nebst einigen Anwendungen.

Zweytes Hauptstück.

Anfangsgründe der Integral-Rechnung.

Der I. Abschnitt. Grundlehre der Integral-Rechnung.

24 — 26. §. Vorläufige Begriffe; Integrirung von $z^m dz$, es mag z eine absolute veränderliche Grösse, oder eine Function

ellen davon sind Einleitung zur Integrirung durch Reihen, wobey, als Beyspiele, die Reihen für $\int dx \sqrt{(\beta x^m + \gamma x^n)}$, und $\int \frac{dx}{\sqrt{(\beta x^m + \gamma x^n)}}$ beygebracht werden.

27. §. Vom logarithmischen Integral $\int \frac{dz}{z}$, und damit verbundenen Satze, es sey $\frac{AZ^0}{0} = A \log. Z.$

28 — 32. §. Bestimmung der Constante aus dem veränderlichen Theile eines Integrals, nebst Erläuterungen durch zweckmäßige Beyspiele.

33. §. Zwo Reihen zur Bestimmung des Integrals $\int x^m dx (a + bx^n)^p$ für die Fälle, wenn entweder $\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte, oder $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze verneinte Zahl ist; nebst Anwendung auf solche Verschwindungs-Quotienten, wobey beyde Glieder des zwischen den Klammern befindlichen Binomiums die veränderliche Gröſſe enthalten.

Der II. Abschnitt. Von den merkwürdigsten Verschwindungs-Quotienten, deren Integrirung von Logarithmen und Kreisbogen abhängt.

34. §. Integralien für $\frac{adx}{b-cx^2}$; $\frac{adx}{cx^2-b}$; $\frac{adx}{\sqrt{(cx^2 \pm b)}}$; $\frac{\pm adx}{b+cx^2}$; $\frac{\pm adx}{\sqrt{(b-cx^2)}}$.

35 — 38. §. Integralien für $x^m dx (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{\mu}{2}}$, wobey m, μ was immer für bejahte oder verneinte ganze Zahlen bedeuten können, nebst der damit verbundenen Integrirung

von

von $x^{\nu}dx(\alpha+\beta x^{n}+\gamma x^{2n})^{\frac{\mu}{2}}$ für jede bejahte und verneinte ganze Zahl $\frac{\nu+1}{n}$.

39 — 41. §. Integralien $\int x^{m}dx(\alpha+\gamma x^{2})^{\frac{\mu}{2}}$; $\int x^{\frac{m}{2}}dx(\alpha+\beta x)^{\frac{\mu}{2}}$ für alle bejahte und verneinte ganze Zahlen m, μ.

Der III. Abschnitt. Anwendungen der bisherigen Theorie auf die Integrirung mehr zusammengesetzter Verschwindungs-Quotienten, nebst weiterer Ausführung des Integrals $\int x^{m}dx(a+bx^{n})^{p}$, und Integrirung sowohl logarithmischer als trigonometrischer Verschwindungs-Quotienten.

42. 43. §. Möglichkeit der Zerfällung jeder Function $\alpha+\beta x+\gamma x^{2}+\delta x^{3}+\cdots$ in dreytheilichte Factoren, und wirkliche Zerfällung der Function $a^{n}\pm x^{n}$.

44. 45. §. Gebrochene Verschwindungs-Quotienten, die sich unmittelbar nach der vorhergehenden Theorie integriren lassen: Möglichkeit der Integrirung eines jeden rationalen gebrochenen Verschwindungs-Quotienten $\frac{Mdx}{N}$, und die Art sie zu bewerkstelligen.

46 — 49. §. Unter welchen Umständen, und auf welche Art läßt sich $x^{m}dx(a+bx^{n})^{p}$ integriren.

50 — 54. §. Betrachtung einiger merkwürdigsten zusammengesetzten irrationalen Verschwindungs-Quotienten, nebst der Art, sie unter rationale Ausdrücke zu bringen.

55. §. Zwo Reihen, welche das Integral $\int ZYdx$ für alle Functionen Z, Y von x ausdrücken, nebst Anwendung auf die merkwürdigsten logarithmischen Verschwindungs-Quotienten.

56. §.

56. §. Integrirung der Verschwindungs-Quotienten Xdx Arc Sin x; Xdx Arc Cos x; Xdx Arc Tang x.

57. §. Integrirung derjenigen Verschwindungs-Quotienten, welche durch $d\varphi$ und Potenzen von Sin φ, Cos φ, Tang φ, Cot φ bestimmt seyn mögen; nebst Anwendung auf $d\varphi \text{Sin}\varphi^n \text{Cos}\varphi^m$ für alle bejahte und verneinte ganze Zahlen n, m.

58. §. Integrirung der Verschwindungs-Quotienten $\frac{d\varphi \text{Sin}\varphi^m}{(a+b\text{Cos}\varphi)^n}$; $\frac{d\varphi \text{Cos}\varphi^p}{(a+b\text{Cos}\varphi)^q}$ für alle bejahte und verneinte ganze Zahlen m, n, p, q.

Der IV. Abschnitt. Von Verschwindungs-Quotienten, welche Functionen von zwoen veränderlichen Grössen zugehören sollen; von den damit zusammenhängenden Integralien; nebst Integrirung der Verschwindungs-Quotienten von verschiedenen Ordnungen.

59. 60. §. Vorläufige Begriffe, und Eigenschaften der Verschwindungs-Quotienten, welche Functionen von zwoen veränderlichen Grössen u, v zugehören; wirkliche Integrirung von $Mdu+Ndv$, wenn $\frac{dM^v}{dv} = \frac{dN^u}{du}$ ist.

61. 62. §. Von Differentialgleichungen, nebst Integrirung gleichartiger Differentialgleichungen.

63. 64. §. Integrirung der Differentialgleichungen, wie $(A+Bu+Cv)du-(D+Eu+Fv)dv=0$, und $dv+Pvdu+Qdu=0$, wenn P, Q was immer für Functionen von u sind.

65. §. Integrirung höherer Verschwindungs-Quotienten.

66. §.

66. §. Man ſucht y eine Function von x, wenn Δy als eine Function von z betrachtet, und dafür der Verſchwindungs-Quotient d.Δy gegeben wird.

Drittes Hauptſtück.

Verſchiedene Anwendungen der Differential-Rechnung.

Der I. Abſchnitt. Anwendung der Differential-Rechnung auf die Erfindung der Werthe, welche gegebene Functionen alsdann erlangen, wenn die darinn vorhandene veränderliche Gröſſe um eine gegebene Gröſſe zu- oder abnimmt.

Der II. Abſchnitt. Anwendung der Differential-Rechnung auf die Summirung der Reihen.

Der III. Abſchnitt. Anwendung der Differential-Rechnung auf die Lehre von Gröſten und Kleinſten.

Der IV. Abſchnitt. Anwendung der Differential-Rechnung auf die Beſtimmung der Werthe, welche gewiſſe Functionen von x für diejenigen Werthe von x haben müſſen, für welche ſie $\frac{0}{0}$ zu geben ſcheinen; nebſt fernerer Anwendung auf die Zerlegung gebrochener Functionen in mehrere Brüche, oder ihre Auflöſung in Reihen.

Der V. Abſchnitt. Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die gebräuchlichſten krummen Linien.

87—94. §. Allgemeinſte Eigenſchaften krummer Linien.

95—98. §. Haupteigenſchaften der Parabel, Ellipſe und Hyperbel.

99—102.

99 — 102. §. Ihre Eigenschaften in Ansehung ihrer Brennpuncte.

103 — 106. §. Dergleichen in Rücksicht auf die Subtangenten, Tangenten, Normallinien, und Subnormallinien.

107 — 111. §. Von Durchmessern der Parabel, Ellipse, und Hyperbel.

112 — 115. §. Von der Rectification Paraboliſcher, Elliptiſcher und Hyperboliſcher Bögen.

116. §. Von der Quadratur der Räume zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten und Paraboliſchen, Elliptiſchen, oder Hyperboliſchen Bögen.

117 — 119. §. Von der Cubatur runder Körper, insbeſondere derjenigen, welche durch Umdrehung Paraboliſcher, Elliptiſcher oder Hyperboliſcher Bögen um ihre Axen, oder die darauf ſenkrecht ſtehenden Tangenten entſtehen.

120. §. Von der Quadratur runder Oberflächen derſelben Körper.

121 — 124. §. Verzeichnung der Parabel, Ellipſe und Hyperbel, nebſt ihrer Erzeugung am Kegel.

125. §. Merkwürdigſte Eigenſchaften der gemeinen Cycloide.

Erſtes

Erstes Hauptstück.

Anfangsgründe der Differential-Rechnung.

Der I. Abschnitt.

Grundlehre der Differential-Rechnung.

1. §. Erklärung.

Eine beständige oder unveränderliche Grösse heißt diejenige, welche ihren bestimmten Werth hat, dergestalt, daß sie weder zunehmen noch abnehmen kann; hingegen wird eine veränderliche Grösse genannt, welche sowohl zunehmen als abnehmen kann: man unterscheidet sie in einer Rechnung allemal dadurch, daß man die unveränderlichen Grössen mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, ---- und die veränderlichen mit den letzten u, v, x, y, z bezeichnet, wofern das Gegentheil nicht ausdrücklich angezeigt wird.

2. §. Erklärung.

Ein algebraischer Ausdruck, worinn veränderliche Grössen mit unveränderlichen (1. §.) durch gewisse arithmetische Arbeiten (als Addition, Subtraction, Multiplication u. d. gl.) verbunden sind, heißt eine Function von den darinn befindlichen veränderlichen Grössen: und die bestimmte arithmetische Verbindung, welche zwischen veränderlichen und unveränderlichen Grössen bey einer Function herrschet, wird die Form derselben Function genannt.

Z. B. Der Ausdruck $y = \sqrt{(ax - x^2)}$ ist eine Function von einer veränderlichen Grösse x, und ihre Form bestimmet die arithmetische Arbeit, welche mit der veränderlichen Grösse x, und einer gewissen unveränderlichen a, vorgenommen werden muß, wenn man den mit einem gewissen Werth von x verbundenen Werth der Function selbst erhalten will: man muß nämlich für jeden Werth von x, diese veränderliche Grösse aufs Quadrat erheben, sie mit der unveränderlichen Grösse a multipliciren, hernach jenes Quadrat von diesem Product abziehen, und aus dem Reste die Quadrat-Wurzel ausziehen.

1. Zusatz.

Für jeden neuen Werth der bey einer Function befindlichen veränderlichen Grösse muß also die Function selbst einen neuen Werth erlangen; diejenigen Aenderungen aber, welchen eine Function wegen gewisser Aenderungen der darinn vorhandenen veränderlichen Grösse unterworfen seyn mag, hängen von ihrer Form dergestalt ab, daß diese

Form

Form die Grundursache aller Eigenschaften ist, welche derselben Function zukommen.

Z. B. Nehme man an, daß bey der Function $y = \sqrt{(ax - x^2)}$ anfangs $x = \frac{1}{m}a$ und $m > 2$, hernach x allmählich grösser wird, bis $x = \frac{1}{2}a$ ist; so wird auch die Function y vom Werthe $\sqrt{\left(\frac{a^2}{m} - \frac{a^2}{m^2}\right)}$ an, den sie für $x = \frac{1}{m}a$ haben muß, allmählich zunehmen, und den Werth $\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{1}{2}a$ für $x = \frac{1}{2}a$ erlangen.

Wächst x von $x = \frac{1}{2}a$ an bis $x = a$ allmählich fort; so wird y von $y = \frac{1}{2}a$ an allmählich abnehmen, bis $y = \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$ für $x = a$ wird. Und wenn x über a fortwächst; so wird $ax < x^2$ seyn, und y für jeden Werth von $x > a$ einen unmöglichen Werth haben (I. B. 70. §. 4. Zus.). Dieses waren die vorzüglichsten Eigenschaften der Function $y = \sqrt{(ax - x^2)}$, welche alle von ihrer Form (Erklär.) dergestalt abhängen, daß sie sich nur aus ihr erklären lassen.

2. Zusatz.

Daher kann und muß jede Function als eine veränderliche Grösse betrachtet werden (1. §.), welche man mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen, und dadurch bisweilen Functionen von Functionen erhalten kann. Z. B. bey

$y=(a-x^2)\sqrt[3]{(a-x^2)^2}$ kann man $a-x^2=z$, folglich $y=z\sqrt[3]{z^2}=z^{\frac{5}{3}}$ setzen, und nun ist y eine Function von z und z eine Function von x.

3. Zusatz.

Jede Function beziehet sich auf eine absolute veränderliche Grösse, welche nämlich für sich betrachtet wird, ohne daß sie eine Function von einer andern veränderlichen Grösse seyn soll. Z. B. bey $y=z\sqrt[3]{z^2}$ kann z als eine für sich veränderliche Grösse betrachtet werden, und dann ist sie eine absolute veränderliche Grösse: es kann aber z eine Function von x seyn, wie $z=a-x^2$ in (2. Zus.); in diesem Fall beziehet sich y auf eine absolute veränderliche Grösse x, wenn sonst x keine Function von einer andern veränderlichen Grösse ist, z aber ist eine bey $y=z\sqrt[3]{z^2}$ von der absoluten veränderlichen Grösse x abhängige veränderliche Grösse, als deren Aenderung von der jedesmaligen Aenderung der Grösse x abhängt, wie sie die Gleichung $z=a-x^2$ angiebt.

3. §. Erklärung.

Die Differenz einer absoluten veränderlichen Grösse (2. §. 3. Zus.) x heißt jedes Stück von x; und die Differenz einer Function wird dasjenige Stück genannt, um welches dieselbe Function sich alsdann ändert, wenn die absolute veränderliche Grösse, auf die sie sich beziehet (a. a. O.), um eine Differenz wächst. Diese Differenzen wird man in der Folge dadurch anzeigen, daß der griechische Buchstabe

Δ vor einer ſolchen veränderlichen Gröſſe oder Function ſtehen wird.

1. Zuſatz.

Iſt demnach x eine abſolute veränderliche Gröſſe; ſo wird Δx in der Folge ihre Differenz, nämlich ein unbeſtimmtes Stück von x, etwa $\Delta x = \frac{1}{2}x$, $\Delta x = \frac{1}{4}x$, oder $\Delta x = \frac{2}{3}x$, oder $\Delta x = \frac{1}{100}x$ u. d. gl. andeuten. Iſt aber y eine Function von irgend einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x; ſo wird Δy dasjenige Stück ſeyn, um welches die Function y ſich alsdann ändert, nämlich zu- oder vielleicht abnimmt, wenn die abſolute veränderliche Gröſſe x, um ihre Differenz Δx wächſt.

2. Zuſatz.

Weil aber jede Abnahme als eine verneinte Zunahme betrachtet werden kann; ſo kann man auch ſagen, daß die Differenz Δy einer Function y von der abſoluten veränderlichen Gröſſe x nichts anders bedeutet, als ein Stück (bejahtes oder verneintes), um welches die Function y zunimmt, wenn die veränderliche Gröſſe x um ihre Differenz Δx wächſt: alſo muß $y+\Delta y$ aus y werden, wenn $x+\Delta x$ aus x wird. Nennt man daher y' denjenigen Werth, welchen eine Function y von x alsdenn erlangen muß, wenn x in $x+\Delta x$ übergehet; ſo iſt $y'=y+\Delta y$, und $\Delta y=y'-y$, dergeſtalt, daß man Δy bejaht oder verneint nehmen muß, nachdem y zu- oder abnimmt, während daß x um Δx wächſt.

5. Zuſatz.

Wäre y eine Function von z, und z eine Function von irgend einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x (2. §. 3. Zuſ.); ſo müßte, wenn x in $x+\Delta x$ übergienge, die Function z in $z+\Delta z$ übergehen (2. Zuſ.), und, indem dieſes geſchähe, müßte auch y um eine Differenz Δy zunehmen, mithin in $y+\Delta y$ übergehen, und dieſes wäre der neue Werth $y'=y+\Delta y$, welcher aus y entſtehet, wenn man x um Δx wachſen läßt, oder $z+\Delta z$ ſtatt z bey y nimmt, wo nun Δz die mit Δx verbundene Differenz der Function z von x bedeutet; alſo wäre auch hier $\Delta y=y'-y$, wie in (2. Zuſ.). Daher mag z eine abſolute veränderliche Gröſſe bedeuten, wie x in (2. Zuſ.), oder eine Function von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x ſeyn; ſo kann man doch annehmen, daß die Differenz einer Function y von z dadurch erhalten wird, wenn man $z+\Delta z$ ſtatt z bey y ſetzt, den neuen Werth merkt, welchen y dafür erlangen mag, und davon die Function y ſelbſt abziehet. War hiebey z eine abſolute veränderliche Gröſſe; ſo wird Δz ihre Differenz ſeyn; war z eine Function von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x; ſo wird Δz die Differenz derſelben Function bedeuten.

Beyſpiele.

I. Sey $y=az$; ſo iſt $y'=a(z+\Delta z)$;
alſo $\Delta y=y'-y=a(z+\Delta z)-az=a\Delta z$.

II. Sey $y=az^2$; ſo iſt $y'=a(z+\Delta z)^2$;
alſo $\Delta y=y'-y=a(z+\Delta z)^2-az^2=2az\Delta z+a\Delta z^2$,

III. Sey

III. Sey $y = a + bz - cz^3$;

so ist $y' = a + b(z+\Delta z) - c(z+\Delta z)^3$;

also $\Delta y = y' - y = b\Delta z - 3cz^2\Delta z - 3cz\Delta z^2 - c\Delta z^3$.

4. Zusatz.

Weil y' aus y entstehet, wenn $x+\Delta x$ aus der absoluten veränderlichen Grösse x wird; so muß nothwendig y ungeändert bleiben, mithin $y' = y$, und $\Delta y = 0$ seyn (2. 3. Zus.), wenn x um nichts wächst, und dieses geschieht, wenn man $x+0$ statt x bey y setzt; die Differenz Δy einer Function y von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse x wird also allemal gleich Null seyn müssen, wenn man bey ihr die Differenz Δx der absoluten veränderlichen Grösse gleich Null setzt.

5. Zusatz.

Wenn Y, Z zwo einander gleiche Functionen von einer absoluten veränderlichen Grösse x sind; so muß $Y = Z$ für jeden Werth von x seyn: wenn also Y', Z' diejenigen Werthe heißen, welche dieselben Functionen alsdann erlangen, wenn x in $x+\Delta x$ übergehet; so muß auch $Y' = Z'$ seyn, mithin auch $Y' - Y = Z' - Z$ oder $\Delta Y = \Delta Z$ (3. Zus.), und zwar allemal, es mag Δx ein wie immer kleines Stück von x bedeuten (1. Zus.), oder auch $\Delta x = 0$ gesetzt werden (4. Zus.).

6. Zusatz.

Sey $y = P + Q + R + \ldots + Z$, wobey $P, Q, R \ldots Z$ was immer für Functionen von einer absoluten veränderlichen Grösse x seyn können: wenn nun x in $x+\Delta x$

übergehet; so entstehen aus P, Q, R - - - Z gewisse neue Werthe P′, Q′, R′ - - - Z′, wofür die Function y einen neuen Werth $y' = P' + Q' + R' + \cdots + Z'$ erlangen mag; folglich ist $y' - y = P' - P + Q' - Q + R' - R + \cdots + Z' - Z$, mithin $\Delta y = \Delta P + \Delta Q + \Delta R + \cdots + \Delta Z$ (3. Zus.).

4. §. Forderung.

Die Differenz Δx einer absoluten veränderlichen Grösse x, soll man in der Folge als ein bis zur Null abnehmendes Stück von x betrachten.

Anmerkung.

Weil nämlich Δx jedes Stück von x bedeuten kann, (2. §. 1. Zus.); so ist nicht nur gestattet die Differenz Δx bey einer vorkommenden Function von ihr, wie $A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + \cdots$ als ein allmählig abnehmendes Stück von x zu betrachten, sondern auch die Art, wie diese Abnahme geschehen soll, ist ganz willkührlich: man wird sich also vorstellen können, daß Δx anfangs ein gewisses Stück $\frac{n}{m}x$ bedeutet, dieses hernach um ein sehr kleines Stück $\frac{1}{m}x$ nach und nach vermindert wird, dergestalt, daß $\Delta x = \frac{n-1}{m}x$ aus $\Delta x = \frac{n}{m}x$, sodann $\Delta x = \frac{n-2}{m}x$ aus $\Delta x = \frac{n-1}{m}x$, ferner $\Delta x = \frac{n-3}{m}x$ aus $\Delta x = \frac{n-2}{m}x$, u. s. f. entstehe bis nach nmal wiederholter Verminderung $\Delta x = \frac{n-n}{m}x = 0$ wird.

5. §.

5. §. Erklärung.

Wenn y eine Function von irgend einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x iſt, und man ihre Differenz Δy durch die Differenz Δx dieſer veränderlichen Gröſſe dividirt; ſo ſoll $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenz-Quotient der Function y von x heiſſen; derjenige Werth aber, welchen der Differenz-Quotient einer Function y alsdann erlangen müßte, wenn bey ihm die Differenz Δx der abſoluten veränderlichen Gröſſe verſchwände oder gleich Null würde (4. §.), ſoll der Verſchwindungs-Quotient der Function y heiſſen, und durchaus mit dy bezeichnet werden.

1. Zuſatz.

Bezeichnungen wie dy, dz, du werden alſo in der Folge einen eigenen beſtimmten Sinn haben; es ſoll nämlich z. B. dy kein Product bedeuten, indem d keine Gröſſe, ſondern ein willkührliches Zeichen iſt, welches vor y geſetzt, nichts anders anzeigen wird, als daß y eine Function von irgend einer veränderlichen Gröſſe x iſt, und man durch dy nicht dieſe Function, ſondern denjenigen Werth verſtehen muß, welchen der Differenz-Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ hat.

Z. B. Für die Function $y = ax^2$ wäre nach (3. §. 3. Zuſ.) die Differenz $\Delta y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2$; dieſe durch Δx dividirt, giebt den Differenz-Quotienten $2ax + a\Delta x$; da alſo dieſer für $\Delta x = 0$ (4. §.) den Werth $2ax$ erlanget; ſo iſt $2ax$, vermöge der Erklärung, der Verſchwindungs-

Quotient der Function $y = ax^2$, welches die Bezeichnung $dy = 2ax$ sagen will.

2. Zusatz.

Wenn der Differenz-Quotient einer Function y von x von der Differenz Δx der veränderlichen Grösse ganz unabhängig ist; so wird er immer einerley bleiben, man mag Δx verschwinden lassen, oder nicht; in einem solchen Fall wird man also sagen können, es sey der Verschwindungs-Quotient dem Differenz-Quotienten gleich.

Z. B. Für die Function ax ist vermöge (3. §. 3. Zus.) die Differenz $= a\Delta x$, welche durch Δx dividirt, den Differenz-Quotienten $= a$ giebt: da nun a ungeändert bleibt, wenn man sich nun wirklich $\Delta x = 0$ vorstellt, und der Differenz-Quotient bey dieser Voraussetzung den Verschwindungs-Quotienten geben soll (Erklär.); so ist a auch der Verschwindungs-Quotient der Function ax, oder es ist, wegen der angenommenen Bezeichnung, $dy = a$ für $y = ax$, oder auch $d.ax = a$.

3. Zusatz.

Ist aber $d.ax = a$; so muß $dx = 1$ für $a = 1$ seyn: Das heißt: der Verschwindungs-Quotient, welcher einer absoluten veränderlichen Grösse zugehört, ist allemal $= 1$.

4. Zusatz.

Weil eine unveränderliche Grösse A gar keine Differenz ΔA geben kann (1. 3. §.); so giebt es für sie weder einen Differenz- noch Verschwindungs-Quotienten (Erklär.),

und

und in dieser Bedeutung kann man ihn gleich Null, nämlich $dA = 0$ setzen.

5. Zusatz.

Ist $y = Z + C$ eine Function von x, wobey doch C von x ganz unabhängig seyn soll; so wird man $x + \Delta x$ nur bey Z setzen können, wodurch Z einen Werth Z', und y einen $y' = Z' + C$ erlangen mag: daher wird seyn $y' - y = Z' - Z$ oder $\Delta y = \Delta Z$ (3. §. 3. Zus.), und nun auch $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta Z}{\Delta x}$. Es muß also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ das geben, was $\frac{\Delta Z}{\Delta x}$ dafür giebt: daher ist der Verschwindungs-Quotient jeder Function $y = Z + C$ von x durch den Verschwindungs-Quotienten ihres veränderlichen, von x abhängigen Theils Z vollkommen bestimmt, und ihm allein gleich, welches $dy = dZ$ anzeigt.

6. Zusatz.

In (3. §. 6. Zus.) war $\Delta y = \Delta P + \Delta Q + \Delta R + \ldots + \Delta Z$ für $y = P + Q + R + \ldots + Z$ eine Function von x: also ist auch $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta P}{\Delta x} + \frac{\Delta Q}{\Delta x} + \frac{\Delta R}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta Z}{\Delta x}$ der Differenz-Quotient der Function $y = P + Q + R + \ldots + Z$ nichts anders, als die Summe der Differenz-Quotienten, welche allen einzeln genommenen Theilen der Function y, als eben so vielen Functionen von x zugehören. Wenn nun Δx bis zur Null abnimmt (4. §.); so entstehen für $\Delta x = 0$ aus denselben Differenz-Quotienten die Verschwindungs-Quotienten $dP, dQ, dR, \ldots dZ$ (Erklär.), und aus dem

Diffe-

Differenz-Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Function y entstehet der ihr zugehörige Verschwindungs-Quotient dy (Erklär.): also ist $dy = dP + dQ + dR + \ldots + dZ$, das heißt: wenn eine Function y aus verschiedenen andern Functionen P, Q, R ... Z von einer veränderlichen Grösse x bestehet, welche wie immer durch die Additions- oder Subtractions-Zeichen unter einander verbunden seyn mögen; so wird auch der ihr zugehörige Verschwindungs-Quotient aus den auf gleiche Art untereinander verbundenen und ihren einzelnen Theilen zugehörigen Verschwindungs-Quotienten bestehen.

7. Zusatz.

Wenn AZ was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Grösse x ist, wobey doch A eine beständige, von x unabhängige, Grösse bedeuten soll; so wird, wenn x um Δx wächst, nur Z sich ändern, und um eine Differenz ΔZ zunehmen können, wofür AZ einen neuen Werth $A(Z+\Delta Z)$ erlangen, und sich um die Differenz $\Delta . A\Delta Z = A(Z+\Delta Z) - AZ$ (3. §. 3. Zus.) $= A.\Delta Z$ ändern muß. Der Differenz-Quotient der Function AZ wird also $= \frac{A.\Delta Z}{\Delta x} = A.\frac{\Delta Z}{\Delta x}$ seyn (Erklär.): da also $\frac{\Delta Z}{\Delta x}$ der Differenz-Quotient der Function Z ist, und er für $\Delta x = 0$ den ihr zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dZ giebt, wofür $A.\frac{\Delta Z}{\Delta x}$ in $A.dZ$ übergeht; so ist, wegen

der

der (Erklär.), AdZ der Verschwindungs-Quotient der Function AZ das Product aus dem Verschwindungs-Quotienten des veränderlichen Factors Z in den unveränderlichen Factor A.

8. Zusatz.

Uebrigens mag y was immer für eine Function von x seyn; so wird man doch den ihr zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dy mit (+) oder (—), nämlich +dy, oder —dy nehmen müssen, nachdem die Function y zu- oder abnimmt, während daß die veränderliche Grösse x um ein Stück Δx wächst. (3. §. 2. Zus.).

Anmerkung.

Bezeichnungen, wie dy^n, $d.y^n$, wird man in der Folge genau von einander unterscheiden müssen: dy^n heißt so viel als $(dy)^n$, mithin muß man dadurch allemal die nte Potenz des Verschwindungs-Quotienten verstehen, welcher einer Function y zugehört; hingegen zeigt $d.y^n$ oder $d(y^n)$ wegen des zwischen d und y^n befindlichen Puncts, den Verschwindungs-Quotienten an, welcher einer Function y^n zugehört. Z. B. Der Ausdruck $d.(a-x^2)^2$ bedeutet den Verschwindungs-Quotienten, welcher der Function $(a-x^2)^2$ von x zugehört.

Daß zdy das Product aus einer gewissen Grösse z in den Verschwindungs-Quotienten dy einer Function y bedeutet, ist für sich klar; aber d.PQR...Z wird allemal den Verschwindungs-Quotienten anzeigen, welcher dem ganzen Product PQR...Z als einer einzigen Function zu-

gehören

gehören mag: ein Gleiches wird $d.y\sqrt[r]{z}$ in Ansehung des Products $y\sqrt[r]{z}$ bedeuten; aber $dy.\sqrt[r]{z}$, oder ohne Punct, wie $dy\sqrt[r]{z}$ soll allemal so viel als $(\sqrt[r]{z})dy$ mithin das Product aus dem Verschwindungs-Quotienten einer Function y in die Wurzelgröße $\sqrt[r]{z}$ andeuten, wie $d(ax-x^2).\sqrt{(b+cx^3)}$ das Product aus dem der Function $ax-x^2$ zugehörigen Verschwindungs-Quotienten in die Quadrat-Wurzel von $b+cx^3$ anzeigt.

6. §. Lehrsatz.

Jede Function y von z kann unter der allgemeinen Form $Az^a+Bz^b+Cz^c+Dz^d+\ldots$ betrachtet werden, dergestalt, daß diese Formul entweder die Function y selbst, wie sie gegeben seyn mag, oder eine andere ausdrückt, der die Function y gleich ist.

Beweis. Weil A, B, C, D ... a, b, c, d ... ganz unbestimmte Coefficienten und Exponenten seyn sollen, und überdem auch die Anzahl der Glieder, aus welcher eine solche Reihe bestehen mag, ganz unbestimmt angenommen wird; so kann man sich von der Richtigkeit des angeführten Satzes vollkommen auf folgende Art überzeugen.

1) Wenn eine Function y von z nicht unter der Form $Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots\ldots$ gegeben wird, wie z. B. $y=3x^2-5x^{\frac{2}{3}}+\frac{8}{3}x^{-5}$; so kömmt dieselbe vielleicht in Gestalt eines solchen Bruchs vor, dessen Zähler und Nenner, oder dieser allein eine Function wie $Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots$ ist: da also ein solcher Bruch durch die Division seines

Zählers

Zählers mit dem Nenner allemal eine Function von der Form $Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots$ zum Quotienten giebt; so wird in diesem Fall die gebrochene Function y gewiß einer Function von der Form $Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots$ gleich seyn.

2) Bisweilen wird eine Function y aus Theilen bestehen, welche als eben so viele Producte aus Factoren von der Form $(\alpha z^m+\beta z^n+\ldots)^r$ zusammengesetzt seyn mögen: da aber dergleichen Factoren für alle Zahlen m, n...r in Functionen von der Form $Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots$ sich verwandeln lassen (I. B. VII. u. VIII. Abschn.), und Functionen von dieser Form, man mag ihrer so viel man immer will haben, in einander multiplicirt, allemal eine Function von eben derselben Form geben müssen; so wird es auch in diesem Fall für die Function y eine gleichgültige von der Form $Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots$ geben.

3) Oder es ist die Function y ein solcher Bruch (vielleicht aus mehrern Brüchen zusammengesetzt, welche aber sich allemal in einen Bruch bringen lassen), dessen Zähler sowohl als Nenner, oder dieser allein von der in (n. 2.) betrachteten Form ist: da also, wie es in (n. 2.) erwiesen wurde, solche Zähler und Nenner in Functionen von der Form $Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots$ verwandelt werden können; so wird es nun auch für die ganze Function y eine gleichgültige von eben derselben Form geben.

1. Zuſatz.

Daher mag y was immer für eine Function von irgend einer abſoluten oder abhängigen veränderlichen Gröſſe z ſeyn (3. §. 3. Zuſ.); ſo wird es für ſie allemal eine Differenz von der Form $\Delta Az^a + \Delta Bz^b + \Delta Cz^c + \cdots$ geben, welcher die Differenz derſelben Function y gleich iſt, nämlich $\Delta y = \Delta Az^a + \Delta Bz^b + \Delta Cz^c + \Delta Dz^d + \cdots$ (3. §. 5. u. 6. Zuſ.), oder, wenn man dieſe einzelnen Differenzen nach (3. §. 3. Zuſ.) ausdruckt.

$$\Delta y = A(z+\Delta z)^a + B(z+\Delta z)^b + C(z+\Delta z)^c + \cdots$$
$$- Az^a \qquad - Bz^b \qquad - Cz^c \qquad - \cdots$$

Und wenn man nun die hier vorhandenen Potenzen nach (I. B. 76. §. 4. Zuſ.) entwickelt; ſo wird ſeyn:

$$\Delta y = \begin{array}{l} Az^a \\ -Az^a \end{array} + \frac{a}{1} Az^{a-1}.\Delta z + \frac{a(a-1)}{1.2} Az^{a-2}.\Delta z^2$$
$$+ \frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3} Az^{a-3}.\Delta z^3 + \cdots$$
$$\begin{array}{l} +Bz^b \\ -Bz^b \end{array} + \frac{b}{1} Bz^{b-1}.\Delta z + \frac{b(b-1)}{1.2} Bz^{b-2}.\Delta z^2$$
$$+ \frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3} Bz^{b-3}.\Delta z^3 + \cdots$$
$$\begin{array}{l} +Cz^c \\ -Cz^c \end{array} + \frac{c}{1} Cz^{c-1}.\Delta z + \frac{c(c-1)}{1.2} Cz^{c-2}.\Delta z^2$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)}{1.2.3} Cz^{c-3}.\Delta z^3 + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daher

Daher $\Delta y = \alpha\Delta z + \beta\Delta z^2 + \gamma\Delta z^3 + \delta\Delta z^4 + \varepsilon\Delta z^5 + \ldots$, wenn man $\alpha = aAz^{a-1} + bBz^{b-1} + cCz^{c-1} + \ldots$ setzt, und mit $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ die Summen der Coefficienten bezeichnet, womit die Potenzen $\Delta z^2, \Delta z^3, \Delta z^4, \Delta z^5 \ldots$ bey verticalen Reihen multiplicirt sind.

2. Zusatz.

Setzt man aber $\psi = \beta + \gamma\Delta z + \delta\Delta z^2 + \varepsilon\Delta z^3 + \ldots$; so ist $\Delta y = \alpha\Delta z + \psi\Delta z^2$, und dieses ist ein allgemeiner Ausdruck der Differenz jeder Function y von irgend einer absoluten oder abhängigen veränderlichen Grösse z, wobey α eine wirkliche von Δz ganz unabhängige Grösse, und ψ entweder eine solche Grösse, oder eine Function von Δz bedeutet, welche unter die Form $\beta + \gamma\Delta z + \delta\Delta z^2 + \varepsilon\Delta z^3 + \ldots$ gehört.

3. Zusatz.

Für jede Function y von einer absoluten veränderlichen Grösse x giebt es also eine Differenz Δy, welche durch $\Delta y = M\Delta x + N\Delta x^2$ genau ausgedrückt werden kann, so, daß $M = pPx^{p-1} + qQx^{q-1} + rRx^{r-1} + \ldots$ seyn muß, wofern $y = Px^p + Qx^q + Rx^r + \ldots$ ist: da also aus derselben Differenz der Differenz-Quotient $M + N\Delta x$, und aus diesem für $\Delta x = o$ der Verschwindungs-Quotient M entstehet (5. §.); so ist der jeder Function y von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse x zugehörige Verschwindungs-Quotient $dy = M$ (5. §. 1. Z.) eine wirkliche, und durch die Function y selbst dergestalt bestimmte Grösse, daß $dy = pPx^{p-1} + qQx^{q-1}$

$+rRx^{r-s}+\ldots$ seyn muß, wofern $y=Px^p+Qx^q+Rx^r+\ldots$ ist.

4. Zusatz.

Weil aber der Verschwindungs-Quotient einer absoluten veränderlichen Gröſſe x allemal $=1$, nämlich $dx=1$ ist (5. §. 3. Zus.); so wird man, wenn $dy=M$ der Verschwindungs-Quotient einer Function y von x ist (3. Zus.) ihn durch $dy=Mdx$ ausdrücken können, welche Bezeichnung nebst mehreren in der Folge zu ersehenden Bequemlichkeiten auch den Vortheil haben wird, daß man daraus wird sogleich abnehmen können, es sey x diejenige veränderliche Gröſſe, wovon y eine Function seyn soll.

5. Zusatz.

Wenn die veränderlichen Theile Y, Z, zweer Functionen $y=Y+C$, $z=Z+c$ von einer absoluten veränderlichen Gröſſe x einander gleich sind; so muß $\Delta Y=\Delta Z$ für jeden Werth von Δx auch für $\Delta x=0$ seyn (3. §. 5. Zus.); setzt man demnach $\Delta Y=M\Delta x+N\Delta x^2$, $\Delta Z=m\Delta x+n\Delta x^2$; so ist $dY=M$, $dZ=m$ (3. Zus.), oder $dy=M$, $dz=m$ (5. §. 5. Zus.), und es muß $M\Delta x+N\Delta x^2=m\Delta x+n\Delta x^2$, mithin auch $M+N\Delta x=m+n\Delta x$ für jeden Werth von Δx, auch für $\Delta x=0$ seyn, welches doch unmöglich ist, wenn nicht $M=m$, daher $dy=dz$ wäre. Wie oft also die veränderlichen Theile Y, Z zweer Functionen y, z von einer absoluten veränderlichen Gröſſe x einander gleich angenommen werden, so oft muß man auch annehmen,

daß

daß die denselben Functionen zugehörigen Verschwindungs-Quotienten (3. Zus.) einander gleich sind.

6. Zusatz.

Setzt man $Y > Z$ bey zwoen Functionen $y = Y + C$, $z = Z + c$ von x; so muß es für jeden Werth von x eine Differenz $u = Z - Y$ als eine Function von x geben, wofür $Y = Z + u$, mithin $dY = d(Z+u)$ nach (5. Zus.), folglich $dY = dZ + du$ (5. §. 6. Zus.) ist: da also dY, dZ, du wirkliche Grössen sind (3. Zus.); so ist $dY > dZ$, und nun auch $dy > dz$ (5. §. 5. Zus.). Das heißt: wenn die veränderlichen Theile zwoer Functionen ungleich sind; so werden auch die denselben Functionen zugehörigen Verschwindungs-Quotienten ungleich seyn müssen, dergestalt, daß derjenigen Function, deren veränderlicher Theil grösser ist, auch ein grösserer Verschwindungs-Quotient zugehören muß.

7. Zusatz.

Daher auch umgekehrt, wenn zwoen Functionen $y = Y + C$, $z = Z + c$ gleiche Verschwindungs-Quotienten dy, dz zugehören; so müssen ihre veränderlichen Theile Y, Z einander gleich seyn, weil, wenn etwa $Y > Z$ wäre, auch $dy > dz$ seyn müßte (6. Zus.), da doch $dy = dz$ seyn soll. Und wenn die Verschwindungs-Quotienten ungleiche Grössen sind, etwa $dz > dy$; so werden auch die veränderlichen Theile Y, Z der Functionen, welchen jene Verschwindungs-Quotienten zugehören, dergestalt ungleich

seyn, daß der Theil Z der Function z, welcher ein gröſſerer Verschwindungs-Quotient zugehört, auch gröſſer seyn muß, als der Theil Y der andern Function y, welcher ein kleinerer Verschwindungs-Quotient zukömmt; denn für $Y=Z$ wäre $dy=dz$ (5. Zus.), und für $Y>Z$ wäre $dy>dz$ (6. Zus.), da doch $dz>dy$ seyn soll.

8. Zusatz.

Hat man also für eine gewisse Function y den ihr zugehörigen Verschwindungs-Quotienten $dy=M$ auf irgend eine Art gefunden (3. Zus.); so wird es keinen andern Verschwindungs-Quotienten für eben dieselbe Function geben, welcher gröſſer oder kleiner als M wäre.

9. Zusatz.

Hat man aber auf irgend eine Art entdeckt, daß $y=Y+C$ eine solche Function von x ist, deren Verschwindungs-Quotient einer gegebenen Gröſſe M gleich ist: so wird es keine andere Function geben, deren Verschwindungs-Quotient ebenfalls $=M$, und ihr veränderlicher Theil gröſſer oder kleiner als Y wäre.

Der II. Abſchnitt.

Von Verſchwindungs-Quotienten, welche algebraiſchen Functionen zugehören. Von der Umkehrung der Functionen, und verſchiedenen Ordnungen der Verſchwindungs-Quotienten.

7. §. Aufgabe.

Den Verſchwindungs-Quotienten dy zu beſtimmen, welcher einer Function $y = Ax^a$ von der abſoluten veränderlichen Gröſſe x für jede ganze und gebrochene, bejahte und verneinte Zahl a zugehört.

Auflöſung. Für $B = o$, $C = o$ $D = o$ u. ſ. f. erhält man in (6. §. 3. Zuſ.) $y = Ax^a$ und $dy = aAx^{a-1} = aAx^{a-1}dx$ (6. §. 4. Zuſ.), und ein gröſſerer oder kleinerer Verſchwindungs-Quotient kann nun der Function $y = Ax^a$ nicht zugehören (6. §. 8. Zuſ.). Wenn man alſo für eine unter der Form $y = Ax^a$ gegebene Function den ihr zugehörigen Verſchwindungs-Quotienten haben will; ſo multiplicire man dieſelbe mit dem Exponenten der Potenz, auf welche die veränderliche Gröſſe erhoben iſt, und behalte ſtatt dieſer Potenz nur die um einen Grad niedrigere; wobey man wegen (6. §. 4. Zuſ.) auch noch den Verſchwindungs-Quotienten der abſoluten veränderlichen Gröſſe $dx = 1$ als Factor anſetzen kann.

2. Zusatz.

Und nun kann man nach (5. §. 6. Zus.) den Verschwindungs-Quotienten dy auch für eine solche Function y von x bestimmen, welche aus mehreren einfachen Functionen von der Form des vorigen Zusatzes zusammengesetzt ist.

Beyspiele.

Für $y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + gx^5 + C$.

ist $dy = (2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5gx^4)\,dx$ (5. §. 5. Z.).

Für $y = ax^3 + b\sqrt[3]{x^2} - \frac{c}{x^2\sqrt{x}}$.

ist $dy = \left(3ax^2 + \frac{2b}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{5c}{2x^3\sqrt{x}}\right)dx$.

Für $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + c\sqrt{x} - ex + k$.

ist $dy = \left(\frac{-a}{2x\sqrt{x}} + \frac{c}{2\sqrt{x}} - e\right)dx$.

8. §. Aufgabe.

Den Verschwindungs-Quotienten dy zu bestimmen, welcher jeder unter der Form $y = Az^a$ vorkommenden Function von einer abhängigen veränderlichen Grösse z zugehört, es mag z was immer für eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse x (2. §. 3. Zus.) seyn.

Auflösung. 1) Für $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ u. s. f. findet man in (6. §. 1. u. 2. Zus.) $y = Az^a$; $\alpha = aAz^{a-1}$; $\Delta y = aAz^{a-1}.\Delta z + \psi\Delta z^2$.

2) Und

2) Und für jede Function z von x kann man die ihr zugehörige Differenz Δz durch $\Delta z = M\Delta x + N\Delta x^2$ ausdrücken, woraus der derselben Function zugehörige Verschwindungs-Quotient $dz = M$ erhalten wird. (6. §. 3. Z.).

3) Nun aber erhält man aus den Differenzen Δy, Δz, in (n. 1. 2.) die der Function $y = Az^a$ zugehörige Differenz Δy, wie sie in I) folgt: da also y eine Function von z, und z eine Function von der absoluten veränderlichen Grösse x ist; so wird aus I) der der Function $y = Az^a$ zugehörige Differenz-Quotient, wie in II), entstehen, wenn man Δy in I) durch Δx dividirt (5. §.).

I) $\Delta y = aAz^{a-1}(M\Delta x + N\Delta x^2) + \psi(M\Delta x + N\Delta x^2)^2$.

II) $aAz^{a-1}.M + aAz^{a-1}.N\Delta x + \psi(M + N\Delta x)^2.\Delta x$.

Setzt man endlich in II) $\Delta x = o$ (4. §.); so übergehet dafür II) in $dy = aAz^{a-1}.M$ (6. §.); mithin ist $dy = aAz^{a-1}.dz$, wegen (n. 2.)

Das heißt: der Verschwindungs-Quotient jeder unter der Form $y = Az^a$ gegebenen Function von einer absoluten veränderlichen Grösse x, wovon z eine Function ist, wird aus der Function selbst dadurch erhalten, wenn man die Function y mit dem Exponenten der Potenz, auf welche die bey ihr vorhandene veränderliche Grösse z erhoben ist, multiplicirt, statt derselben Potenz aber die um einen Grad niedrigere behält, hernach alles mit dem Verschwindungs-Quotienten multiplicirt, welcher der veränderlichen Grösse z als

einer Function von der absoluten veränderlichen Grösse x zugehört. (6. §. 8. Zus.).

Beyspiele.

Sey $y=(2x^3-5x^2+4x)^3$.

Für $z=2x^3-5x^2+4x$ ist $y=z^3$:

also ist $dy=3z^{3-1}.dz=3z^2.dz=3(2x^3-5x^2+4x)^2.dz$.

Nun ist $dz=(6x^2-10x+4)dx$ nach (7. §. 2. Zus.):

also $dy=3(2x^3-5x^2+4x)^2(6x^2-10x+4)dx$.

Sey $y=\sqrt{(a^2-x^2)}=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Für $z=a^2-x^2$ ist $y=z^{\frac{1}{2}}$, und $dy=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}.dz$,

daher $dy=\frac{dz}{2\sqrt{z}}=\frac{dz}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

Aber $dz=-2xdx$ nach (7. §. 2. Zus.):

also $dy=\frac{-2xdx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{-xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

Sey $y=\sqrt[3]{(x-x^2)}=(x-x^2)^{\frac{1}{3}}$.

Für $z=x-x^2$ ist $y=z^{\frac{1}{3}}$, und $dy=\frac{1}{3}z^{\frac{1}{3}-1}.dz$,

mithin $dy=\frac{dz}{3\sqrt[3]{z^2}}=\frac{dz}{3\sqrt[3]{(x-x^2)^2}}$.

Nun ist $dz=(1-2x)dx$ nach (7. §. 2. Zus.):

also ist $dy=\frac{(1-2x)dx}{3\sqrt[3]{(x-x^2)^2}}$.

Sey

Sey $y = \sqrt[3]{(ax - x^2)^2} = (ax - x^2)^{\frac{2}{3}}$.

Für $z = ax - x^2$ ist $y = z^{\frac{2}{3}}$, und $dy = \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}-1} dz$,

daher $dy = \frac{2dz}{3\sqrt[3]{z}} = \frac{2dz}{3\sqrt[3]{(ax-x^2)}}$.

Es ist aber $dz = (a - 2x)dx$ nach (7. §. 2. Zus.):

also ist $dy = \frac{2(a-2x)dx}{3\sqrt[3]{(ax-x^2)}}$.

Sey $y = \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} = a(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Für $z = 1 - x^2$ ist $y = az^{-\frac{1}{2}}$ und $dy = -\frac{a}{2} z^{-\frac{1}{2}-1} dz$,

mithin $dy = \frac{-adz}{2\sqrt{z^3}} = \frac{-adz}{2(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$.

Nun ist $dz = -2xdx$ nach (7. §. 2. Zus.):

also ist $dy = \frac{+2axdx}{2(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{axdx}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$.

Sey $y = \sqrt[3]{\left(a - x\sqrt{x} + \frac{b}{x^2\sqrt{x}}\right)^2}$

Für $z = a - x\sqrt{x} + \frac{b}{x^2\sqrt{x}}$ ist $y = z^{\frac{2}{3}}$,

und $dy = \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}-1} dz = \frac{2dz}{3\sqrt[3]{z}}$.

Nun

Nun ist $dz = \frac{-3}{2}\sqrt{x}dx - \frac{5bdx}{2x^3\sqrt{x}}$ (7. §. 2. Zus.):

also ist $dy = \frac{(-3\sqrt{x} - 5b:x^3\sqrt{x})dx}{3\sqrt[3]{(a - x\sqrt{x} + b:x^2\sqrt{x})}}$.

Zusatz.

Es ist also wegen (7. und 8. §.) allemal $d(Az^n) = aAz^{a-1}dz$, es möge z eine absolute oder eine abhängige veränderliche Grösse bedeuten, nur daß in jenem Falle $dz = 1$ ist, in diesem aber einen ganz andern Werth erhält.

9. §. Aufgabe.

Es ist $y = uv$ ein Product aus zwoen Functionen u, v von einer absoluten veränderlichen Grösse x, mithin y eine Function von x; man soll den ihr zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dy bestimmen.

Auflösung. Wenn die absolute veränderliche Grösse x um eine Differenz Δx wächst; so müssen dafür die Functionen u, v um gewisse Differenzen Δu, Δv wachsen, und indem dieses geschieht, muß die Function $y = uv$ einen neuen Werth $y' = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$ erlangen, woraus die Differenz derselben Function $\Delta y = y' - y = (u + \Delta u)(u + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$ erhalten wird (3. §. 3. Zus.)

Da aber die den Functionen u, v von x zugehörigen Differenzen Δu, Δv durch $\Delta u = M\Delta x + N\Delta x^2$, $\Delta v = m\Delta x + n\Delta x^2$, ausgedrückt, und daraus die ihnen

zuge-

zugehörigen Verschwindungs-Quotienten $du=M$, $dv=m$ erhalten werden können (6. §. 3. Zus.); so ist die der Function $y=uv$ zugehörige Differenz.

$$\Delta y = v(M\Delta x+N\Delta x^2)+u(m\Delta x+n\Delta x^2)$$
$$+(M\Delta x+N\Delta x^2)(m\Delta x+n\Delta x^2).$$

Dividirt man nun diese durch Δx; so erhält man daraus den der Function $y=uv$ zugehörigen Differenz-Quotienten (5. §.).

$$=vM+vN\Delta x+um+un\Delta x+(M+N\Delta x)(m+n\Delta x)\Delta x.$$

Und hieraus findet man für $\Delta x=o$ den der Function $y=uv$ zugehörigen Verschwindungs-Quotienten $=v.M+u.m$, nämlich $dy=v.M+u.m$ (5. §.), oder, weil $du=M$, $dv=m$ war, $dy=vdu+udv$.

Das heißt: der Verschwindungs-Quotient, welcher dem Producte uv aus zwoen Functionen u, v von einer absoluten veränderlichen Grösse x zugehört, ist die Summe der Producte aus jedem einzelnen Factor in den dem andern Factor zugehörigen Verschwindungs-Quotienten.

Beyspiele.

Sey $y=(x-x^2)(2a-x^3)$.

Für $u=x-x^2$, $v=2a-x^3$, ist $y=uv$;

und $dy=vdu+udv=(2a-x^3)du+(x-x^2)dv$.

Nun ist $du=(1-2x)dx$; $dv=-3x^2dx$ (7. §. 2. Z.);

also ist $dy=(2a-x^3)(1-2x)dx-3x^2(x-x^2)dx$.

Sey $y=(2x-x^2)\sqrt[4]{(b-cx^3)}$.

Für

Für $u = ax - x^2$, $v = \sqrt[4]{(b - cx^3)}$, ist $y = uv$,
und $dy = vdu + udv$.

Nun ist $du = (a - 2x)dx$ nach (7. §. 2. Zus.),

und $dv = \frac{-3cx^2dx}{4\sqrt[4]{(b - cx^3)^3}}$ nach (8. §.):

also ist $dy = (a - 2x)dx\sqrt[4]{(b - cx^3)} - \frac{3cx^2(ax - x^2)dx}{4\sqrt[4]{(b - cx^3)^3}}$.

1. Zusatz.

Bestehet eine Function $y = uvz$ aus drey Factoren, als eben so vielen Functionen von einer absoluten veränderlichen Grösse x; so kann man das Product uv aus zween Functionen als eine einzige Function von x betrachten, etwa $\omega = uv$, mithin $y = \omega z$ setzen: es wäre also $dy = zd\omega + \omega dz = zd\omega + uvdz$, und $d\omega = vdu + udv$ nach (vor. Aufg.): also $dy = zvdu + uzdv + uvdz$. Das heißt: der Verschwindungs-Quotient eines Products aus drey Functionen wird erhalten, wenn man den Verschwindungs-Quotienten jedes einzelnen Factors mit den übrigen Factoren multiplicirt, und die dadurch zu erhaltenden Producte in eine Summe bringet.

Beyspiel.

Sey $y = (a + x^2)(b - x)(c - x^3)$;

so ist $dy = (a + x^2)(b - x).d(c - x^3)$
$+ (a + x^2)(c - x^3).d(b - x)$
$+ (b - x)(c - x^3).d(a + x^2)$,

daher

daher $dy = -3x^2(a+x^2)(b-x)dx - (a+x^2)(c-x^3)dx + 2x(b-x)(c-x^3)dx$.

2. Zusatz.

Ein solches Gesetz kann man also für jede Anzahl von Factoren finden, aus welchen ein Product bestehen mag, weil man jedes Product aus n Factoren als eine einzige Function, mithin das Product aus n+1 Factoren als ein Product aus zweenen Factoren betrachten kann. Z. B. Seyen solche Factoren P, Q, R, S, T; so setze man PQ=u, RS=v, daher y=uvT für y=PQRST. Nun ist du=QdP+PdQ, dv=SdR+RdS (vor. Aufg.) dy=uvdT+uTdv+vTdu (vorig. Zus.): also ist dy=uvdT+uT(SdR+RdS)+vT(QdP+PdQ)=PQRSdT+PQSTdR+PQRTdS+QRSTdP+PRSTdQ.

3. Zusatz.

Wenn Y, Z bey $y = \frac{Y}{Z}$ was immer für Functionen von einer absoluten veränderlichen Grösse x bedeuten; so muß seyn yZ=Y, daher auch d.yZ=dY (6. §. 5. Zus.) Nun aber ist d.yZ=Zdy+ydZ (vorige Aufgabe) $= Z\,dy + \frac{Y}{Z}dZ$: also ist $Z\,dy + \frac{Y}{Z}dZ = dY$, und hieraus findet sich $dy = \frac{Z\,dY - Y\,dZ}{Z^2}$.

Das heißt: der Verschwindungs-Quotient einer gebrochenen Function wird erhalten, wenn man den Verschwindungs-Quotienten des Nenners mit dem Zähler

Zähler multiplicirt, und das Product vom Producte aus dem Nenner in den Verschwindungs-Quotienten des Zählers abzieht, hernach den Rest durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Beyspiele.

Sey $y = \frac{ax - bx^2}{cx^2 + g}$.

Für $Y = ax - bx^2$, $Z = cx^2 + g$, ist $y = \frac{Y}{Z}$,

und $dy = \frac{Z\,dY - Y\,dZ}{Z^2}$.

Nun ist $dY = (a - 2bx)\,dx$, $dZ = 2cx\,dx$ (7. §. 2. Zus.):

also ist $dy = \frac{(cx^2 + g)(a - 2bx)\,dx - 2cx\,dx(ax - bx^2)}{(cx^2 + g)^2}$,

oder $dy = \frac{(ag - 2bgx - acx^2)\,dx}{(cx^2 + g)^2}$.

Sey $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$.

Für $Y = x^2 - 1$, $Z = \sqrt{(a^4 + x^4)}$ ist $y = \frac{Y}{Z}$,

und $dy = \frac{Z\,dY - Y\,dZ}{Z^2}$.

Nun ist $dY = 2x\,dx$ (7. §. 2. Zus.), $dZ = \frac{2x^3\,dx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$ (8. §.):

also $dy = \frac{2x\,dx\sqrt{(a^4 + x^4)} - \frac{2x^3(x^2 - 1)\,dx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}}{(\sqrt{(a^4 + x^4)})^2}$,

oder $dy = \frac{(2a^4x + 2x^5)\,dx}{(a^4 + x^4)\sqrt{(a^4 + x^4)}}$.

4. Zu-

4. Zusatz.

Wenn bey $y = \frac{Y}{Z}$ der Nenner Z von der veränderlichen Grösse x unabhängig, mithin eine unveränderliche Grösse wäre; so wäre $y = \frac{1}{Z} \cdot Y$, und nun $dy = \frac{1}{Z} \cdot dY$ (5. §. 7. Zus.), und dieses folgt auch aus der vorigen Formul, indem bey ihr $dZ = 0$ seyn muß (5. §. 4. Zus.).

Wäre aber der Zähler Y eine beständige, von x unabhängige Grösse; so wäre $y = Y \cdot \frac{1}{Z} = Y \cdot Z^{-1}$, und $dy = Y d \cdot Z^{-1}$ (5. §. 7. Zus.) $= Y \cdot -1 Z^{-2} dZ$ (8. §.), oder $dy = \frac{-Y dZ}{Z^2}$, welches auch aus der vorigen Formul folgt, indem bey ihr $dY = 0$ seyn muß (5. §. 4. Z.). In dem Fall also, wenn der Nenner allein veränderlich ist, findet man den der gebrochenen Function y zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dy, wenn man das Product aus dem Verschwindungs-Quotienten des Nenners in den Zähler verneint nimmt, und es durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Beyspiel.

Sey $y = \frac{a^2}{\sqrt{(ax - x^2)}}$.

Es ist $dy = \frac{-a^2 d\sqrt{(ax-x^2)}}{(\sqrt{(ax-x^2)})^2} = \frac{-a^2 d\sqrt{(ax-x^2)}}{ax-x^2}$.

Aber $d\sqrt{(ax-x^2)} = \frac{(a-2x)dx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$ nach (8. §.):

also $dy = \frac{-a^2(a-2x)dx}{2(ax-x^2)\sqrt{(ax-x^2)}}$.

Anmerkung.

Durch die vorhergehenden Regeln ist man in den Stand gesetzt worden, den Verschwindungs-Quotienten jeder Function y von irgend einer veränderlichen Grösse x zu bestimmen; weil, wenn eine Function $y = P+Q+R+\ldots+Z$ aus mehreren einfachen durch die Addition zusammengesetzt ist, ihr Verschwindungs-Quotient aus dem Verschwindungs-Quotienten $dP, dQ, dR, \ldots dZ$ bestehen wird (5. §. 6. Zus.), und diese einzelnen Verschwindungs-Quotienten allemal nach einer der vorhergehenden Regeln, oder nach mehreren Regeln gefunden werden können.

Doch kommen bisweilen solche Functionen vor, deren Verschwindungs-Quotienten bequemer gefunden werden, wofern man dieselben Functionen zuvor in andere einfachere und gleichgültige verwandelt (6. §. 5. Zus.): dergleichen Verwandlungen werden mit Vortheile bey gebrochenen Functionen gebraucht; die dazu nöthigen Kunstgriffe fallen einem geübten Rechner bisweilen leicht in die Augen, andere muß er aber durch Uebung und eigenes Nachdenken kennen lernen.

Beyspiele.

Sey $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+x^2)}}$.

Für

Für $z = x + \sqrt{(1+x^2)}$ iſt $y = \frac{x}{z}$:

alſo $dy = \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}$ nach (vor. 3. Zuſ.).

Nun iſt $dz = dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$ nach (7. 8. §):

alſo $dy = \frac{(x+\sqrt{(1+x^2)})\,dx - x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right)dx}{(x+\sqrt{(1+x^2)})^2}$

oder $dy = \frac{(1+2x^2)\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}} - 2x\,dx.$

Leichter wird man aber dieſen Quotienten finden, wenn man zuvor den Zähler und Nenner von y mit $\sqrt{(1+x^2)} - x$ multiplicirt; denn es wird ſeyn:

$$y = \frac{x(\sqrt{(1+x^2)} - x)}{(x+\sqrt{(1+x^2)})(\sqrt{(1+x^2)} - x)} = \sqrt{(x^2+x^4)} - x^2:$$

alſo $dy = d\sqrt{(x^2+x^4)} - d.x^2 = \frac{(1+2x^2)\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}} - 2x\,dx.$

Sey $y = \frac{x - x\sqrt[3]{x^2}}{a - a\sqrt[3]{x}}$.

Für $Y = x - x\sqrt[3]{x^2}$, $Z = a - a\sqrt[3]{x}$ iſt $y = \frac{Y}{Z}$;

und $dy = \frac{Z\,dY - Y\,dZ}{Z^2}$ nach (vorig. 3. Zuſ.)

Nun iſt $dY = dx - \frac{5\,dx}{3}\sqrt[3]{x^2}$; $dZ = -\frac{a\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$:

also ist $dy=(a-a\sqrt[x]{x})(1-\frac{1}{3}\sqrt[31]{x^2})dx+\frac{a(x-x\sqrt[3]{x^2})dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$(a-a\sqrt[3]{x})^2$$

oder $dy=\frac{dx}{a}+\frac{4dx}{3a}\sqrt[3]{x}$.

Man hätte aber leicht bemerken können, daß der Zähler und Nenner der Function y sich durch $1-\sqrt[3]{x}$ dividiren läßt, wodurch dieselbe Function in eine gleichgültige ganze Function verwandelt werden kann, nämlich:

$$y=\frac{(x-x\sqrt[3]{x^2}):(1-\sqrt[3]{x})}{(a-a\sqrt[3]{x}):(1-\sqrt[3]{x})}=\frac{1}{a}(x+x\sqrt[3]{x}):$$

also $dy=\frac{1}{a}d(x+x\sqrt[3]{x})=\frac{1}{a}\left(1+\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\right)dx.$

29. §. Erklärung.

Wenn $y=Z$ eine Function von irgend einer absoluten oder abhängigen veränderlichen Grösse z (2. §. 3. Zus.) ist; so sind die Werthe von y und z in einer solchen Verbindung unter einander, daß, wenn man der Function y was immer für Werthe beylegt, z dafür gewisse durch die Gleichung $y=Z$ vollkommen bestimmte Werthe erlangen muß: man kann also y als eine veränderliche Grösse (1. §.), und z als eine Function von y betrachten (2. §.), welches die Umkehrung der Functionen heißen mag.

Z. B. Wenn man in einem Kreise (Fig. 1.), ein be- Fig. 1.
liebiges Stück des Durchmessers, nämlich eine Abscisse $AQ = x$ nimmt, welcher an Q eine auf dem Durchmesser AB senkrecht stehende Ordinate $PQ = y$ zugehört, und wenn man den Halbmesser $AC = r$ setzt; so ist $PQ = \sqrt{AQ \cdot QB}$, daher $y = \sqrt{(x(2r - x))}$, oder $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, und daraus folgt $x = r \pm \sqrt{(r^2 - y^2)}$. Man kann also die Abscisse $x = AQ$ als eine absolute veränderliche Grösse (2. §. 3. Zus.) und die Ordinate $y = PQ$ als eine Function $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ von ihr (2. §.), oder die Ordinate $y = PQ$ als eine absolute veränderliche Grösse und die Abscisse $x = AQ$ als eine Function $x = r \pm \sqrt{(r^2 - y^2)}$ von ihr betrachten; das heißt, man kann die Function $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ von x umkehren, dergestalt, daß die durch eine solche Umkehrung erhaltene Function $x = r \pm \sqrt{(r^2 - y^2)}$ durch die umgekehrte $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ vollkommen bestimmt ist.

1. Zusatz.

Bey der Umkehrung einer Function $y = Z$ von z wird z eine Function von y und y entweder eine absolute oder abhängige veränderliche Grösse, nachdem z bey $y = Z$ eine absolute oder abhängige veränderliche Grösse bedeutete. Z. B. Aus $y = a - bz^2$ folgt $z = \sqrt{\left(\frac{a - y}{b}\right)}$: war nun z bey $y = a - bz^2$ eine absolute veränderliche Grösse; so wird nun y bey $z = \sqrt{\frac{a - y}{b}}$ als eine absolute veränderliche Grösse betrachtet: war aber z bey $y = a - bz^2$ eine

abhängige veränderliche Grösse, mithin eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse x; so wird nun y bey $z = \sqrt{\frac{a-y}{b}}$ als eine von x abhängige veränderliche Grösse betrachtet; so, daß, wenn z. B. $z = c - x^2$ bey $y = a - bz^2$ bedeutete, nun $y = a - b(c - x^2)^2$ bey $z = \sqrt{\frac{a-y}{b}}$ bedeuten muß.

2. Zusatz.

Jede Function $y = Z$ von z umzukehren, und dadurch eine Function $z = Y$ von y ganz genau, nicht aber durch Näherung, zu bestimmen, sind wir gar nicht im Stande: so viel ist indessen gewiß, daß, wenn man bey der erhaltenen Function $z = Y$ die veränderliche Grösse y um ein Stück e wachsen, mithin in $y + e$ übergehen ließe, wofür $z = Y$ einen neuen Werth z′ erlangen würde, dieser Werth statt z bey $y = Z$ genommen, gewiß $y + e = Z'$ geben müßte, wenn Z′ das bedeutet, in was Z übergehet, wenn man z′ statt z nimmt, und dieses würde allemal zutreffen müssen, wie immer man e klein nehmen, auch wenn man hernach $e = 0$ setzen wollte.

11. §. Aufgabe.

Es ist $y = Z$ eine Function von z, woraus durch Umkehrung eine Function $z = Y$ von y entstehen müßte; man soll bestimmen, wie die Verschwindungs-Quotienten von einander abhängen, welche den Functionen $y = Z$ und $z = Y$ zugehören.

Aufs

Auflösung. Sey $y = Az^a + Bz^b + Cz^c + \ldots$ (6. §.), woraus durch Umkehrung $z = Py^p + Qy^q + Ry^r + \ldots$ entstehen mag. Die erste Gleichung giebt für die Function y von z den Verschwindungs-Quotienten $dy = d.Az^a + d.Bz^b + d.Cz^c + \ldots$, und die zweyte giebt für die Function z von y den Verschwindungs-Quotienten $dz = d.Py^p + d.Qy^q + d.Ry^r + \ldots$ (5. §. 6. Zus.): also ist für die Function y von z der Verschwindungs-Quotient:

I) $dy = aAz^{a-1}dz + bBz^{b-1}dz + cCz^{c-1}dz + \ldots$
$= (aAz^{a-1} + bBz^{b-1} + cCz^{c-1} + \ldots)dz$

Und dz ist der Verschwindungs-Quotient der absoluten, oder abhängigen veränderlichen Grösse z (8. §. Zus.).

Eben so ist für die Function z von y der Verschwindungs-Quotient:

II) $dz = pPy^{p-1}dy + qQy^{q-1}dy + rRy^{r-1}dy + \ldots$
$= (pPy^{p-1} + qQy^{q-1} + rRy^{r-1} + \ldots)dy$,

und dy ist der Verschwindungs-Quotient der absoluten, oder abhängigen veränderlichen Grösse y (10. §. 1. Zus.).

Man stelle sich nun vor, daß bey $z = Py^p + Qy^q + Ry^r + \ldots$ die veränderliche Grösse y um ein Stück e wächst, sie daher in $y + e$ übergeht; so wird dafür z in $z + E$ übergehen, und es wird seyn:

$z + E = P(y+e)^p + Q(y+e)^q + R(y+e)^r + \ldots$

mithin $E = P(y+e)^p + Q(y+e)^q + R(y+e)^r + \ldots$
$- Py^p - Qy^q - Ry^r - \ldots$

Und dieses kann man nun vollkommen so, wie in (5. §. 1. 2. Zus.) ausdrücken, nämlich setzen:

III) $E=(pPy^{p-1}+qQy^{q-1}+rRy^{r-1}+\ldots).e+\psi.e^2$

Setzt man aber $z+E$ statt z bey, $y=Az^a+Bz^b+Cz^c+\ldots$; so muß dafür y in $y+e$ übergehen, folglich wird seyn (10. §. 2. Zuf.),

$$y+e=A(z+E)^a+B(z+E)^b+C(z+E)^c+\ldots$$

mithin $e=A(z+E)^a+B(z+E)^b+C(z+E)^c+\ldots$

$$-Az^a \quad -Bz^b \quad -Cz^c-\ldots$$

Und dieses kann man nach (5. §. 1. u. 2. Zuf.), wie folgt, ausdrücken:

IV) $e=(aAz^{a-1}+bBz^{b-1}+cCz^{c-1}+\ldots).E+\varphi.E^2$.

Setzt man aber den Werth von E aus III) in IV); so erhält man dafür:

V) $1=(aAz^{a-1}+bBz^{b-1}+cCz^{c-1}+\ldots)(pPy^{p-1}+qQy^{q-1}+rRy^{r-1}+\ldots)+(aAz^{a-1}+bBz^{b-1}+\ldots)\psi.e+\varphi(pPy^{p-1}+qQy^{q-1}+\ldots+\psi e)^2.e$.

Da also IV) für jeden wie immer kleinen Werth e, auch für $e=0$ wegen (10. §. 2. Zuf.) gelten mußte; so muß auch nun V) für jeden wie immer kleinen Werth e auch für $e=0$ gelten, woraus nothwendig folgt, es sey in V)

$$1=(aAz^{a-1}+bBz^{b-1}+cCz^{c-1}+\ldots)(pPy^{p-1}+qQy^{q-1}+rRy^{r-1}+\ldots),$$

folglich

$$pPy^{p-1}+qQy^{q-1}+rRy^{r-1}+\ldots=\frac{1}{aAz^{a-1}+bBz^{b-1}+cCz^{c-1}+\ldots}.$$

Vergleichet man nun diese Gleichung mit den Verschwindungs-Quotienten in I) und II); so wird sich daraus folgender Satz abnehmen lassen:

Wenn

Wenn $y = Z$ was immer für eine Function von irgend einer absoluten oder abhängigen veränderlichen Grösse z ist, deren Verschwindungs-Quotient $= \alpha dz$ seyn mag; so muß sich jene Function dergestalt umkehren lassen (10. §.), daß der Verschwindungs-Quotient der durch Umkehrung aus $y = Z$ entstehenden Function z von y durch den Verschwindungs-Quotienten ihrer absoluten oder abhängigen veränderlichen Grösse y (10. §. 1. Zus.) dividirt $= \frac{1}{\alpha}$ wird.

Zusatz.

Hat man demnach für irgend eine Function $y = Z$ von z den ihr zugehörigen Verschwindungs-Quotienten $dy = \alpha dz$ gefunden, wie oben in I); so kann man daraus $dz = \frac{dy}{\alpha}$ herleiten, und dieses für den Verschwindungs-Quotienten derjenigen Function z von y nehmen, welche durch Umkehrung aus $y = Z$ erhalten werden sollte, wie oben in II).

Beyspiele.

Sey $y = ax^3$ und x eine absolute veränderliche Grösse; so ist $dy = 3ax^2 dx$ der Verschwindungs-Quotient der Function $y = ax^3$, wobey $dx = 1$ seyn muß (7. §).

Daraus kann man aber $dx = \frac{dy}{3ax^2}$ folgern, und dieses ist der wahre Werth des Verschwindungs-Quotienten derjenigen Function x von der absoluten veränderlichen Grösse y, welche Function durch Umkehrung aus $y = ax^3$

entſtehen ſoll (10. §. 1. Zuſ.), und bey dieſer Vorſtellung iſt nun $dy = 1$, mithin

$$dx = \frac{1}{3ax^2} = \frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{ay^2}} \quad (5.\ §.\ 3.\ Zuſ.)$$

Die Umkehrung giebt wirklich $x = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$, und für dieſe Function von y iſt $dx = \frac{dy}{3a\sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{ay^2}}$ nach (7. §.).

Sey $y = \sqrt{(ax+x^2)}$, daher $dy = \frac{(a+2x)dx}{2\sqrt{(ax+x^2)}}$ als der Verſchwindungs-Quotient der Function y von x, wobey $dx = 1$ ſeyn muß, wenn x eine abſolute veränderliche Gröſſe iſt.

Daraus folgt $dx = \frac{2\sqrt{(ax+x^2)}.dy}{a+2x} = \frac{y\,dy}{\sqrt{\left(y^2+\frac{1}{4}a^2\right)}}$, welches der Werth des Verſchwindungs-Quotienten derjenigen Function x von y ſeyn ſoll, welche durch Umkehrung aus $y = \sqrt{(ax+x^2)}$ entſtehet: es folgt auch wirklich hieraus $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(y^2+\frac{1}{4}a^2\right)}$, und dafür iſt $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{\left(y^2+\frac{1}{4}a^2\right)}}$.

12. §. Erklärung.

Wir haben in (3. §. 2. Zuſ.) geſehen, was die Differenz einer Function y von irgend einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x heißt, und wie dieſelbe durch eine gewiſſe Differenz von x, nämlich Δy durch Δx beſtimmt wird: eine ſolche Differenz Δy ſoll in der Folge die erſte Differenz der Function y von x heißen. Iſt nun die erſte Differenz Δy noch eine Function von x, und nicht allein von Δx; ſo behalte man Δx einerley, und ſuche die erſte Differenz $\Delta.\Delta y$ von Δy als einer Function von x (3. §. 2. Zuſ.), und nenne dieſelbe die zweyte Differenz der Function y. Iſt auch die zweyte Differenz $\Delta.\Delta y$ eine Function von x; ſo ſuche man die erſte Differenz von $\Delta.\Delta y$ als einer Function von x (3. §. 2. Zuſ.), und nenne ſie die dritte Differenz der Function y, u. ſ. f. Zur Bezeichnung der erſten, zweyten, dritten, vierten, - - - - rten, $(r+1)$ten - - - - Differenz einer Function y brauche man Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ - - - - $\Delta^r y$, $\Delta^{r+1} y$ - - - - ſtatt $\Delta.\Delta y$, $\Delta\Delta\Delta y$ - - - - .

Zuſatz.

Nach dieſen Begriffen iſt alſo die $(r+1)$te Differenz $\Delta^{r+1} y$ einer Function y von x nichts anders als die erſte nach (3. §. 2. Zuſ.) zu beſtimmende Differenz $\Delta.\Delta^r y$ ihrer rten Differenz $\Delta^r y$ als einer Function von x: man findet alſo aus jeder rten Differenz $\Delta^r y$ einer Function y von x ihre $(r+1)$te Differenz $\Delta^{r+1} y$, wenn man $x+\Delta x$ ſtatt x in $\Delta^r y$ ſetzt, den neuen Werth $\Delta^r y'$ merkt, welchen $\Delta^r y$ dafür

dafür erlanget, und davon die rte Differenz $\Delta^r y$ abziehet, mithin $\Delta^{r+1} y = \Delta . \Delta^r y = \Delta^r y' - \Delta^r y$ machet.

Beyspiel.

Sey $y = x^3 + x$.

so ist $y' = (x+\Delta x)^3 + x + \Delta x$:

also $\Delta y = y' - y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + \Delta x$ (3. §. 2. Z.).

Nun $\Delta y' = 3(x+\Delta x)^2\Delta x + 3(x+\Delta x)\Delta x^2 + \Delta x^3 + \Delta x$:

also $\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y = 6x\Delta x^2 + 6\Delta x^3$.

Nun $\Delta^2 y' = 6(x+\Delta x)\Delta x^2 + 6\Delta x^3$:

also $\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y = 6\Delta x^3$.

13. §. Erklärung.

Für jede rte Differenz $\Delta^r y$ einer Function y von einer absoluten veränderlichen Grösse x soll derselben Function ein rter Differenz-Quotient zugehören, welchen ihre rte Differenz $\Delta^r y$ durch die rte Potenz Δx^r von der Differenz Δx der absoluten veränderlichen Grösse x dividirt geben würde: und wenn man bey einem rten Differenz-Quotienten $\frac{\Delta^r y}{\Delta x^r}$ die Differenz Δx der absoluten veränderlichen Grösse x bis zur Null abnehmen läßt (4. §.); so soll das, was ein solcher Quotient für $\Delta x = 0$ giebt, der rte Verschwindungs-Quotient der Function y von x heißen. Demnach war $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der erste Differenz-Quotient, und dy der erste Verschwindungs-Quotient einer Function y von x in (5. §.); der zweyte, dritte, vierte - - - - rte Verschwindungs-Quotient derselben Function y soll nun

durch

durch d^2y, d^3y, d^4y .... d^ry angedeutet werden, welche Bezeichnungen von dy^r; $d.y^r$ in (5, §. Anmerk.) unterschieden sind.

Z. B. Für $y=x^3+x$ hat man die drey ersten Differenzen Δy, Δ^2y, Δ^3y in (12. §. Zus.) gefunden: dividirt man daselbst Δy durch Δx, Δ^2y durch Δx^2, Δ^3y durch Δx^3; so findet man die drey ersten Differenz-Quotienten, wie sie folgen.

Der erste $=3x^2+1+3x\Delta x+\Delta x^2$
zweyte $=6x+6\Delta x$
dritte $=6$.

Bildet man sich nun ein, daß Δx bis zur Null abnimmt (4 §.); so entstehet, für $\Delta x=0$, $3x^2+1$ aus dem ersten, $6x$ aus dem zweyten, und 6 aus dem dritten Differenz-Quotienten: also sind $3x^2+1$, $6x$, 6 der erste, zweyte, dritte Verschwindungs-Quotient der Function $y=x^3+x$, welches nun die Gleichungen $dy=3x^2+1$, $d^2y=6x$, $d^3y=6$ sagen wollen.

14. §. Aufgabe.

Einen Ausdruck zu bestimmen, welcher genau angeben soll, wie jede rte Differenz einer jeden Function y von x von der Differenz Δx dieser absoluten veränderlichen Grösse x abhängt.

Auflösung. 1) Für die Function $y=x^3+x$ war in (12. §. Zus.) die erste Differenz $\Delta y=(3x^2+1)\Delta x+(3x+\Delta x)\Delta x^2$, und die zweyte $\Delta^2y=6x\Delta x^2+6\Delta x^3$.

2) Wäre

2) Wäre das von jeder rten Differenz und jeder Function y von x wahr, was man bey den Differenzen in (n. 1.) bemerkt; so müßte man sagen, es sey jede rte Differenz jeder Function y von x dergestalt beschaffen, daß dieselbe einer Function von der Differenz Δx gleich ist, welche die Form $P\Delta x^r + Q\Delta x^{r+1}$ hat, welche demnach im ersten Theile das Product aus einer von Δx ganz unabhängigen Grösse P in die rte Potenz von Δx, und im zweyten Theile das Product aus einer von Δx unabhängigen Grösse, oder einer Function Q von Δx in die $(r+1)$te Potenz von Δx enthält.

Daraus aber, weil dieses Gesetz für die zwoen ersten Differenzen der Function $y = x^3 + x$ wirklich gilt, läßt sich nicht schließen, es müsse dasselbe für alle mögliche Functionen, und die ihnen zugehörigen Differenzen gelten.

3) Wenn wir uns indessen daran erinnern, was wir im (6. §. 1. u. 2. Zus.) für die erste Differenz Δy jeder Function y von z erwiesen haben; so wird uns einleuchtend seyn, daß das Gesetz (n. 2.) für die erste Differenz jeder Function y von x wirklich gilt: könnten wir also darthun, daß, wenn dasselbe Gesetz von einer gewissen rten Differenz $\Delta^r y$ jeder Function y von x wahr wäre, es auch für die nächst höhere $(r+1)$te Differenz $\Delta^{r+1} y$ gelten müßte; so würde dieses ein untrüglicher Beweis davon seyn, daß das Gesetz (n. 2.) für jede rte Differenz jeder Function y von x wirklich gilt (Algebr. 54. §.), jenes kann aber auf folgende Art bewiesen werden.

4) Sey

4) Sey y was immer für eine Function von x, und ihre rte Differenz dem Gesetze (n. 2.) gemäß

$$\Delta^r y = P\Delta x^r + Q\Delta x^{r+1}.$$

5) Will man nun die (r+1)te Differenz haben; so muß man $x+\Delta x$ statt x in $\Delta^r y$ setzen, wofür P und Q gewisse neue Werthe P', Q' erlangen, und für $\Delta^r y$ einen neuen Werth $\Delta^r y' = P'\Delta x^r + Q'\Delta x^{r+1}$ geben würde, mithin wäre nach (12. §. Zus.).

$$\Delta^{r+1} y = \Delta^r y' - \Delta^r y = (P'-P)\Delta x^r + (Q'-Q)\Delta x^{r+1}$$
$$= (\Delta P.\Delta x^r + \Delta Q.\Delta x^{r+1}.$$

6) Nun aber soll, vermöge der Voraussetzung P bey $\Delta^r y$ in (n. 4.) von Δx ganz unabhängig seyn: da also ΔP die erste Differenz von P als einer Function von x ausdrückt; so giebt es dafür gewiß einen Werth $\Delta P = p\Delta x + \varphi\Delta x^2$, wo p, φ in der Bedeutung von α, ψ in (6. §. 1. u. 2. Zus.) genommen werden.

7) Ferner soll Q in (n. 4.) entweder gleich Null, oder eine unveränderliche von x und Δx unabhängige Grösse, oder eine Function von x, oder auch von Δx seyn: da also ΔQ die erste Differenz von Q als einer Function von x bedeutet; so ist kein Zweifel, daß es auch für ΔQ einen Werth $\Delta Q = k\Delta x + K\Delta x^2$ giebt, mit dem Unterschiede nur, daß hier nicht nur K sondern auch k von Δx abhängen kann, wenn nämlich Q in denjenigen Gliedern Δx enthält, welche die veränderliche Grösse x enthalten (6. §. 1. u. 2. Zus.).

8) Setzt

8) Setzt man daher die Werthe von ΔP, ΔQ aus (n. 6. 7.) in (n. 5.); so wird seyn:

$$\Delta^{r+1}y = (p\Delta x + \varphi\Delta x^2)\Delta x^r + (k\Delta x + K\Delta x^2)\Delta x^{r+1}$$

$$\Delta^{r+1}y = p\Delta x^{r+1} + (\varphi + k)\Delta x^{r+2} + K\Delta x^{r+3},$$

$$\Delta^{r+1}y = p\Delta x^{r+1} + L\Delta x^{r+2} \text{ für } L = \varphi + k + K\Delta x.$$

Nun war p von Δx in (n. 6.) ganz unabhängig: also ist die $(r+1)$te Differenz $\Delta^{r+1}y$ jeder Function y von x dem Gesetze (n. 2.) vollkommen unterworfen, wenn dieses Gesetz für ihre rte Differenz $\Delta^r y$ gielt, wie es in (n. 4.) angenommen wurde.

1. Zusatz.

Jede rte Differenz jeder Function y von einer absoluten veränderlichen Grösse x kann daher durch $\Delta^r y = P\Delta x^r + Q\Delta x^{r+1}$ ausgedrückt werden, wobey P von Δx ganz unabhängig ist: daraus würde aber der rte Differenz-Quotient $= P + Q\Delta x$, und aus diesem für $\Delta x = 0$ der rte Verschwindungs-Quotient $= P$ entstehen, welches $d^r y = P$ bedeuten soll (13. §.).

2. Zusatz.

Es erhellet ferner aus der Auflösung der vorigen Aufgabe (n. 6. 8.), daß die $(r+1)$te Differenz jeder Function y mit ihrer rten Differenz (1. Zus.) dergestalt verbunden seyn muß, daß, wenn die erste Differenz $\Delta P = p\Delta x + \varphi\Delta x^2$ wäre, die $(r+1)$te Differenz von y allemal $\Delta^{r+1}y = p\Delta x^{r+1} + L\Delta x^{r+2}$ seyn müßte, da also aus jener Differenz der erste Differenz-Quotient $= p + \varphi\Delta x$, und hieraus der erste Verschwindungs-Quotient $dP = p$ folgt;

folgt; aus der andern Differenz aber der (r+1)te Differenz-Quotient = p + LΔx, und hieraus der (r+1)te Verschwindungs-Quotient $d^{r+1}y = p$ entstehet (13. §.); so ist $d^{r+1}y = dP = d.d^{r}y$ (1. Zus.), das heißt: der (r+1)te Verschwindungs-Quotient $d^{r+1}y$ jeder Function y von x ist dem ersten Verschwindungs-Quotienten gleich, welcher, als einer Function von x, dem rten Verschwindungs-Quotienten der Function y zugehört.

3. Zusatz.

Ist also ein rter Verschwindungs-Quotient $d^{r}y = P$ bey einer Function y von x keine Function von x; so wird es für dieselbe Function y keinen (r+1)ten Verschwindungs-Quotienten $d^{r+1}y = dP$ (2. Zus.), und so auch keinen höhern geben können (5. §. 4. Zus.).

4. Zusatz.

Jeder (r+1)te Verschwindungs-Quotient einer Function y von x ist in Ansehung ihres rten Verschwindungs-Quotienten das, was der erste Verschwindungs-Quotient in Ansehung der Function y war (2. Zus.): also müssen die in (6. §. 5. 6. 7. 8. 9. Zus.). angeführten Sätze für alle Verschwindungs-Quotienten gelten, welche gewissen Functionen von einer veränderlichen Grösse x zugehören. Es muß ferner aus eben derselben Ursache jeder Verschwindungs-Quotient einer Function y von x, wenn er nicht = 0 wegen (3. Zus.) ist, eine wirkliche durch die Function y vollkommen bestimmte Grösse seyn, so wie es der erste Verschwindungs-Quotient seyn muß (6. §. 3. Zus.).

5. Zusatz.

Der Umstand, daß eine Function y und jeder ihr zugehöriger Verschwindungs-Quotient sowohl der Grösse als der Form nach dergestalt von einander abhängen, daß die Grösse und Form jedes Verschwindungs-Quotienten durch die Grösse und Form der Function selbst, als ihre Grundursache, bestimmt ist (4. Zus.), dient zum Beweis, daß auch die Eigenschaften einer Function y und die der ihr zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dergestalt von einander abhängen müssen, daß es gewisse Gesetze geben muß, wornach die einen aus den andern sich herleiten lassen (2. §. 1. Zus.), und dieses ist der Grund mancher wichtigsten Entdeckungen, auf welche die Betrachtung der Verschwindungs-Quotienten führen kann, wie es in der Folge erhellen wird.

15. §. Aufgabe.

Die Verschwindungs-Quotienten $dy, d^2y, d^3y \ldots$, welche einer Function y von einer absoluten veränderlichen Grösse x zugehören, anzugeben.

Auflösung. Aus (6. §. 2. Zus.) folgt, daß es für jede Function von x einen ersten Verschwindungs-Quotienten $dy = M$ giebt, welcher durch $dy = Mdx$ (5. §. 3. Zus.) ausgedrückt werden kann. Um nun den zweyten Verschwindungs-Quotienten von y zu finden, nehme man den ersten Verschwindungs-Quotienten von $dy = Mdx$, daher $dx.dM$ (5. §. 7. Zus.); so wird seyn $d^2y = Ndx^2$, wenn $dM = Ndx$ gefunden wird (14. §. 2. Zus.). Will

man

man ferner den dritten Verſchwindungs-Quotienten von y haben; ſo nehme man den erſten von $d^2y = N dx^2$, mithin $dx^2 . dN$ (5. §. 7. Zuſ.), und ſetze $d^3y = P dx^3$, wofern $dN = P dx$ gefunden wird. Und überhaupt, wenn $d^r y = R dx^r$ der rte Verſchwindungs-Quotient von y iſt; ſo nehme man den erſten $dR = S dx$ von R, um dadurch den der Function y zugehörigen $(r+1)$ten $d^{r+1}y = S dx^{r+1}$ zu beſtimmen (14. §. 2. Zuſ.).

Beyſpiele.

Für $y = Ax^a$,

iſt $dy = aAx^{a-1} dx$, und $d . aAx^{a-1} = a(a-1)Ax^{a-2} dx$:

alſo $d^2y = a(a-1)Ax^{a-2} dx^2$,

und $d . a(a-1)Ax^{a-2} = a(a-1)(a-2)Ax^{a-3} dx$:

alſo $d^3y = a(a-1)(a-2)Ax^{a-3} dx^3$.

Überhaupt für $d^r y = a(a-1) \cdots (a-r+1)Ax^{a-r} dx^r$

iſt $d^{r+1}y = a(a-1) \cdots (a-r+1)(a-r)Ax^{a-r-1} dx^{r+1}$.

Für $y = x$ iſt $dy = dx$, und $d^2y = 0$ (14. §. 3. Zuſ.).

Für $y = x^2$ iſt $dy = 2x dx$; $d^2y = 2dx^2$; $d^3y = 0$ (14. §. 3. Z.).

Für $y = x^3$ iſt $dy = 3x^2 dx$; $d^2y = 6x dx^2$; $d^3y = 6dx^3$; $d^4y = 0$

Für $y = \frac{1}{x}$ iſt $dy = \frac{-dx}{x^2}$; $d^2y = \frac{2dx^2}{x^3}$; $d^3y = \frac{-6dx^3}{x^4}$ u. ſ. f.

Für $y = \frac{1}{x^2}$ iſt $dy = \frac{-2dx}{x^3}$; $d^2y = \frac{6dx^2}{x^4}$; $d^3y = \frac{-24dx^3}{x^5}$ u. ſ. f.

Für $y = \sqrt{x}$ iſt $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; $d^2y = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}$; $d^3y = \frac{3dx^3}{8x^2\sqrt{x}}$ u. ſ. f.

Für $y = \sqrt[3]{x}$

ist $dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $d^2y = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$; $d^3y = \frac{10dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$ u. s. f.

Für $y = a + bx^2 - cx^3$ ist $dy = (2bx - 3cx^2)dx$;

$d^2y = (2b - 6cx)dx^2$; $d^3y = -6cdx^3$; $d^4y = 0$.

Für $y = \sqrt{(1-x^2)}$ ist $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$;

$d^2y = \frac{-dx^2}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$; $d^3y = \frac{-3xdx^3}{(1-x^2)^2\sqrt{(1-x^2)}}$

u. s. f.

Für $y = \frac{x^2}{\sqrt{(a^4+x^4)}}$ ist $dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)\sqrt{(a^4+x^4)}}$;

$d^2y = \frac{(2a^8 - 10a^4x^4)dx^2}{(a^4+x^4)^2\sqrt{(a^4+x^4)}}$ u. s. f.

Zusatz.

Wird eine Function y durch was immer für Functionen u, v, z von einer absoluten veränderlichen Grösse x bestimmt; so wird man die der Function y zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dy, d^2y, d^3y u. s. f. durch die Verschwindungs-Quotienten du, dv, dz, d^2u, d^2v, d^2z, d^3u, d^3v, d^3z u. s. f. bestimmen müssen.

Beyspiele.

Sey $y = az^n$.

so ist $dy = naz^{n-1}dz$ nach (8. §.):

also $d^2y = d.naz^{n-1}dz$ nach (Aufgabe),

mithin $d^2y = n(n-1)az^{n-2}dz^2 + naz^{n-1}d^2z$ nach (8. 9. §.).

Daher

Daher $d^3y = d(n(n-1)az^{n-2}dz^2 + naz^{n-1}d^2z)$ nach (Aufg.),
folglich nach (5. §. 6. Zuſ. und 8. 9. §.)

$$d^3y = n(n-1)(n-2)az^{n-3}dz^3 + n(n-1)az^{n-2}d.dz^2$$
$$+ n(n-1)az^{n-2}dzd^2z + naz^{n-1}d^3z$$
$$= n(n-1)(n-2)az^{n-3}dz^3 + n(n-1)az^{n-2}.2dzd^2z$$
$$+ n(n-1)az^{n-2}dzd^2z + naz^{n-1}d^3z$$
$$= n(n-1)(n-2)az^{n-3}dz^3 + naz^{n-1}d^3z$$
$$+ 3n(n-1)az^{n-2}dzd^2z.$$

u. ſ. f.

Sey $y = uv$

ſo iſt $dy = udv + vdu$ nach (9. §.):

alſo $d^2y = ud^2v + dudv + vd^2u + dvdu$ nach (Aufg. u. 9. §.).
$= ud^2v + vd^2u + 2dudv.$

Ferner nach (Aufgabe und 9. §.).

$$d^3y = ud^3v + dud^2v + vd^3u + dvd^2u + 2dud^2v + 2d^2udv$$
$$= ud^3v + vd^3u + 3dud^2v + 3dvd^2u.$$

u. ſ. f.

Der III. Abschnitt.

Von Verschwindungs-Quotienten, welche Logarithmischen und Trigonometrischen Functionen, wie auch den Exponentialgrössen zugehören.

16. §. Erklärung.

Jedes logarithmische System ist durch eine Grundzahl a dergestalt bestimmt, daß $z = a^l$ seyn muß, wenn z eine gewisse Zahl, und l den ihr bey demselben Systeme zugehörigen Logarithmen bedeutet (I. B. 134. §.). Sind a, A die Grundzahlen zweyer logarithmischen Systeme, so werden sich zwo andere Zahlen m, M dergestalt damit verbinden lassen, daß dafür $a^m = A^M$ sey: die Zahlen m, M sollen die mit den Grundzahlen a, A verbundenen Moduln der logarithmischen Systeme heissen, und wenn man $m = 1$ setzt; so heißt das logarithmische System, wo dieses geschieht, wo nämlich der Modul $= 1$ gesetzt wird, das natürliche, und jedes andere, wo der Modul $M > 1$ oder $M < 1$ ist, das künstliche System.

1. Zusatz.

Die Grundzahl A jedes künstlichen Systems hängt von dem Modul M desselben Systems, und der Grundzahl a des natürlichen Systems dergestalt ab, daß $A = a^{\frac{1}{M}}$ ist: ferner ist $a = A^M$, mithin $M = \log \text{art } a$, oder der Modul eines künstlichen Systems wird durch den künst-

künſtlichen Logarithmen von der Grundzahl der natürlichen Logarithmen beſtimmt.

2. Zuſatz.

Wenn L, l die Logarithmen bedeuten, welche einer Zahl z bey zweyen Syſtemen zugehören, derer Grundzahlen A, a und Moduln M, m ſeyn mögen; ſo iſt $A^M = a^m$, und $A = a^{\frac{m}{M}}$: alſo $A^L = a^{\frac{mL}{M}}$. Aber $A^L = z$, daher auch $a^{\frac{mL}{M}} = z$, folglich, wegen $a^l = z$, iſt $\frac{mL}{M} = l$, $L = \frac{Ml}{m}$, $L : l = M : m$, das heißt: die einer und eben derſelben Zahl z bey zweyen Syſtemen zugehörigen Logarithmen verhalten ſich gegen einander wie die Moduln der Syſteme.

3. Zuſatz.

Für $m = 1$ würde l den natürlichen Logarithmen der Zahl z bedeuten, und es wäre $l = \frac{L}{M}$, $L = Ml$ (2. Zuſ.): aus jedem künſtlichen Logarithmen L einer Zahl z wird daher der natürliche Logarithme l derſelben Zahl erhalten, wenn man jenen durch den Modul des Syſtems, zu welchem er gehört, dividirt; und aus dem natürlichen Logarithmen einer Zahl z entſtehet jeder künſtliche Logarithme derſelben Zahl, wenn man jenen mit dem Modul des Syſtems, zu welchem dieſer gehört, multiplicirt.

4. Zusatz.

Für die Grundzahl A eines künstlichen Systems wäre der Logarithme, der ihr bey eben demselben Systeme zugehört, $=1$, oder Log art $A=1$ (I. B. 134. §. 3. Zus.): also, wenn M den zu diesem Systeme gehörigen Modul bedeutet, wäre Log art $A=M$ log nat A nach (3. Zus.), mithin $M=\frac{1}{\text{Log nat A}}$.

17. §. Aufgabe.

Es sey z was immer für eine absolute oder abhängige veränderliche Zahl (2. §. 3. Zus.), und $y=\log z$; man soll den Verschwindungs-Quotienten bestimmen, welcher dieser logarithmischen Function von z zugehört.

Auflösung. 1) Wenn u den natürlichen Logarithmen von z bedeutet, es mag $y=\log z$ zu was immer für einem Systeme gehören, dessen Modul $=M$ und die Grundzahl $=A$ ist; so muß seyn $y=Mu$ (15. §. 3. Z.), mithin $dy=Mdu$ (6. §. 5. Zus. 5. §. 7. Zus.). Das heißt: wenn y nicht den natürlichen Logarithmen von z bedeutet, sondern was immer für einen künstlichen; so wird man den ihm zugehörigen Verschwindungs-Quotienten aus dem Verschwindungs-Quotienten, welcher dem natürlichen Logarithmen von z zugehört, allemal dadurch erhalten, wenn man diesen Quotienten mit dem Modul des Systems multiplicirt, zu welchem der künstliche Logarithme gehört.

2) Nun

2) Nun sey e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so ist, weil log. nat. $z=u$ seyn soll, $e^u=z$, mithin $e=z^{\frac{1}{u}}$.

3) Nimmt man aber an, daß z um eine Differenz Δz wächst, daher $z+\Delta z$ aus z wird; so muß nothwendig auch der Logarithme u von z zunehmen, etwa $u'=\log(z+\Delta z)$ aus $u=\log. z$ werden (I. B. 134. §. 2. Zus.): also ist bey der Grundzahl e nun $e^{u'}=z+\Delta z$, folglich $e=(z+\Delta z)^{\frac{1}{u'}}$.

4) Aus (n. 2. 3.) erhält man die Gleichung $z^{\frac{1}{u}}=(z+\Delta z)^{\frac{1}{u'}}$, welche nach (I. B. 76. §. 7. Zus.) giebt:

$$z^{\frac{1}{u}}=z^{\frac{1}{u'}}+\frac{1}{u'}z^{\frac{1-u'}{u'}}.\Delta z+\frac{1-u'}{2(u')^2}z^{\frac{1-2u'}{u'}}.\Delta z^2$$

$$+\frac{(1-u')(1-2u')}{2.3(u')^3}z^{\frac{1-3u'}{u'}}.\Delta z^3+\ldots\ldots$$

5) Aus dieser Gleichung findet man u', wenn man alles, was auf beyden Seiten stehet, mit u' multiplicirt, und durch $z^{\frac{1}{u}}$ dividirt, nämlich:

$$u'=u'.z^{\frac{1}{u'}-\frac{1}{u}}+z^{\frac{1-u'}{u'}-\frac{1}{u}}.\Delta z+\frac{1-u'}{2u'}z^{\frac{1-2u'}{u'}-\frac{1}{u}}.\Delta z^2$$

$$+\frac{(1-u')(1-2u')}{2.3(u')^2}z^{\frac{1-3u'}{u'}-\frac{1}{u}}.\Delta z^3+\ldots\ldots$$

Da aber u' den neuen Werth bedeutet, welchen die Function $u=$Log. nat. z erlanget, während daß z um

Δz wächst; so wird $u' - u = \Delta u$ die Differenz derselben Function seyn (3. §. 3. Zus.): sie ist also:

$$\Delta u = -u + u' z^{\frac{1}{u'} - \frac{1}{u}} + z^{\frac{1-u'}{u'} - \frac{1}{u}} . \Delta z + \frac{1-u'}{2u'} z^{\frac{1-2u'}{u'} - \frac{1}{u}} . \Delta z^2$$

$$+ \frac{(1-u')(1-2u')}{2.3(u')^2} . z^{\frac{1-3u'}{u'} - \frac{1}{u}} . \Delta z^3 + \text{- - - - - - -}$$

6) Hier kann, vermöge der Voraussetzung, z eine absolute oder abhängige veränderliche Zahl seyn; für jeden Fall kann man x die absolute veränderliche Zahl nennen, auf welche $u = \log. \text{nat } z$ sich beziehen mag, und z als eine Function davon betrachten, deren Differenz $\Delta z = \alpha \Delta x + \psi \Delta x^2$ und der Verschwindungs-Quotient $dz = \alpha$ wäre (6. §. 3. Zus.), welches allemal gelten wird, auch wenn z die absolute veränderliche Zahl ist, weil alsdann $z = x$, $\Delta z = \Delta x$, mithin $\psi = 0$, $\alpha = 1 = dx = dz$ seyn wird. Man setze also den angeführten Werth von Δz in die Formul (n. 5.), und dividire alles durch Δx; so wird man den Werth von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ als den Differenz-Quotienten der Function $u = \log \text{nat } z$, wie folgt, erhalten (5. §.).

$$\frac{-u}{\Delta x} + \frac{u' z^{\frac{1}{u'} - \frac{1}{u}}}{\Delta x} + z^{\frac{1-u'}{u'} - \frac{1}{u}} . \alpha + z^{\frac{1-u'}{u'} - \frac{1}{u}} . \psi \Delta x$$

$$+ \frac{1-u'}{2u'} z^{\frac{1-2u'}{u'} - \frac{1}{u}} . (\alpha + \psi \Delta x)^2 . \Delta x$$

$$+ \frac{(1-u')(1-2u')}{2.3(u')^2} z^{\frac{1-3u'}{u'} - \frac{1}{u}} . (\alpha + \psi \Delta x)^3 . \Delta x^2$$

$$+ \text{- - - - - - - - - - -}$$

7) Und

7) Und aus diesem Differenz-Quotienten findet man ferner den Verschwindungs-Quotienten du (5. §.), wofern man bey ihm $\Delta x = o$ setzt: da also vom vierten Gliede an alle folgende Glieder dafür gleich Null werden, und $\Delta z = o$ für $\Delta x = o$ in (n. 6.), mithin $u' = u$ in (n. 3.) wird, wofür die Summe der zwey ersten Glieder (n. 6.) in

$$\frac{-u}{\Delta x} + \frac{uz^{\frac{x}{u}-\frac{x}{u}}}{\Delta x} = \frac{-u}{\Delta x} + \frac{u}{\Delta x} = o,$$

und das dritte Glied in $z^{\frac{x-u}{u}-\frac{x}{u}} . \alpha = z^{-1} . \alpha = \frac{\alpha}{z}$ übergehet; so ist

$$du = \frac{\alpha}{z} = \frac{dz}{z}$$ wegen (n. 6.).

1. Zusatz.

Wenn z eine absolute veränderliche Zahl (2. §. 3. Zus.) bedeutet, deren natürlicher Logarithme u heißt; so ist $du = \frac{dz}{z}$ und $dz = 1$: ist aber z eine abhängige veränderliche Zahl, mithin eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Zahl x; so ist auch $du = \frac{dz}{z}$, und dz der Verschwindungs-Quotient der Function z von x. Bedeutet ferner y den künstlichen Logarithmen von z bey einem Systeme, dessen Modul $= M$ seyn mag; so ist in jedem Fall $dy = M . \frac{dz}{z}$ (vor. Aufl. n. 1.): in der Folge sollen die natürlichen Logarithmen überall verstanden werden, wo das Gegentheil nicht ausdrücklich angezeigt wird.

2. Zusatz.

Daher $dx = 1$ dividirt durch eine absolute veränderliche Zahl x giebt den ersten Verschwindungs-Quotienten $dy = \frac{dx}{x}$ der logarithmischen Function $y = lx$, woraus die höheren Verschwindungs-Quotienten nach (15. §.) gefunden werden: nämlich

$$d^2y = \frac{-dx^2}{x^2},\ d^3y = \frac{2dx^3}{x^3},\ d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4}\ \text{u. s. f.}$$

3. Zusatz.

Und der Verschwindungs-Quotient dz einer jeden Function z von x dividirt durch die Function z selbst giebt den ersten Verschwindungs-Quotienten $dy = \frac{dz}{z}$ der logarithmischen Function $y = lz$ von z, woraus die höheren Verschwindungs-Quotienten $d^2y, d^3y \ldots$, wo sie nöthig seyn möchten, nach (15. §.) bestimmt werden könnten. Folgende Beyspiele sind für die Folge merkwürdig.

Beyspiele.

I. Sey $y = l(a - x^2)$.

So ist $dy = \frac{d(a-x^2)}{a-x^2} = \frac{\mp 2xdx}{a-x^2}$.

II. Sey $y = \frac{a}{b} l \frac{x}{b \pm cx}$.

Für $z = \frac{x}{b \pm cx}$ ist $y = \frac{a}{b} lz$ und $dy = \frac{adz}{bz}$.

Nun

Nun ist $dz = \frac{b\,dx}{(b \pm cx)^2}$ nach (9. §. 3. Zus.):

also $dy = \frac{a\,dx}{x(b \pm cx)}$.

III. Sey $y = \frac{a}{b} l \frac{x}{\sqrt{(b \pm cx^2)}}$.

Für $z = \frac{x}{\sqrt{(b \pm cx^2)}}$ ist $y = \frac{a}{b} lz, dy = \frac{a\,dz}{bz}$.

Nun ist $dz = \frac{b\,dx}{(b \pm cx^2)\sqrt{(b \pm cx^2)}}$ nach (9. §. 3. Z.):

also $dy = \frac{a\,dx}{x(b \pm cx^2)}$.

IV. Sey $y = \frac{a}{\sqrt{b}} l \frac{\sqrt{(b+cx)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cx)} + \sqrt{b}}$.

Für $z = \frac{\sqrt{(b+cx)} - \sqrt{b}}{\sqrt{(b+cx)} + \sqrt{b}}$ ist $y = \frac{a}{\sqrt{b}} lz, dy = \frac{a\,dz}{z\sqrt{b}}$.

Nun ist $dz = \frac{c\,dx\sqrt{b}}{(\sqrt{(b+cx)} + \sqrt{b})^2 \sqrt{(b+cx)}}$:

also $dy = \frac{a\,dx}{x\sqrt{(b+cx)}}$.

V. Sey $y = \frac{a}{2\sqrt{bc}} l \frac{\sqrt{b} + x\sqrt{c}}{\sqrt{b} - x\sqrt{c}}$.

Für $z = \frac{\sqrt{b}+x\sqrt{c}}{\sqrt{b}-x\sqrt{c}}$ ist $y = \frac{a}{2\sqrt{bc}} lz, dy = \frac{a\,dz}{2z\sqrt{bc}}$.

Aber $dz = \frac{2\,dx\sqrt{bc}}{(\sqrt{b} - x\sqrt{c})^2}$: also $dy = \frac{a\,dx}{b - cx^2}$.

VI. Sey $y = \frac{a}{\sqrt{b}} l(x\sqrt{b} + \sqrt{(bx^2 \pm c)})$.

Für

Für $z = x\sqrt{b} + \sqrt{(bx^2 \pm c)}$ ist $y = \frac{a}{\sqrt{b}} lz$, $dy = \frac{adz}{z\sqrt{b}}$.

Nun ist $dz = dx\sqrt{b} + \frac{bxdx}{\sqrt{(bx^2 \pm c)}}$:

also ist $dy = \frac{adx}{\sqrt{(bx^2 \pm c)}}$.

VII. Sey $y = \frac{a}{\sqrt{c}} l\left(x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{(bx + cx^2)}\right)$.

Für $z = x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{(bx + cx^2)}$ ist $y = \frac{a}{\sqrt{c}} lz$, $dy = \frac{adz}{z\sqrt{c}}$.

Nun ist $dz = dx\sqrt{c} + \frac{(b + 2cx)dx}{2\sqrt{(bx + cx^2)}}$:

also ist $dy = \frac{adx}{\sqrt{(bx + cx^2)}}$.

VIII. Sey $y = \frac{a}{2\sqrt{b}} l \frac{\sqrt{b} - \sqrt{(b - cx^2)}}{\sqrt{b} + \sqrt{(b - cx^2)}}$.

Für $z = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{(b - cx^2)}}{\sqrt{b} + \sqrt{(b - cx^2)}}$ ist $y = \frac{a}{2\sqrt{b}} lz$, $dy = \frac{adz}{2z\sqrt{b}}$.

Nun ist $dz = \frac{2cxdx\sqrt{b}}{(\sqrt{b} + \sqrt{(b - cx^2)})^2 \sqrt{(b - cx^2)}}$:

also $dy = \frac{adx}{x\sqrt{(b - cx^2)}}$.

4. Zusatz.

Wenn man die vorhergehende Lehre mit der des 2ten Abschnittes verbindet; so wird man sich dadurch in den Stand setzen, die Verschwindungs-Quotienten aller Functionen y von einer absoluten veränderlichen Grösse x zu bestimmen, wie immer auch logarithmische Functionen

von

von x mit andern verbunden seyn mögen: bisweilen wird man überdem die Arbeit dadurch erleichtern, wenn man vorgelegte Functionen in einfachere verwandelt, wie es mit Zuziehung der Sätze (I. B. 135. 136. §.) oft geschehen kann.

Beyspiele.

I. Sey $y=(lx)^n$.

Es ist $dy=n(lx)^{n-1}.dlx$ nach (8. §.);

und $dlx=\frac{dx}{x}$; also $dy=\frac{n(lx)^{n-1}.dx}{x}$.

II. Sey $y=x^m lx-\frac{1}{m}x^m$.

Es ist $dy=d.x^m lx-d.\frac{1}{m}x^m$ nach (5.§. 6.Z.)

Nun ist $d.x^m lx=x^m.dlx+lx.d.x^m$ (9. §.).

$=x^m.\frac{dx}{x}+lx.mx^{m-1}dx=(mlx+1)x^{m-1}dx$,

und $d.\frac{1}{m}x^m=x^{m-1}dx$: also $dy=mx^{m-1}lxdx$.

III. Sey $y=x^m(lx)^n$.

Es ist $dy=x^m.d.(lx)^n+(lx)^n.d.x^m$ (9. §.).

$=x^m.\frac{n(lx)^{n-1}dx}{x}+(lx)^n.mx^{m-1}dx$

$=nx^{m-1}dx(lx)^{n-1}+mx^{m-1}dx(lx)^n$.

IV. Sey $y=l\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ..

Es

Es ist $y = l\,1 - l\sqrt{(1-x^2)} = -l\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1}{2} l(1-x^2)$:

also $dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{-x\,dx}{1-x^2}$.

V. Sey $y = \log (a+x)(b+x)(c+x)$.

Es ist $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$:

also $dy = \frac{d(a+x)}{a+x} + \frac{d(b+x)}{b+x} + \frac{d(c+x)}{c+x}$ (5. §. 6. Zus.),

daher $dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}$.

VI. Sey $y = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(1+x^2)}+x}{\sqrt{(1+x^2)}-x}$.

Es ist $y = \frac{1}{2} l\,(\sqrt{(1+x^2)}+x) - \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+x^2)}-x)$:

also $dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\sqrt{(1+x^2)}+x)}{\sqrt{(1+x^2)}+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\sqrt{(1+x^2)}-x)}{\sqrt{(1+x^2)}-x}$,

daher $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

Leichter hätte man diesen Quotienten finden können, wenn man nämlich die Function y folgendermassen verwandelt hätte.

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{(1+x^2)}+x)^2}{(\sqrt{(1+x^2)}-x)(\sqrt{(1+x^2)}+x)} = l(\sqrt{(1+x^2)}+x),$$

mithin $dy = \frac{d(\sqrt{(1+x^2)}+x)}{\sqrt{(1+x^2)}+x} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

VII. Sey $y = \log \frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}$.

Für

Für $u=\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}, v=\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}$,

ist $y=l\frac{u}{v}=lu-lv$, $dy=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}=\frac{-dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

Man hätte aber denselben Quotienten leichter finden können, nämlich wenn man zuvor den Zähler und Nenner von y mit dem Zähler hätte multipliciren wollen; denn es wäre geworden:

$$y=l\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}=l(1+\sqrt{(1-x^2)})-lx:$$

also $dy=\frac{d(1+\sqrt{(1-x^2)})}{1+\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{dx}{x}=\frac{-dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

5. Zusatz.

Die Aufsuchung der Verschwindungs-Quotienten, welche Logarithmen von Logarithmen zugehören, beruhet auf eben denselben Gründen.

Beyspiele.

I. Sey $y=\log lx$.

Für $z=lx$ ist $y=\log z$; $dy=\frac{dz}{z}$,

und $dz=\frac{dx}{x}$: also $dy=\frac{dx}{zx}=\frac{dx}{xlx}$.

III. Sey $y=\mathrm{Log}\,llx$.

Für $z=llx$ ist $y=lz$, $dy=\frac{dz}{z}$.

Es war aber $dz=\frac{dx}{xlx}$:

also $dy=\frac{dx}{zxlx}=\frac{dx}{xlx.llx}$.

6. Zuſatz.

Der den logarithmiſchen Functionen zugehörigen Verſchwindungs-Quotienten kann man ſich zur Erfindung der Reihen bedienen (14. §. 5. Zuſ.), welche zur Berechnung der Logarithmen erfordert werden (I. B. 137. §.). Der Logarithme einer Zahl $1+x$ ſey nämlich y, mithin $y=\log(1+x)$; ſo iſt nach (3. Zuſ.)

$$dy=\frac{d(1+x)}{1+x}=\frac{dx}{1+x}.$$

Sey ferner $y=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\ldots$

ſo iſt $dy=(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots)dx$

alſo $\frac{1}{1+x}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots$,

mithin $1=A+2B)x+3C)x^2+4D)x^3+5E)x^4+\ldots$
$\quad\quad +A)\quad +2B)\quad +3C)\quad +4D)+\ldots$

Demnach nach (I. B. 83. §. Zuſ.).

$A=1$; $2B+A=0$; $3C+2B=0$; $4D+3C=0$; $5E+4D=0$

u. ſ. f.

Folglich $A=1$; $B=-\frac{1}{2}$; $C=\frac{1}{3}$; $D=-\frac{1}{4}$; $E=\frac{1}{5}$

u. ſ. f.

Und nun

$$y=\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\ldots$$

7. Zuſatz.

Aus $y=lx$ folgt $dy=\frac{dx}{x}$: alſo $dx=xdy$ für den Verſchwindungs-Quotienten der Zahl x als einer Function

von ihrem Logarithmen $y = \log x$ (11. §. Zuſ.). Man ſetze aber, es ſey x folgende Function von $y = \log x$.

$$x = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots;$$

ſo iſt $dx = A\,dy + 2By\,dy + 3Cy^2\,dy + 4Dy^3\,dy + 5Ey^4\,dy$:

da alſo $dx = x\,dy$ war;

$$1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + 5Ey^4 + \ldots$$

und nun nach (I. B. 83. §. Zuſ.).

$$A = 1;\ 2B = A;\ 3C = B;\ 4D = C;\ 5E = D \text{ u. ſ. f.}$$

mithin $A = 1;\ B = \frac{1}{2};\ C = \frac{1}{2.3};\ D = \frac{1}{2.3.4};\ E = \frac{1}{2.3.4.5}$

u. ſ. f.

Folglich

$$x = 1 + \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{1}{2.3}(\log x)^3 + \frac{1}{2.3.4}(\log x)^4 + \ldots \ldots$$

8. Zuſatz.

Aus $y = e^z$ folgt $ly = zle$: alſo $dly = d.zle$ (6. §. 5. Zuſ.) $= le.dz$ (5. §. 7. Zuſ.): nun iſt $dly = \frac{dy}{y}$ (3. Zuſ.); daher $\frac{dy}{y} = le.dz$, und $dy = yle.dz$ oder $dy = e^z le.dz$. Das heißt: der Verſchwindungs-Quotient, welcher einer Exponentialgröſſe, d. i. einer mit einem veränderlichen Exponenten z verſehenen Potenz e^z zugehört, wird dadurch erhalten, wenn man dieſelbe Exponentialgröſſe mit dem Logarithmen ihrer Wurzel e und mit dem Verſchwindungs-Quotienten ihres Exponenten z multiplicirt.

9. Zusatz.

Ist z eine absolute veränderliche Zahl, mithin $dz = 1$ (5. §. 3. Zus.); so ist $dy = e^z 1e . dz = e^z 1e$ für $y = e^z$. Ist aber z eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Zahl x und $dz = \alpha dx = \alpha$; so ist $dy = e^z \alpha 1e$ für $y = e^z$.

Z. B. Für $z = x - 2x^2$, daher $dz = (1 - 4x)dx = 1 - 4x$ wäre $y = e^{x-2x^2}$, und $dy = e^{x-2x^2} . (1-4x) 1e$.

10. Zusatz.

Wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet; so ist $1e = 1$: also, für $y = e^z$, ist $dy = e^z . dz$ (8. Zus.), oder $dy = e^z$, wenn z eine absolute veränderliche Zahl ist (9. Zus.).

18. §. Grundsatz.

Es kann keine so grosse Zahl gegeben werden, daß man nicht noch eine grössere geben könnte; oder jede wie immer grosse Zahl läßt sich wenigstens um Eins vermehren.

Zusatz.

Es mag also K eine wie immer grosse Zahl bedeuten (die Gattung, zu welcher ihre Einheiten gehören mögen, kömmt hier gar nicht in Anschlag); so kann man noch allemal eine andere Zahl $m > K$ nehmen.

19. §. Lehrsatz.

Wenn A, B, C, D . . . P, Q . . . was immer für Grössen sind, die doch von der Differenz Δx einer absolu-

abſoluten veränderlichen Gröſſe x ganz unabhängig ſeyn ſollen; wenn ferner r eine ganze bejahte Zahl iſt; ſo wird man die Differenz Δx allemal ſo nehmen können, daß dafür $B\Delta x^{r+1}+C\Delta x^{r+2}+D\Delta x^{r+3}+\cdots+P\Delta x^{r+m}+\cdots < A\Delta x^{r}$ ſey.

Beweis. 1) Sey $S = B\Delta x^{r+1}+C\Delta x^{r+2}+D\Delta x^{r+3}+\cdots$ Man kann nun nicht wiſſen, ob die Coefficienten B, C, D--- alle einander gleich, oder alle ungleich, oder einige gleich, und andere ungleich ſind; doch aber iſt gewiß, daß dieſelben Coefficienten als abſolute Zahlen betrachtet werden können, und ſich eine Zahl Z angeben läßt, welche gröſſer iſt, als der gröſte unter denſelben Coefficienten, wofür daher wäre:

$$Z\Delta x^{r+1}+Z\Delta x^{r+2}+Z\Delta x^{r+3}+\cdots > S,$$

oder $Z(\Delta x^{r+1}+\Delta x^{r+2}+\Delta x^{r+3}+\cdots) > S.$

2) Heißt aber a die Anzahl der Glieder, aus welchen die zwiſchen den Klammern befindliche geometriſche Progreſſion beſtehet, weil ihr Exponent $=\Delta x$, und erſtes Glied $=\Delta x^{r+1}$ iſt; ſo läßt ſich die Summe ihrer Glieder nach (I. B. 151. §. XVIII.) ausdrücken, und dafür wäre:

$$\frac{Z\Delta x^{r+1}(1-\Delta x^{a})}{1-\Delta x} > S.$$

3) Ferner mag Z in (n. 1.), daher auch $\frac{(Z+A)x}{A}$ eine wie immer groſſe Zahl bedeuten; ſo wird ſich doch eine andere Zahl $m > \frac{(Z+A)x}{A}$ nehmen laſſen (18. §. Zuſ.), und alsdann wird ſeyn $\frac{1}{m}x < \frac{A}{Z+A}$. Da alſo die

Differenz Δx kein bestimmtes Stück von x bedeutet (3. §. 1. Zus.); so wird man $\Delta x = \frac{1}{m} x$, mithin $\Delta x < \frac{A}{Z+A}$ nehmen können, und hieraus wird folgen:

$Z\Delta x + A\Delta x < A$; daher $Z\Delta x < A - A\Delta x$:

also $Z\Delta x^{r+1} < A\Delta x^r - A\Delta x^{r+1}$ und $\frac{Z\Delta x^{r+1}}{1-\Delta x} < A\Delta x^r$.

4) Endlich ist $Z\Delta x^{r+1}(1-\Delta x^2) < Z\Delta x^{r+1}$: also auch

$$\frac{Z\Delta x^{r+1}(1-\Delta x^2)}{1-\Delta x} < \frac{Z\Delta x^{r+1}}{1-\Delta x};$$

und nun $\frac{Z\Delta x^{r+1}(1-\Delta x^2)}{1-\Delta x} < A\Delta x^r$

wegen (n. 3.), folglich um desto mehr auch $S < A\Delta x^r$ wegen (n. 2.).

Zusatz.

Daher kann Δx allemal so genommen werden, daß dafür $A\Delta x^r + B\Delta x^{r+1} + C\Delta x^{r+2} + \text{---} < 2A\Delta x^r$ wird. Es mag aber μ eine wie immer kleine Grösse bedeuten, und damit mag die Wurzel $\sqrt[r]{\frac{\mu}{2A}}$ wie immer klein, folglich $\frac{x}{\sqrt[r]{\frac{\mu}{2A}}}$ eine wie immer grosse absolute Zahl seyn; so läßt sich doch $m > \frac{x}{\sqrt[r]{\frac{\mu}{2A}}}$ (18. §. Zusatz), und dafür $\frac{1}{m} x$ oder $\Delta x < \sqrt[r]{\frac{\mu}{2A}}$ nehmen: da also daraus $2A\Delta x^r < \mu$ folgen

folgen würde; so wäre um desto mehr $A\Delta x^r + B\Delta x^{r+1} + C\Delta x^{r+2} + \cdots < \mu$.

20. §. Lehrsatz.

Wenn P und Q entweder unveränderliche Grössen, oder gewisse Functionen von x, oder auch von Δx bedeuten, in welchem Fall sie die Form $p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + \cdots$ haben sollen: wenn ferner der Differenz-Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (5. §.) einer Function von x dergestalt beschaffen ist, daß für jede wie immer kleine Differenz Δx folgende Bedingungen, beyde zugleich, bestehen müssen;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > a + P\Delta x; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} < a + Q\Delta x$$

so ist $a\,dx$ der Verschwindungs-Quotient der Function y von x, deren Differenz-Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bedeutet.

Beweis. 1) Daß es für y einen Verschwindungs-Quotienten geben muß, der eine wirkliche durch die Function y bestimmte Gröſſe ist, erhellet aus (6. §. 3. Zus.); folglich muß a auch eine wirkliche Gröſſe seyn, sonst würde der Lehrsatz etwas unmögliches behaupten.

2) Ferner mag y was immer für eine Function von x seyn, so läßt sich doch der ihr zugehörige Differenz-Quotient durch $\alpha + \psi\Delta x$ ausdrücken (5 §. 6. §. 2. Zus.).

3) Und dafür ist ihr Verschwindungs-Quotient $dy = \alpha\,dx$ (6. §. 3. 4. Zus.): man muß also zeigen, es

sey $\alpha = a$, wofern die beym Lehrsatze angegebenen Bedingungen richtig sind.

4) Aus diesen Bedingungen und aus (n. 2.) ergeben sich folgende Bedingungen, welche beyde allemal bestehen müssen, man mag Δx wie immer klein nehmen, vermöge der Voraussetzung.

I) $\alpha - a > (P - \psi)\Delta x$. II) $\alpha - a < (Q - \psi)\Delta x$.

5) Nun sey $\alpha > a$; so muß es dafür eine Differenz $d = \alpha - a$ geben, und es wird seyn $d < (Q - \psi)\Delta x$ wegen (n. 4. II.) für jeden Werth von Δx: da also Δx auch $(Q - \psi)\Delta x < d$ geben kann (19. §. Zus.); so könnte bey der Voraussetzung $\alpha > a$ für eben den Werth von Δx, wofür $d > (Q - \psi)\Delta x$ seyn soll, auch $d < (Q - \psi)\Delta x$ seyn, welches unmöglich ist, zum Beweis, daß auch die Voraussetzung $\alpha > a$ unmöglich war.

6) Setzt man aber $\alpha < a$; so wird es eine Differenz $d = a - \alpha$ geben, und es wird seyn $d < (\psi - P)\Delta x$ nach (n. 4. I.) für jeden Werth von Δx: da also Δx auch $(\psi - P)\Delta x < d$ geben kann (19. §. Zus.); so könnte für eben den Werth von Δx, für welchen $d > (\psi - P)\Delta x$ seyn müßte, auch $d < (\psi - P)\Delta x$ seyn, wenn die Voraussetzung $\alpha < a$ möglich wäre, da doch jenes unmöglich ist. Daher ist auch $\alpha < a$ unmöglich.

Ist aber weder $\alpha > a$, wie in (n. 5.), noch $\alpha < a$, wie in (n. 6.); so muß nothwendig $\alpha = a$, mithin $dy = a dx$ seyn (n. 3.).

Anmer-

Anmerkung.

Uebrigens scheint dieses aus den gegebenen Bedingungen, und den Begriffen, die wir uns von den Dingen, wovon hier die Rede ist, gemacht haben, unmittelbar zu folgen. Denn weil $\frac{\Delta y}{\Delta x} > a+P\Delta x$ ist; so ist offenbar, daß es eine Grösse z geben muß, um welche $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Grösse $a+P\Delta x$ für jeden Werth von Δx übertrifft, mithin $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a+P\Delta x+z$ ist. Man weiß zwar nicht, was z für eine Grösse ist, soviel ist doch gewiß, daß wegen der andern Bedingung $\frac{\Delta y}{\Delta x} < a+Q\Delta x$, die Grösse z dergestalt beschaffen seyn muß, daß $a+P\Delta x+z < a+Q\Delta x$, mithin $z < (Q-P)\Delta x$ sey, es mag Δx wie immer klein genommen werden. Es scheint demnach klar zu seyn, daß z nur ein gewisser Theil von $(Q-P)\Delta x$ seyn kann; daher kann man $z = \frac{1}{n}(Q-P)\Delta x$, und nun $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a+P\Delta x + \frac{1}{n}(Q-P)\Delta x$ setzen, welches ein Ausdruck des Differenz-Quotienten seyn sollte, welcher der Function y zugehören mag: da also dieser Ausdruck für $\Delta x = o$ den Werth a erlanget, und für $\Delta x = o$ aus dem Differenz-Quotienten der Verschwindungs-Quotient entstehet, welcher mit dy bezeichnet wird; so ist $dy = a = adx$ (6. §. 4. Z.).

Zusatz.

Die Beweise gelten auch für den Fall, wenn $P=0$, mithin $\frac{\Delta y}{\Delta x} > a$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} < a+Q\Delta x$ ist, folglich ist auch bey diesen Bedingungen $dy=adx$.

21. §. Aufgabe.

Fig. 2. Die Lage einer geraden Linie PQ (Fig. 2.) ist in Ansehung einer krummen Linie OAM vollkommen bestimmt; auch ist ein Punct C gegeben, an welchem eine auf PQ senkrechte Ordinate CA errichtet wird, damit sie an der krummen Linie einen Punct A bestimme: nun nimmt man auf PQ vom Puncte C an ein beliebiges Stück, eine sogenannte Abscisse $CD=x$, welcher eine in D auf PQ senkrechte Ordinate $DM=y$ zugehören mag; so ist die Ordinate $DM=y$ sowohl als der Bogen $AM=\varphi$ von der Abscisse $CD=x$ abhängig, weswegen sich gewisse Functionen y und φ von x denken lassen, welche die Ordinate DM und den Bogen AM ausdrücken (2. §.). Wie hängen die Verschwindungs-Quotienten der Functionen φ und y von einander ab?

Auflösung. 1) Wir setzen voraus, es sey eine Tangente möglich, welche der krummen Linie OAM am Puncte M zugehört, und nun stelle man sich vor, daß die veränderliche Grösse $CD=x$ um eine Differenz $\Delta x=DE$ zunimmt; so wird, indem $CE=x+\Delta x$ aus $CD=x$

entstehet,

entstehet, $Em = y'$ aus $DM = y$ und $Am = \varphi'$ aus $AM = \varphi$ entstehen: ist also Mq zu PQ parallel; so sind $\Delta y = y' - y = mE - MD = mq$ und $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = Am - AM = Mm$ die Differenzen der unbekannten Functionen $y = MD$, $\varphi = AM$ von $x = CD$ (3. §. 2. Z.). Trifft nun die Ordinate Em die Tangente BM, wofern diese verlängert wird, irgendwo in p; so ist der Bogen Mm gewiß allemal gröſſer, als die ihm zugehörige Sehne Mm, und allemal kleiner, als die Summe der Stücke Mp, mp der Tangente und Ordinate, es mag $DE = \Delta x$ wie immer klein genommen werden: also ist allemal

$$\Delta\varphi > Mom \text{ und } \Delta\varphi < Mp + mp.$$

Es ist aber im rechtwinklichten Dreyecke Mmq die Sehne $Mm = \sqrt{(Mq^2 + mq^2)} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$; und in pMq ist $Mp = \sqrt{(Mq^2 + pq^2)} = \sqrt{(Mq^2 + mq^2 + 2mq.mp + mp^2)} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta y.mp + mp^2)}$: also ist allemal

$$\Delta\varphi > \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \text{ und } \Delta\varphi < \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta y.mp + mp^2)} + mp.$$

2) Ferner sind pMq, MBD ähnliche Dreyecke, daher ist $pq : Mq = MD : BD$, oder $(pm + \Delta y) : \Delta x = y : BD$, woraus $pm = \frac{y}{BD} \cdot \Delta x - \Delta y$ folgt.

3) Wird aber durch die Puncte M, m die Secante mR gezogen; so werden mMq, MDR ähnliche Dreyecke seyn, mithin wird $mq : Mq = MD : RD$, folglich $\frac{mq}{Mq} = \frac{MD}{RD}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{RD}$ seyn.

4) Es

4) Es mag nun y was immer für eine Function von x seyn; so läßt sich doch ihre Differenz allemal durch $\Delta y = \alpha \Delta x + \psi \Delta x^2$ ausdrücken, und dafür ist der ihr zugehörige Verschwindungs-Quotient $dy = \alpha dx$ (6. §. 3. Zus.).

5) Demnach ist in (n. 3.) $\alpha + \psi \Delta x = \frac{y}{RD}$, und α ist der Werth, welchen diese Function für $\Delta x = o$ haben würde; da also RD dergestalt von $DE = \Delta x$ abhängt, daß $RD = BD$ werden muß, sobald $DE = \Delta x = o$ wird, mithin $\frac{y}{BD}$ aus $\frac{y}{RD}$ entsteht, wenn $\Delta x = o$ bey $\frac{y}{RD}$ wird; so ist $\frac{y}{BD} = \alpha$, und nun $pm = \alpha \Delta x - \Delta y$ in (n. 2.), oder $pm = -\psi \Delta x^2$ wegen (n. 4.).

6) Setzt man daher diesen Werth von pm in (n. 1.); so entstehen für $\Delta \varphi$ folgende Bedingungen.

$$\Delta \varphi > \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)} \text{ und } \Delta \varphi < \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2 - 2 \Delta y \psi \Delta x^2 + \psi^2 \Delta x^4)} - \psi \Delta x^2,$$

$$\text{mithin } \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} > \sqrt{\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1\right)}; \quad \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} < \sqrt{\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1 - 2 \Delta y \psi + \psi^2 \Delta x^2\right)} - \psi \Delta x.$$

Und für den Werth von Δy in (n. 4.).

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} > \sqrt{(\alpha^2 + 1 + 2 \alpha \psi \Delta x + \psi^2 \Delta x^2)};$$

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} < \sqrt{(\alpha^2 + 1)} - \psi \Delta x.$$

(7) Wäre

7) Wäre $p = \alpha^2 + 1$, $q = (2\alpha\psi + \psi^2\Delta x)\Delta x$; so wäre $\sqrt{(p+q)} = \sqrt{(\alpha^2 + 1 + 2\alpha\psi\Delta x + \psi^2\Delta x^2)}$: da also das erste Glied von $\sqrt{(p+q)}$ gewiß $\sqrt{p}$ ist, und alle darauf folgende Glieder durch q und Potenzen $q, q^2, q^3 \ldots$ bestimmt werden (I. B. 78. §.); so wird $\sqrt{(\alpha^2+1)}$ das erste Glied der Wurzel bey der ersten Bedingung in (n. 6.) seyn, und die Summe aller übrigen Glieder wird $S\Delta x$ heißen können: aus (n. 6.) wird also folgen, es sey

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} > \sqrt{(\alpha^2+1)} + S\Delta x; \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} < \sqrt{(\alpha^2+1)} - \psi\Delta x.$$

Und aus diesen Bedingungen erhält man nach (20. §.) den Verschwindungs-Quotienten $d\varphi = dx\sqrt{(\alpha^2+1)}$, welcher also durch den Verschwindungs-Quotienten $dy = \alpha\,dx$, wegen (n. 4.), der Ordinate y vollkommen bestimmt ist, nämlich.

$$d\varphi = dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}.$$

Anmerkung.

Ein Ausdruck, wie A Sin x, soll in der Folge einen Kreisbogen (Arcum circuli) bedeuten, dessen Sinus = x ist; mithin werden A Cos x, A Sin v x, A Cos v x, A Tang x, A Cot x, A Sec x, A Cosec x, diejenigen Kreisbogen andeuten, derer Cosinus, Sinus versi, Cosinus versi, Tangentes, Cotangentes, Secantes, Cosecantes = x sind.

22. §. Aufgabe.

Es ist φ ein Kreisbogen, welcher als eine Function von seinem Sinus betrachtet wird; man soll den ihm für diesen Sinus als eine veränderliche Grösse zugehörigen Verschwindungs-Quotienten bestimmen.

Fig. 1. **Auflösung.** Sey ADB ein Halbkreis (Fig. 1.), sein Halbmesser $AC = r$. Vom Mittelpuncte C an nehme man eine Abscisse $CQ = x$, welcher die Ordinate $PQ = y$ zugehören wird, und setze den Bogen $DP = \varphi$. Nun ist $PQ = \sqrt{AQ.QB}$: also $y = \sqrt{(r-x)(r+x)} = \sqrt{(r^2-x^2)}$, mithin $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, und für diesen Werth von dy erhält man aus der im (21. §.) gefundenen Formul den dem Kreisbogen $DP = \varphi$ zugehörigen Verschwindungs-Quotienten.

$$d\varphi = \sqrt{\left(\frac{(-x\,dx)^2}{r^2-x^2} + dx^2\right)} = \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{r\,dx}{y}.$$

Da also $CQ = x$ der Sinus und $PQ = y$ der Cosinus des Kreisbogens $\varphi = DP$ war; so ist

$$d.\,A\,Sin\,x = \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ für } r = 1.$$

1. Zusatz.

Und dieses kann man für den Halbmesser $r = 1$ auch so ausdrücken, $d\varphi = \frac{d\,Sin\,\varphi}{Cos\,\varphi}$.

2. Zuſatz.

Es war bey der Auflöſung der Aufgabe $dx = \frac{-y\,dy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}$ für $x = \sqrt{(r^2-y^2)}$: wenn man alſo dieſen Werth in die Formul bringet, welche in (21. §.) gefunden worden iſt; ſo erhält man $d\varphi = \frac{\sqrt{r^2}\,dy^2}{\sqrt{(r^2-y^2)}} = \frac{-r\,dy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}$, denn man weiß, daß dy bey der Auflöſung der vorigen Aufgabe einen verneinten Werth hatte: da alſo $y = PQ$ den Coſinus des Kreisbogens $\varphi = DP$ ausdrückt; ſo hat man für x ſtatt y.

$$dA\,Cof\,x = \frac{-r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ für } r = 1.$$

3. Zuſatz.

Und dieſes kann man nun, wegen (I. B. 154. §. IV. 2.), auch ſo ausdrücken: $d\varphi = \frac{-d\,Cof\,\varphi}{Sin\,\varphi}$.

4. Zuſatz.

Es iſt $Cof\,\varphi = 1 - Sin\,v\,\varphi$: alſo $d\,Cof\,\varphi = -d\,Sin\,v\,\varphi$: der Verſchwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von ſeinem Querſinus iſt alſo nach (3. Zuſ.) $d\varphi = \frac{d\,Sin\,v\,\varphi}{Sin\,\varphi}$.

5. Zuſatz.

Heißt x der Querſinus; ſo iſt $Cof\,\varphi = 1 - x$ und nun $Sin\,\varphi = \sqrt{(1^2 - (1-x)^2)} = \sqrt{(2x - x^2)}$: alſo iſt aus (4. Zuſ.)

$$dA\,Sin\,v\,x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

6. Zu-

6. Zuſatz.

Ferner iſt $\text{Sin}\,\varphi = 1 - \text{Cof v}\,\varphi$, mithin $d\,\text{Sin}\,\varphi = -d\,\text{Cof v}\,\varphi$: alſo iſt nach (1. Zuſ.) der Verſchwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von ſeinem Cofinus verſus $d\varphi = \frac{-d\,\text{Cof v}\,\varphi}{\text{Cof}\,\varphi}$.

7. Zuſatz.

Für $\text{Cof v}\,\varphi = x$ iſt aber $\text{Sin}\,\varphi = 1 - x$, mithin $\text{Cof}\,\varphi = \sqrt{(1^2 - (1-x)^2)} = \sqrt{(2x - x^2)}$: die Formul (6. Zuſ.) kann alſo auch ſo angegeben werden.

$$d\,\text{A Cof v}\,x = \frac{-dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

8. Zuſatz.

Es iſt $\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cof}\,\varphi}$: wenn man alſo $\text{Sin}\,\varphi$, $\text{Cof}\,\varphi$ als Functionen vom Kreisbogen φ betrachtet; ſo iſt $d\,\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Cof}\,\varphi\, d\,\text{Sin}\,\varphi - \text{Sin}\,\varphi\, d\,\text{Cof}\,\varphi}{\text{Cof}\,\varphi^2}$ (9. §. 3. Zuſ.). Es iſt aber $d\,\text{Sin}\,\varphi = \text{Cof}\,\varphi\, d\varphi$, $d\,\text{Cof}\,\varphi = -\text{Sin}\,\varphi\, d\varphi$ in (1. 3. Zuſ.) wegen (11. §. Zuſ.): alſo iſt $d\,\text{Tang}\,\varphi = \frac{(\text{Cof}\,\varphi^2 + \text{Sin}\,\varphi^2)\,d\varphi}{\text{Cof}\,\varphi^2} = \frac{d\varphi}{\text{Cof}\,\varphi^2} = \text{Sec}\,\varphi^2\, d\varphi$ (I. B. 154. §.), daher nach (11. §. Zuſ.) $d\varphi = \frac{d\,\text{Tang}\,\varphi}{\text{Sec}\,\varphi^2}$ der Verſchwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von ſeiner Tangente.

9. Zuſatz.

Für Tang $\varphi = x$ iſt Cof $\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ (I. B. 154. §. IV. 14.) und nun iſt Sec $\varphi = \sqrt{(1+x^2)}$ (daſ. III. 6.); der Verſchwindungs-Quotient (8. Zuſ.) kann alſo ſo ausgedrückt werden:

$$d.A\,Tang\,x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

10. Zuſatz.

Ferner iſt Tang $\varphi = \frac{1}{Cot\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 11.); alſo $d\,Tang\,\varphi = \frac{-d\,Cot\,\varphi}{Cot\,\varphi^2}$; folglich iſt der Verſchwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von ſeiner Cotangente, wegen (8. Zuſ.) $d\varphi = \frac{-d\,Cot\,\varphi}{Sec\,\varphi^2\,Cot\,\varphi^2}$ oder $d\varphi = \frac{-d\,Cot\,\varphi}{Cofec\,\varphi^2}$ (I. B. 154. §. IV. 9. 6. 10.).

11. Zuſatz.

Für Cot $\varphi = x$ iſt Cofec $\varphi^2 = 1+x^2$ (I. B. 154. §. IV. 12.); nach (21. §.) kann man daher den Verſchwindungs-Quotienten (10. §.) ſo ausdrücken.

$$d\,A\,Cot\,x = \frac{-dx}{1+x^2}.$$

12. Zuſatz.

Es iſt Cof $\varphi = \frac{1}{Sec\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 6.), folglich $d\,Cof\,\varphi = -\frac{d\,Sec\,\varphi}{Sec\,\varphi^2}$, wobey Sec φ als eine Function

von φ betrachtet wird (9. §. 3. Zuf.). Für Cof φ als eine Function von φ iſt aber wegen (11. §. Zuf.) nach (3. Zuf.) $d\,\mathrm{Cof}\,\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi$: alſo $\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi = \frac{d\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Sec}\,\varphi^2}$, mithin $d\varphi = \frac{d\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sec}\,\varphi^2} = \frac{d\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Tang}\,\varphi\,\mathrm{Sec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. III. 6. 5.)

13. Zuſatz.

Aus $\mathrm{Sec}\,\varphi = x$ wird $\mathrm{Cof}\,\varphi = \frac{1}{x}$ (I. B. 154. §. IV. 6.), und nun $\mathrm{Sin}\,\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\sqrt{(x^2 - 1)}$, mithin $\mathrm{Tang}\,\varphi = \sqrt{(x^2 - 1)}$: aus (12. Zuf.) erhält man demnach:

$$d\,\mathrm{A\,Sec}\,x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

14. Zuſatz.

Endlich iſt $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{Cofec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 10.), für Sin φ als eine Function von φ iſt daher nach (9. §. 3. Zuf.) $d\,\mathrm{Sin}\,\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cofec}\,\varphi^2}$, und wegen (11. §. Zuf.) nach (1. Zuf.) $d\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Cof}\,\varphi\,d\varphi$: alſo $\mathrm{Cof}\,\varphi\,d\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cofec}\,\varphi^2}$, demnach $d\,\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cof}\,\varphi\,\mathrm{Cofec}\,\varphi^2} = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cot}\,\varphi\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 10. 9.).

15. Zusatz.

Aber für $\text{Cosec}\,\varphi = x$ wäre $\text{Cot}\,\varphi = \sqrt{(x^2-1)}$ (I. B. 154. §. IV. 12.); den Verschwindungs-Quotienten (14. §.) kann man daher nach (21. §.) so angeben.

$$d\,\text{ACosec}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

16. Zusatz.

Und nun lassen sich die Verschwindungs-Quotienten leicht bestimmen, welche dem Kreisbogen φ für den Fall zugehören, wenn die trigonometrische Linie, wovon φ eine Function seyn soll, selbst eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse ist.

Beyspiele.

I. Sey $y = \text{ASin}\,2x\sqrt{(1-x^2)}$.

Für $z = 2x\sqrt{(1-x^2)}$ ist $y = \text{ASin}\,z$;

also $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ für $r = 1$ (Aufg.).

Nun ist $dz = \frac{2(1-2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und $\sqrt{(1-z^2)} = 1-2x^2$;

also $dy = \frac{2(1-2x^2)dx}{(1-2x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

II. Sey $y = \text{ASin}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Für $z = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ist $y = \text{ASin}\,z$;

also $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ für $r = 1$ (Aufg.).

von φ betrachtet wird (9. §. 3. Zuſ.). Für $\mathrm{Cof}\,\varphi$ als eine Function von φ iſt aber wegen (11. §. Zuſ.) nach (3. Zuſ.) $\mathrm{d}\,\mathrm{Cof}\,\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi$: alſo $\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Sec}\,\varphi^2}$, mithin $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sec}\,\varphi^2} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Tang}\,\varphi\,\mathrm{Sec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. III. 6. 5.)

13. Zuſatz.

Aus $\mathrm{Sec}\,\varphi = x$ wird $\mathrm{Cof}\,\varphi = \frac{1}{x}$ (I. B. 154. §. IV. 6.), und nun $\mathrm{Sin}\,\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\sqrt{(x^2 - 1)}$, mithin $\mathrm{Tang}\,\varphi = \sqrt{(x^2 - 1)}$: aus (12. Zuſ.) erhält man demnach:

$$\mathrm{d}\,\mathrm{A}\,\mathrm{Sec}\,x = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

14. Zuſatz.

Endlich iſt $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{Cofec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 10.), für $\mathrm{Sin}\,\varphi$ als eine Function von φ iſt daher nach (9. §. 3. Zuſ.) $\mathrm{d}\,\mathrm{Sin}\,\varphi = -\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cofec}\,\varphi^2}$, und wegen (11. §. Zuſ.) nach (1. Zuſ.) $\mathrm{d}\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Cof}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi$: alſo $\mathrm{Cof}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cofec}\,\varphi^2}$, demnach $\mathrm{d}\varphi = -\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cof}\,\varphi\,\mathrm{Cofec}\,\varphi^2} = -\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cot}\,\varphi\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 10. 9.).

15. Zusatz.

Aber für Cosec $\varphi = x$ wäre Cot $\varphi = \sqrt{(x^2-1)}$ (I. B. 154. §. IV. 12.); den Verschwindungs-Quotienten (14. §.) kann man daher nach (21. §.) so angeben.

$$dA\,\text{Cosec}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

16. Zusatz.

Und nun lassen sich die Verschwindungs-Quotienten leicht bestimmen, welche dem Kreisbogen φ für den Fall zugehören, wenn die trigonometrische Linie, wovon φ eine Function seyn soll, selbst eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse ist.

Beyspiele.

I. Sey $y = A\,\text{Sin}\,2x\sqrt{(1-x^2)}$.

Für $z = 2x\sqrt{(1-x^2)}$ ist $y = A\,\text{Sin}\,zt$

also $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ für $r = 1$ (Aufg.).

Nun ist $dz = \frac{2(1-2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und $\sqrt{(1-z^2)} = 1-2x^2$;

also $dy = \frac{2(1-2x^2)dx}{(1-2x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

II. Sey $y = \text{Sin}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

ist $y = A\,\text{Sin}\,zt$

für

Aber

Zusatz.

Die Beweise gelten auch für den Fall, wenn $P=0$, mithin $\frac{\Delta y}{\Delta x} > a$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} < a+Q\Delta x$ ist, folglich ist auch bey diesen Bedingungen $dy=adx$.

21. §. Aufgabe.

Fig. 2. Die Lage einer geraden Linie PQ (Fig. 2.) ist in Ansehung einer krummen Linie OAM vollkommen bestimmt; auch ist ein Punct C gegeben, an welchem eine auf PQ senkrechte Ordinate CA errichtet wird, damit sie an der krummen Linie einen Punct A bestimme: nun nimmt man auf PQ vom Puncte C an ein beliebiges Stück, eine sogenannte Abscisse $CD=x$, welcher eine in D auf PQ senkrechte Ordinate $DM=y$ zugehören mag; so ist die Ordinate $DM=y$ sowohl als der Bogen $AM=\varphi$ von der Abscisse $CD=x$ abhängig, weswegen sich gewisse Functionen y und φ von x denken lassen, welche die Ordinate DM und den Bogen AM ausdrücken (2. §.). Wie hängen die Verschwindungs-Quotienten der Functionen φ und y von einander ab?

Auflösung. 1) Wir setzen voraus, es sey eine Tangente möglich, welche der krummen Linie OAM am Puncte M zugehört, und nun stelle man sich vor, daß die veränderliche Grösse $CD=x$ um eine Differenz $\Delta x=DE$ zunimmt; so wird, indem $CE=x+\Delta x$ aus $CD=x$

entstehet,

entstehet, $Em = y'$ aus $DM = y$ und $Am = \varphi'$ aus $AM = \varphi$ entstehen: ist also Mq zu PQ parallel; so sind $\Delta y = y' - y = mE - MD = mq$ und $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = Am - AM = Mm$ die Differenzen der unbekannten Functionen $y = MD$, $\varphi = AM$ von $x = CD$ (3. §. 2. B.). Trifft nun die Ordinate Em die Tangente BM, wofern diese verlängert wird, irgendwo in p; so ist der Bogen Mm gewiß allemal gröſſer, als die ihm zugehörige Sehne Mm, und allemal kleiner, als die Summe der Stücke Mp, mp der Tangente und Ordinate, es mag $DE = \Delta x$ wie immer klein genommen werden: also ist allemal

$$\Delta\varphi > Mom \text{ und } \Delta\varphi < Mp + mp.$$

Es ist aber im rechtwinklichten Dreyecke Mmq die Sehne $Mm = \sqrt{(Mq^2 + mq^2)} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$; und in pMq ist $Mp = \sqrt{(Mq^2 + pq^2)} = \sqrt{(Mq^2 + mq^2 + 2mq.mp + mp^2)} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta y.mp + mp^2)}$: also ist allemal

$$\Delta\varphi > \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \text{ und } \Delta\varphi < \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta y.mp + mp^2)} + mp.$$

2) Ferner sind pMq, MBD ähnliche Dreyecke, daher ist $pq : Mq = MD : BD$, oder $(pm + \Delta y) : \Delta x = y : BD$, woraus $pm = \frac{y}{BD} \cdot \Delta x - \Delta y$ folgt.

3) Wird aber durch die Puncte M, m die Secante mR gezogen; so werden mMq, MDR ähnliche Dreyecke seyn, mithin wird $mq : Mq = MD : RD$, folglich $\frac{mq}{Mq} = \frac{MD}{RD}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{RD}$ seyn.

4) Es

4) Es mag nun y was immer für eine Function von x seyn; so läßt sich doch ihre Differenz allemal durch $\Delta y = \alpha \Delta x + \psi \Delta x^2$ ausdrücken, und dafür ist der ihr zugehörige Verschwindungs-Quotient $dy = \alpha dx$ (6. §. 3. Zus.).

5) Demnach ist in (n. 3.) $\alpha + \psi \Delta x = \frac{y}{RD}$, und α ist der Werth, welchen diese Function für $\Delta x = o$ haben würde: da also RD dergestalt von $DE = \Delta x$ abhängt, daß $RD = BD$ werden muß, sobald $DE = \Delta x = o$ wird, mithin $\frac{y}{BD}$ aus $\frac{y}{RD}$ entsteht, wenn $\Delta x = o$ bey $\frac{y}{RD}$ wird; so ist $\frac{y}{BD} = \alpha$, und nun $pm = \alpha \Delta x - \Delta y$ in (n. 2.), oder $pm = -\psi \Delta x^2$ wegen (n. 4.).

6) Setzt man daher diesen Werth von pm in (n. 1.); so entstehen für $\Delta \varphi$ folgende Bedingungen.

$$\Delta \varphi > \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)} \text{ und } \Delta \varphi < \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2 - 2 \Delta y \psi \Delta x^2 + \psi^2 \Delta x^4)} - \psi \Delta x^2,$$

$$\text{mithin } \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} > \sqrt{\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1\right)}; \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} < \sqrt{\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1 - 2 \Delta y \psi + \psi^2 \Delta x^2\right)} - \psi \Delta x.$$

Und für den Werth von Δy in (n. 4.).

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} > \sqrt{(\alpha^2 + 1 + 2 \alpha \psi \Delta x + \psi^2 \Delta x^2)};$$

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} < \sqrt{(\alpha^2 + 1)} - \psi \Delta x.$$

(7) Wäre

7) Wäre $p = \alpha^2 + 1$, $q = (2\alpha\psi + \psi^2\Delta x)\Delta x$; so wäre $\sqrt{(p+q)} = \sqrt{(\alpha^2 + 1 + 2\alpha\psi\Delta x + \psi^2\Delta x^2)}$: da also das erste Glied von $\sqrt{(p+q)}$ gewiß $\sqrt{p}$ ist, und alle darauf folgende Glieder durch q und Potenzen $q, q^2, q^3 \ldots$ bestimmt werden (I. B. 78. §.); so wird $\sqrt{(\alpha^2+1)}$ das erste Glied der Wurzel bey der ersten Bedingung in (n. 6.) seyn, und die Summe aller übrigen Glieder wird $S\Delta x$ heißen können: aus (n. 6.) wird also folgen, es sey

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} > \sqrt{(\alpha^2+1)} + S\Delta x; \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} < \sqrt{(\alpha^2+1)} - \psi\Delta x.$$

Und aus diesen Bedingungen erhält man nach (20. §.) den Verschwindungs-Quotienten $d\varphi = dx\sqrt{(\alpha^2+1)}$, welcher also durch den Verschwindungs-Quotienten $dy = \alpha\,dx$, wegen (n. 4.), der Ordinate y vollkommen bestimmt ist, nämlich.

$$d\varphi = dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}.$$

Anmerkung.

Ein Ausdruck, wie A Sin x, soll in der Folge einen Kreisbogen (Arcum circuli) bedeuten, dessen Sinus = x ist; mithin werden A Cos x, A Sin v x, A Cos v x, A Tang x, A Cot x, A Sec x, A Cosec x, diejenigen Kreisbogen andeuten, derer Cosinus, Sinus versi, Cosinus versi, Tangentes, Cotangentes, Secantes, Cosecantes $= x$ sind.

22. §. Aufgabe.

Es ist φ ein Kreisbogen, welcher als eine Function von seinem Sinus betrachtet wird; man soll den ihm für diesen Sinus als eine veränderliche Grösse zugehörigen Verschwindungs-Quotienten bestimmen.

Fig. 1. **Auflösung.** Sey ADB ein Halbkreis (Fig. 1.), sein Halbmesser $AC=r$. Vom Mittelpuncte C an nehme man eine Abscisse $CQ=x$, welcher die Ordinate $PQ=y$ zugehören wird, und setze den Bogen $DP=\varphi$. Nun ist $PQ=\sqrt{AQ.QB}$: also $y=\sqrt{(r-x)(r+x)}=\sqrt{(r^2-x^2)}$, mithin $dy=\frac{-x\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, und für diesen Werth von dy erhält man aus der im (21. §.) gefundenen Formul den dem Kreisbogen $DP=\varphi$ zugehörigen Verschwindungs-Quotienten.

$$d\varphi=\sqrt{\left(\frac{(-x\,dx)^2}{r^2-x^2}+dx^2\right)}=\frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=\frac{r\,dx}{y}.$$

Da also $CQ=x$ der Sinus und $PQ=y$ der Cosinus des Kreisbogens $\varphi=DP$ war; so ist

$$d.A\,Sin\,x=\frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ für } r=1.$$

1. Zusatz.

Und dieses kann man für den Halbmesser $r=1$ auch so ausdrücken, $d\varphi=\frac{d\,Sin\,\varphi}{Cos\,\varphi}$.

2. Zusatz.

Es war bey der Auflösung der Aufgabe $dx = \frac{-y\,dy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}$ für $x = \sqrt{(r^2-y^2)}$: wenn man also diesen Werth in die Formul bringet, welche in (21. §.) gefunden worden ist; so erhält man $d\varphi = \frac{\sqrt{r^2}\,dy^2}{\sqrt{(r^2-y^2)}} = \frac{-r\,dy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}$, denn man weiß, daß dy bey der Auflösung der vorigen Aufgabe einen verneinten Werth hatte: da also $y = PQ$ den Cosinus des Kreisbogens $\varphi = DP$ ausdrückt; so hat man für x statt y.

$$dA\,Cos\,x = \frac{-r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ für } r = 1.$$

3. Zusatz.

Und dieses kann man nun, wegen (I. B. 154. §. IV. 2.), auch so ausdrücken: $d\varphi = \frac{-d\,Cos\,\varphi}{Sin\,\varphi}$.

4. Zusatz.

Es ist $Cos\,\varphi = 1 - Sin\,v\varphi$: also $d\,Cos\,\varphi = -d\,Sin\,v\varphi$: der Verschwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von seinem Quersinus ist also nach (3. Zus.) $d\varphi = \frac{d\,Sin\,v\varphi}{Sin\,\varphi}$.

5. Zusatz.

Heißt x der Quersinus; so ist $Cos\,\varphi = 1 - x$ und nun $Sin\,\varphi = \sqrt{(1^2-(1-x)^2)} = \sqrt{(2x-x^2)}$: also ist aus (4. Zus.)

$$dA\,Sin\,v\,x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

6. Zus

6. Zuſatz.

Ferner iſt $\text{Sin}\,\varphi = 1 - \text{Cof v}\,\varphi$, mithin $d\,\text{Sin}\,\varphi = -d\,\text{Cof v}\,\varphi$: alſo iſt nach (1. Zuſ.) der Verſchwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von ſeinem Cofinus verſus $d\varphi = \frac{-d\,\text{Cof v}\,\varphi}{\text{Cof}\,\varphi}$.

7. Zuſatz.

Für $\text{Cof v}\,\varphi = x$ iſt aber $\text{Sin}\,\varphi = 1 - x$, mithin $\text{Cof}\,\varphi = \sqrt{(1^2 - (1-x)^2)} = \sqrt{(2x - x^2)}$: die Formul (6. Zuſ.) kann alſo auch ſo angegeben werden.

$$d\,\text{A Cof v}\,x = \frac{-dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

8. Zuſatz.

Es iſt $\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cof}\,\varphi}$: wenn man alſo $\text{Sin}\,\varphi$, $\text{Cof}\,\varphi$ als Functionen vom Kreisbogen φ betrachtet; ſo iſt $d\,\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Cof}\,\varphi\, d\,\text{Sin}\,\varphi - \text{Sin}\,\varphi\, d\,\text{Cof}\,\varphi}{\text{Cof}\,\varphi^2}$ (9. §. 3. Zuſ.). Es iſt aber $d\,\text{Sin}\,\varphi = \text{Cof}\,\varphi\, d\varphi$, $d\,\text{Cof}\,\varphi = -\text{Sin}\,\varphi\, d\varphi$ in (1. 3. Zuſ.) wegen (11. §. Zuſ.): alſo iſt $d\,\text{Tang}\,\varphi = \frac{(\text{Cof}\,\varphi^2 + \text{Sin}\,\varphi^2)\, d\varphi}{\text{Cof}\,\varphi^2} = \frac{d\varphi}{\text{Cof}\,\varphi^2} = \text{Sec}\,\varphi^2\, d\varphi$ (I. B. 154. §.), daher nach (11. §. Zuſ.) $d\varphi = \frac{d\,\text{Tang}\,\varphi}{\text{Sec}\,\varphi^2}$ der Verſchwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von ſeiner Tangente.

9. Zuſatz.

Für Tang $\varphi = x$ iſt Cof $\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ (I. B. 154. §. IV. 14.) und nun iſt Sec $\varphi = \sqrt{(1+x^2)}$ (daſ. III. 6.); der Verſchwindungs-Quotient (8. Zuſ.) kann alſo ſo ausgedrückt werden:

$$d.A\,Tang\,x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

10. Zuſatz.

Ferner iſt Tang $\varphi = \frac{1}{Cot\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 11.); alſo $d\,Tang\,\varphi = \frac{-d\,Cot\,\varphi}{Cot\,\varphi^2}$; folglich iſt der Verſchwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von ſeiner Cotangente, wegen (8. Zuſ.) $d\varphi = \frac{-d\,Cot\,\varphi}{Sec\,\varphi^2\,Cot\,\varphi^2}$ oder $d\varphi = \frac{-d\,Cot\,\varphi}{Cofec\,\varphi^2}$ (I. B. 154. §. IV. 9. 6. 10.).

11. Zuſatz.

Für Cot $\varphi = x$ iſt Cofec $\varphi^2 = 1+x^2$ (I. B. 154. §. IV. 12.): nach (21. §.) kann man daher den Verſchwindungs-Quotienten (10. §.) ſo ausdrücken.

$$d\,A\,Cot\,x = \frac{-dx}{1+x^2}.$$

12. Zuſatz.

Es iſt Cof $\varphi = \frac{1}{Sec\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 6.), folglich $d\,Cof\,\varphi = -\frac{d\,Sec\,\varphi}{Sec\,\varphi^2}$, wobey Sec φ als eine Function

von φ betrachtet wird (9. §. 3. Zuf.). Für Cof φ als eine Function von φ iſt aber wegen (11. §. Zuf.) nach (3. Zuf.) $d\,\mathrm{Cof}\,\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi$: alſo $\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi = \frac{d\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Sec}\,\varphi^2}$, mithin $d\varphi = \frac{d\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sec}\,\varphi^2} = \frac{d\,\mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Tang}\,\varphi\,\mathrm{Sec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. III. 6. 5.)

13. Zuſatz.

Aus $\mathrm{Sec}\,\varphi = x$ wird $\mathrm{Cof}\,\varphi = \frac{1}{x}$ (I. B. 154. §. IV. 6.), und nun $\mathrm{Sin}\,\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\sqrt{(x^2 - 1)}$, mithin $\mathrm{Tang}\,\varphi = \sqrt{(x^2 - 1)}$: aus (12. Zuf.) erhält man demnach:

$$d\,\mathrm{A\,Sec}\,x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

14. Zuſatz.

Endlich iſt $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{Cofec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 10.), für Sin φ als eine Function von φ iſt daher nach (9. §. 3. Zuf.) $d\,\mathrm{Sin}\,\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cofec}\,\varphi^2}$, und wegen (11. §. Zuf.) nach (1. Zuf.) $d\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Cof}\,\varphi\,d\varphi$: alſo $\mathrm{Cof}\,\varphi\,d\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cofec}\,\varphi^2}$, demnach $d\,\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cof}\,\varphi\,\mathrm{Cofec}\,\varphi^2} = -\frac{d\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}{\mathrm{Cot}\,\varphi\,\mathrm{Cofec}\,\varphi}$ (I. B. 154. §. IV. 10. 9.).

15. Zuſ

15. Zusatz.

Aber für $\text{Cosec}\,\varphi = x$ wäre $\text{Cot}\,\varphi = \sqrt{(x^2-1)}$ (I. B. 154. §. IV. 12.); den Verschwindungs-Quotienten (14. §.) kann man daher nach (21. §.) so angeben.

$$d\,\text{ACosec}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

16. Zusatz.

Und nun lassen sich die Verschwindungs-Quotienten leicht bestimmen, welche dem Kreisbogen φ für den Fall zugehören, wenn die trigonometrische Linie, wovon φ eine Function seyn soll, selbst eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse ist.

Beyspiele.

I. Sey $y = \text{ASin}\,2x\sqrt{(1-x^2)}$.

Für $z = 2x\sqrt{(1-x^2)}$ ist $y = \text{ASin}\,z$;

also $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ für $r = 1$ (Aufg.).

Nun ist $dz = \frac{2(1-2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und $\sqrt{(1-z^2)} = 1-2x^2$;

also $dy = \frac{2(1-2x^2)dx}{(1-2x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

II. Sey $y = \text{ASin}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Für $z = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ist $y = \text{ASin}\,z$;

also $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ für $r = 1$ (Aufg.).

Aber $dz = \frac{-4x\,dx}{(1+x^2)^2}$; $\sqrt{(1-z^2)} = \frac{2x}{1+x^2}$;

daher $dy = \frac{-4x\,dx}{(1+x^2)^2} : \frac{2x}{1+x^2} = \frac{-2\,dx}{1+x^2}$.

III. Sey $y = A\,\mathrm{Sin}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$.

Für $z = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ ist $y = A\,\mathrm{Sin}z$:

also $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ in (Aufg.) für $r = 1$.

Nun ist $dz = \frac{-dx}{4\sqrt{\frac{1-x}{2}}}$, mithin $dy = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-x^2)}}$.

IV. Sey $y = A\,\mathrm{Tang}\frac{2x}{1-x^2}$.

Für $z = \frac{2x}{1-x^2}$ ist $y = A\,\mathrm{Tang}z$:

also $dy = \frac{dz}{1+z^2}$ in (9. Zus.).

Aber $dz = \frac{2(1+x^2)dx}{(1-x^2)^2}$ und $1+z^2 = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$;

daher $dy = \frac{2(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)^2} : \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2\,dx}{1+x^2}$.

V. Sey $y = A\,\mathrm{Tang}\frac{\sqrt{(1+x^2)}-1}{x}$.

Für $z = \frac{\sqrt{(1+x^2)}-1}{x}$ ist $y = A\,\mathrm{Tang}z$:

also $dy = \frac{dz}{1+z^2}$ in (9. Zus.)

Es ist aber

$$dz = \frac{(\sqrt{(1+x^2)}-1)dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)}}; \quad 1+z^2 = \frac{2(\sqrt{(1+x^2)}-1)\sqrt{(1+x^2)}}{x^2};$$

daher $dy = \frac{dx}{2(1+x^2)}$.

VI. Sey $y = e^{A\,\mathrm{Sin}\,x}$.

Man setze $z = A\,\mathrm{Sin}\,x$; so ist $y = e^z$:

also $dy = e^z dz$ in (16. §. 10. Zus.).

Nun ist $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in (Aufg.) für $r = 1$:

also ist $dy = \frac{e^z dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{e^{A\,\mathrm{Sin}\,x}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

17. Zusatz.

Eben so bequem wird man nun auch diejenigen Verschwindungs-Quotienten bestimmen können, welche solchen Functionen zugehören, worinn trigonometrische Linien mit andern Grössen vermengt sind; und diese Arbeit kann oft dadurch erleichtert werden, wenn man die Functionen zuvor in einfachere verwandelt.

Beyspiele.

Sey $y = 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi$.

Man betrachtet hier y als eine Function vom Kreisbogen φ, wovon daher $\mathrm{Sin}\,\varphi$, $\mathrm{Cos}\,\varphi$ gewisse Functionen seyn müssen. Demnach ist:

$dy = 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\,\mathrm{Cos}\,\varphi + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,d\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ (9. §. u. 5. §. 7. Z.):

also $dy = -2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,d\varphi + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,d\varphi$ nach (1. 3. Zus.)

mithin $dy = 2\,\mathrm{Cos}\,2\varphi\,d\varphi$ (I. B. 156. §. 4. Zus. II.).

Man würde doch dieſen Quotienten leichter gefunden haben, wenn man ſich ſogleich daran erinnert hätte, daß $y = 2 \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cof} \varphi = \operatorname{Sin} 2\varphi$ iſt (I. B. 136. §. 4. Zuſ. 1.): denn nun wäre $dy = d \operatorname{Sin} 2\varphi = \operatorname{Cof} 2\varphi \, d2\varphi$ in (1. Zuſ.) wegen (11. §. 3.), oder $dy = 2 \operatorname{Cof} 2\varphi \, d\varphi$ (5. §. 7. 3.).

Sey $y = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cof} \varphi}{2}}$.

Es iſt $dy = \frac{-d \operatorname{Cof} \varphi}{2\sqrt{2(1 - \operatorname{Cof} \varphi)}}$ nach (8. §.);

daher $dy = \frac{\operatorname{Sin} \varphi \, d\varphi}{2\sqrt{2(1 - \operatorname{Cof} \varphi)}}$ nach (3. Zuſ.) wegen (11. §. Zuſ.);

und nun $dy = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi \cdot \operatorname{Cof} \frac{1}{2}\varphi \cdot d\varphi}{2 \cdot 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{Cof} \frac{1}{2}\varphi \cdot d\varphi$ (I. B. 156. §. 4. 7. Zuſ.).

Auch dieſen Quotienten kann man leichter finden, wenn man ſich ſogleich daran erinnert, daß $y = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cof} \varphi}{2}} = \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi$ iſt: denn hieraus folgt $dy = d \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{Cof} \frac{1}{2}\varphi \, d\frac{1}{2}\varphi$ nach (1. Zuſ. für $r = 1$) wegen (11. §. Zuſ.), oder $dy = \frac{1}{2} \operatorname{Cof} \frac{1}{2}\varphi \, d\varphi$ (5. §. 7. Zuſ.).

Sey $y = \operatorname{Cof} l\frac{1}{x}$.

Man ſetze $z = l\frac{1}{x}$, daher $y = \operatorname{Cof} z$;

ſo iſt $dy = -\operatorname{Sin} z \, dz$ (3. Zuſ.) wegen (11. §. Zuſ.).

Nun

Nun ist $dz = \frac{-dx}{x}$: also $dy = \frac{-\mathrm{Sin}\,l\frac{1}{x}.dx}{x}$.

Sey $y = e^{\mathrm{Sin}\,x}$.

Für $z = \mathrm{Sin}\,x$ ist $y = e^z$; $dy = e^z dz$ (16. §. 10. Z.), und $dz = \mathrm{Cos}\,x\,dx$ (1. Zus.), mithin $dy = e^{\mathrm{Sin}\,x}\,\mathrm{Cos}\,x\,dx$.

Sey $y = e^{\frac{-n}{\mathrm{Cos}\,x}}$.

Für $z = \frac{-n}{\mathrm{Cos}\,x}$ ist $y = e^z$; $dy = e^z dz$ (16. §. 10. Z.).

Nun ist $dz = \frac{n\,d\,\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Cos}\,x^2} = \frac{-n\,\mathrm{Sin}\,x\,dx}{\mathrm{Cos}\,x^2}$ (3. Zus.):

also $dy = e^z.\frac{-n\,\mathrm{Sin}\,x\,dx}{\mathrm{Cos}\,x^2} = \frac{-n\,e^{\frac{-n}{\mathrm{Cos}\,x}}.\mathrm{Sin}\,x\,dx}{\mathrm{Cos}\,x^2}$.

Sey $y = l\left(1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}\right)}\right)$.

Für $z = e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}$ ist $y = l(1 - \sqrt{(1-z)})$:

also $dy = \frac{dz}{2(1-\sqrt{(1-z)})\sqrt{(1-z)}}$ nach (16. §. 3. Z.).

Aber $dz = e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}.d\,\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}$ nach (16. §. 10. Zus.),

$= e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}.\frac{n\,d\,\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Sin}\,x^2}$ (9. §. 3. Z.) $= e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}.\frac{n\,\mathrm{Cos}\,x\,dx}{\mathrm{Sin}\,x^2}$

(1. Zus.):

also $dy = \frac{n\,e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}.\frac{\mathrm{Cos}\,x\,dx}{\mathrm{Sin}\,x^2}}{2\left(1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}\right)}\right)\sqrt{\left(1 - e^{\frac{-n}{\mathrm{Sin}\,x}}\right)}}$.

18. Zusatz.

Sind aber die ersten Quotienten bekannt, welche vergleichen Functionen zugehören; so wird man daraus auf gleiche Art auch die höheren Quotienten nach (15. §.) bestimmen können.

Beyspiele.

I. Sey $y = A\,\mathrm{Sin}\,x$;

so ist $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nach (Aufgabe für $r = 1$),

$$d^2y = d\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot dx = \frac{x\,dx^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\cdot$$

$$d^3y = d\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\cdot dx^2 = \frac{(1+2x^2)\,dx^3}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\cdot$$

$$d^4y = d\frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\cdot dx^3 = \frac{(9x+6x^3)\,dx^4}{\sqrt{(1-x^2)^7}}\cdot$$

u. s. f.

II. Sey $y = A\,\mathrm{Tang}\,x$.

So ist $dy = \frac{dx}{1+x^2}$ nach (9. Zus. für $r = 1$).

$$d^2y = d\frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \frac{-2x\,dx^2}{(1+x^2)^2}\cdot$$

$$d^3y = d\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\cdot dx^2 = \frac{(6x^2-2)\,dx^3}{(1+x^2)^3}\cdot$$

$$d^4y = d\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\cdot dx^3 = \frac{(24x-24x^3)\,dx^4}{(1+x^2)^4}\cdot$$

u. s. f.

III. Sey

III. Sey $y = \operatorname{Sin}\varphi$.

so ist $dy = d.\operatorname{Sin}\varphi = \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi$ (1. Zus.).

$d^2y = d\operatorname{Cos}\varphi . d\varphi = -\operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi^2$ (3. Zus.).

$d^3y = -d\operatorname{Sin}\varphi . d\varphi^2 = -\operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi^3$ (1. Zus.)

$d^4y = -d\operatorname{Cos}\varphi . d\varphi^3 = \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi^4$ (3. Zus.).

u. s. f.

IV. Sey $y = \operatorname{Cos}\varphi$.

so ist $dy = d\operatorname{Cos}\varphi = -\operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi$ (3. Zus.).

$d^2y = -d\operatorname{Sin}\varphi . d\varphi = -\operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi^2$ (1. Zus.).

$d^3y = -d\operatorname{Cos}\varphi . d\varphi^2 = \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi^3$ (3. Zus.).

$d^4y = d\operatorname{Sin}\varphi . d\varphi^3 = \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi^4$ (1. Zus.).

u. s. f.

V. Sey $y = \operatorname{Tang}\varphi = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$.

so ist $dy = \frac{\operatorname{Cos}\varphi\, d\operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi\, d\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2} = \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2}$

(1. 3. Zus.)

$d^2y = d\frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi^2} . d\varphi = \frac{-2\operatorname{Cos}\varphi\, d\operatorname{Cos}\varphi . d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^4} = \frac{2\operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi^2}{\operatorname{Cos}\varphi^3}$

(3. Zus.)

$d^3y = d.\frac{2\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^3} . d\varphi^2 = \frac{2\operatorname{Cos}\varphi^3 d\operatorname{Sin}\varphi - 6\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^2 d\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^6} d\varphi^2$

daher $d^3y = \frac{6\, d\varphi^3}{\operatorname{Cos}\varphi^4} - \frac{4\, d\varphi^3}{\operatorname{Cos}\varphi^2}$ (1. 3. Zus.).

u. s f.

Anmerkung.

Diese Theorie mit dem Satze der Umkehrung der Verschwindungs-Quotienten (111. §. Zus.) verbunden, führt

auf die Erfindung der Reihen, welche die einem Kreisbogen zugehörigen trigonometrischen Linien durch den Bogen ausdrücken, welche Reihen aus andern Gründen in (I. B. 158. §.) bestimmt wurden.

23. §. Aufgabe.

Man soll den $\operatorname{Sin}\varphi$, $\operatorname{Cos}\varphi$ durch den Kreisbogen φ ausdrücken.

Auflösung. 1) Für $r=1$ ist in (22. §. 1. Zus.) $d\varphi=\frac{d\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$ der Verschwindungs-Quotient des Kreisbogens φ als einer Function von $\operatorname{Sin}\varphi$: also ist nach (11. §. Zus.) $d\operatorname{Sin}\varphi=\operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi$ der Verschwindungs-Quotient des $\operatorname{Sin}\varphi$ als einer Funktion von φ.

2) Und in (22. §. 3. Zus.) $d\varphi=\frac{-d\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}$ der Verschwindungs-Quotient eines Kreisbogens φ als einer Function von $\operatorname{Cos}\varphi$; also ist nach (11. §. Zus.) $d\operatorname{Cos}\varphi=-\operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi$ der Verschwindungs-Quotient des $\operatorname{Cos}\varphi$ als einer Function von φ.

3) Nun nehme man an, daß $\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4 \ldots\ldots \pi^{r-1}, \pi^r, \pi^{r+1} + \ldots$ unbestimmte Zahlen bedeuten, und sey:

I) $\operatorname{Sin}\varphi=\pi\varphi+\pi^2\varphi^2+\pi^3\varphi^3+\ldots+\pi^{r-2}\varphi^{r-1}+\pi^r\varphi^r$
$+\pi^{r+1}\varphi^{r+1}+\ldots\ldots$

so ist $d\operatorname{Sin}\varphi=\pi\, d\varphi+2\pi^2\varphi\, d\varphi+3\pi^3\varphi^2\, d\varphi+\ldots\ldots$
$+(r-1)\pi^{r-1}\varphi^{r-2}d\varphi+r\pi^r\varphi^{r-1}d\varphi+(r+1)\pi^{r+1}\varphi^r d\varphi+\ldots$

also nach (11. §.)

II) Cos

II) $\mathrm{Cof}\varphi = \pi + 2\pi^2\varphi + 3\pi^3\varphi^2 + \ldots + (r+1)\pi^{r-1}\varphi^{r-2} + r\pi^r\varphi^{r-1} + (r+1)\pi^{r+1}\varphi^r + \ldots\ldots$

und

$d\mathrm{Cof}\varphi = 2\pi^2 d\varphi + 2.3\pi^3\varphi d\varphi + \ldots + (r-1)(r-2)\pi^{r-1}\varphi^{r-3}d\varphi + r(r-1)\pi^r\varphi^{r-2}d\varphi + (r+1)r\pi^{r+1}\varphi^{r-1}d\varphi + \ldots$

daher nach (n. 2.)

III) $\mathrm{Sin}\varphi = -2\pi^2 - 2.3\pi^3\varphi - \ldots - (r-1)(r-2)\pi^{r-1}\varphi^{r-3} - r(r-1)\pi^r\varphi^{r-2} - (r+1)r\pi^{r+1}\varphi^{r-1} - \ldots$

4) Es müssen also die Reihen I) III) einander gleich seyn, daher nach (I. B. 83. §. Zus.) $\pi^{r-1} = -r(r+1)\pi^{r+1}$, folglich $\pi^{r+1} = \frac{-\pi^{r-1}}{r(r+1)}$.

5) Aber $\mathrm{Cof}\varphi = 1$ für $\varphi = 0$; es erhellet also schon aus II), daß der Coefficient $\pi = 1$ seyn muß; vor diesem müßte π^0 bey der Reihe I) stehen, da doch keiner da seyn soll, und so ist $\pi^0 = 0$.

6) Mithin ist in (n. 4.) für $r = 1$ auch $\pi^2 = \frac{-\pi^0}{1.2} = 0$; und nun auch für $r = 3$ ist (das.) $\pi^4 = \frac{-\pi^2}{3.4} = 0$: und überhaupt wenn man $\pi^{2n} = 0$ setzt, ist für $r = 2n+1$ (das.) $\pi^{2n+2} = 0$: bey der Reihe I) können also gerade Potenzen von φ nicht vorkommen; sondern es muß seyn für eine unbestimmte ungerade Zahl r.

IV) $\mathrm{Sin}\varphi = \pi\varphi + \pi^3\varphi^3 + \pi^5\varphi^5 + \ldots + \pi^{r-1}\varphi^{r-1} + \pi^{r+1}\varphi^{r+1} + \ldots$

7) Da

7) Da aber $\pi = 1$ war; so muß für $r = 2$ in (n. 4.)

$\pi^3 = \frac{-\pi}{2.3} = \frac{-1}{2.3}$ seyn; nun für $r = 4$ ist (daselbst)

$\pi^5 = \frac{-\pi^3}{4.5} = \frac{1}{2.3.4.5}$; hierauf für $r = 6$ ist (das.)

$\pi^7 = \frac{-\pi^5}{6.7} = \frac{-1}{2.3.4.5.6.7}$. Und überhaupt:

Für $\pi^{r-1} = \frac{\pm 1}{1.2.3 \cdots r-1}$ wäre in (n. 4)

$\pi^{r+1} = \frac{\mp 1}{1.2.3 \cdots (r-1)r(r+1)}$.

Die Reihe IV) muß daher folgenden bestimmten Werth haben.

V) $\text{Sin } \varphi = \varphi \frac{-\varphi^3}{1.2.3} \frac{+\varphi^5}{1.2.3.4.5} \frac{-\varphi^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots$
$\frac{\pm \varphi^{r-1}}{1.2.3 \cdots (r-1)} \frac{\mp \varphi^{r+1}}{1.2.3 \cdots (r-1)r(r+1)} \pm \cdots$

8) Betrachtet man die Reihe II); so wird man finden, daß bey ihr, mit jedem Coefficienten, welcher einen geraden Exponenten hat, eine ungerade Potenz von φ verbunden ist: da also alle dergleichen Coefficienten gleich Null sind; so müssen bey der Reihe II) alle ungerade Potenzen von φ wegfallen, und alsdann wird seyn:

VI) $\text{Col } \varphi = \pi + 3\pi^3\varphi^2 + 5\pi^5\varphi^4 + \cdots$
$+ r\pi^r\varphi^{r-1} + (r+2)\pi^{r+2}\varphi^{r+1} + \cdots$

9) Es war aber ganz allgemein $\pi^{r+1} = \frac{-\pi^{r-1}}{r(r+1)}$ in (n. 4.); wenn man also $r+1$ statt r schreibt;

so

so ist $\pi^{r+2} = \frac{-\pi^r}{(r+1)(r+2)}$, und nun $(r+2)\pi^{r+2} = \frac{-\pi^r}{r+1}$.

Nun war $\pi = 1$, mithin für $r = 1$ ist $3\pi^3 = \frac{-1}{2}$ und $\pi^3 = \frac{-1}{2.3}$; daher für $r = 3$ ist $5\pi^5 = \frac{-\pi^3}{4} = \frac{1}{2.3.4}$ und $\pi^5 = \frac{1}{2.3.4.5}$: und überhaupt für $r\,\pi^r = \frac{\pm 1}{1.2.3\cdots r-1}$, mithin $\pi^r = \frac{\pm 1}{1.2.3\cdots(r-1)r}$ wäre $(r+2)\pi^{r+2} = \frac{-\pi^r}{(r+1)} = \frac{\mp 1}{1.2.3\cdots(r-1)r(r+1)}$. Die Reihe VI) hat also folgenden vollkommen bestimmten Werth.

VII) $\text{Cos}\,\varphi = \frac{1-\varphi^2}{1.2} \frac{+\varphi^4}{1.2.3.4} \frac{-\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots$
$\frac{\pm\varphi^{r-1}}{1.2.3\cdots(r-1)} \frac{\mp\varphi^{r+1}}{1.2.3\cdots(r-1)r(r+1)} \pm \cdots\cdots$

Die Reihen für Tang φ, Cot φ durch φ würde man ebenfalls mit Hülfe der vorhergehenden Theorie, so wie auch die Reihen für φ durch Sin φ, Cos φ, Tang φ, Cot φ finden können; ich begnüge mich aber damit, daß dieses Beyspiel ein neuer Beweis davon ist, was sich in (14. §. 5. Z.) mit Grund vermuthen, und in (17. §. 6. 7. Zus.) bestätigen ließ: das dritte Hauptstück soll mehrere Beweise davon geben.

Zweytes

Zweytes Hauptstück.

Anfangsgründe der Integral-Rechnung.

Der I. Abschnitt.

Grundlehre der Integral-Rechnung.

24. §. Erklärung.

Das mit einem Verschwindungs-Quotienten $dy = \alpha dx$ zusammenhängende Integral ist diejenige Function y von x, derer Verschwindungs-Quotient dem gegebenen αdx gleich ist: man wird es allemal dadurch anzeigen, daß man dem Verschwindungs-Quotienten den Buchstab $\int$ voransetzt.

Z. B. Für $y = x^3$ ist $dy = 3x^2 dx$: also ist $y = x^3$ das mit dem Verschwindungs-Quotienten $dy = 3x^2 dx$ zusammenhängende Integral: $\int 3x^2 dx$ bestimmen, heißt demnach die Function $y = x^3$ finden, derer Verschwindungs-Quotient dem gegebenen $3x^2 dx$ gleich ist.

1. Zusatz.

Jeder $(r+1)$te Verschwindungs-Quotient $d^{r+1}y$ einer Function y ist nichts anders als der erste Verschwindungs-Quotient $d.d^r y$ ihres $r$ten Verschwindungs-Quotienten (14. §. 2. Zus.): also ist der $r$te Verschwindungs-Quotient jeder Function y das mit ihrem $(r+1)$ten Verschwindungs-Quotienten zusammenhängende Integral, und dieses zeigt $\int d^{r+1} y = d^r y$ an.

2. Zu-

2. Zusatz.

Weil $\int \alpha dx = y$ diejenige Function bedeutet, deren Verschwindungs-Quotient αdx seyn soll; so muß aus einer solchen Gleichung die Gleichung $\alpha dx = dy$, oder $d\int \alpha dx = \alpha dx$ folgen.

3. Zusatz.

Wenn Z eine Function von einer veränderlichen Grösse x, und A eine von x unabhängige Grösse bedeutet; so ist $dy = A dZ$ für $y = AZ$ nach (5. §. 7. Zus.): also ist Z das mit dZ, und AZ das mit $dy = A dZ$ zusammenhängende Integral, welches $\int dZ = Z$ und $\int A dZ = AZ$ bedeutet; daher ist $\int A dZ = A \int dZ$. Das heißt: wenn der Verschwindungs-Quotient einer Function y aus dem Verschwindungs-Quotienten dZ einer andern Function Z dadurch erhalten wird, wenn man diesen mit einer unveränderlichen Grösse A multiplicirt; so wird auch das mit jenem Verschwindungs-Quotienten zusammenhängende Integral, aus dem Integral, welches mit diesem Verschwindungs-Quotienten zusammenhängt, dadurch erhalten werden, wenn man dieses Integral mit eben der unveränderlichen Grösse vervielfältiget.

25. §. Aufgabe.

Es ist $dy = \alpha dz + \beta dz + \gamma dz + \ldots + \mu dz + \ldots$, wobey $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ was immer für Functionen von z bedeuten können; man soll das mit dem Verschwindungs-Quotienten dy zusammenhängende Integral y bestimmen.

Auflö-

Auflösung. 1) Man betrachte αdz, βdz, γdz... μdz... als eben so viele Verschwindungs-Quotienten gewisser Functionen P, Q, R .... V .... von z, setze demnach $\int \alpha dz = P$, $\int \beta dz = Q$, $\int \gamma dz = R$ .... $\int \mu dz = V$ ..., mithin $\alpha dz = dP$, $\beta dz = dQ$, $\gamma dz = dR$ ... $\mu dz = dV$.

2) Sey ferner $Y = P + Q + R + ... + V + ...$; so ist $dY = dP + dQ + dR + ... + dV + ...$ (5. §. 6. Zus.), mithin $dY = \alpha dz + \beta dz + \gamma dz + ... + \mu dz + ...$ wegen (n. 1.).

3) Daher ist der vorgelegte Verschwindungs-Quotient $dy = dY$: also ist y eine solche Function von z, deren veränderlicher, von z abhängiger Theil, dem veränderlichen Theile der Function Y gleich ist (6. §. 7. Zus.), mithin ist $P + Q + R + ... + V + ...$ oder $\int \alpha dz + \int \beta dz + \int \gamma dz + ... + \int \mu dz + ...$ der veränderliche Theil der Function y, wegen (n. 2. 1.), oder des Integrals $\int dy$, welches mit dem Verschwindungs-Quotienten $dy = \alpha dz + \beta dz + \gamma dz + ... + \mu dz + ...$ zusammenhängen soll (24. §.).

Zusatz.

Wie oft also der Verschwindungs-Quotient dy einer Function y von z aus Verschwindungs-Quotienten mehrerer Functionen von z zusammengesetzt ist; so oft wird auch der veränderliche Theil des mit demselben Verschwindungs-Quotienten dy zusammenhängenden Integrals $\int dy$ aus den veränderlichen Theilen derjenigen Integralien zusammengesetzt seyn, welche mit den Verschwindungs-Quotienten, woraus dy bestehet, zusammenhängen.

26. §. Aufgabe.

Es ist z entweder eine absolute veränderliche Grösse, oder was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Grösse x, und ein Verschwindungs-Quotient hat die Form $dy = z^m dz$, wobey m eine bejahte oder verneinte, ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann: man soll das damit zusammenhängende Integral y bestimmen.

Auflösung. Das verlangte Integral sey $y = \int z^m dz = Z + C$ als eine Function von z, welche ausser dem veränderlichen Theil Z einen unveränderlichen C haben kann, obgleich dieser beym Verschwindungs-Quotienten $dy = z^m dz$ weder vorkömmt, noch auf irgend eine Art vorkommen kann (5. §. 5. Zus.).

Beym ersten Anblick des Verschwindungs-Quotienten $dy = z^m dz$ wird man an (8. §. Zus.) erinnert, woraus folgt, daß $d\left(\frac{z^{m+1}}{m+1} + c\right) = z^m dz$, mithin der gegebene Verschwindungs-Quotient $dy = z^m dz$ dem Verschwindungs-Quotienten der Function $\frac{z^{m+1}}{m+1} + c$ gleich ist. Da wir also wissen, daß die veränderlichen Theile derjenigen Functionen von z, deren Verschwindungs-Quotienten gleich sind, auch einander gleich seyn müssen (6. §. 7. Zus.); so werden wir genöthigt zu behaupten, es sey $\frac{z^{m+1}}{m+1}$ der veränderliche Theil Z des mit dem Verschwindungs-Quotienten

$dy = z^m dz$ zusammenhängenden Integrals $y = \int z^m dz = Z + C$; demnach $y = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C$ oder $\int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C$ für $dy = z^m dz$.

1. Zusatz.

Wie oft daher ein Verschwindungs-Quotient unter der Form $dy = z^m dz$ vorkömmt, es mag alsdann z eine absolute veränderliche Grösse, oder was immer für eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse x bedeuten, so oft wird man den veränderlichen Theil Z des damit zusammenhängenden Integrals $y = Z + C$ dadurch genau erhalten, wenn man statt der Potenz von der veränderlichen Grösse z, womit ihr Verschwindungs-Quotient dz multiplicirt ist, die um einen Grad höhere Potenz nimmt, und dieselbe durch ihren eigenen Exponenten dividirt.

Beyspiele.

Aus	folgt
$dy = dz = z^0 dz$;	$y = Z + C$.
$dy = z dz$;	$y = \frac{1}{2} z^2 + C$.
$dy = z^2 dz$;	$y = \frac{1}{3} z^3 + C$.
$dy = z^3 dz$;	$y = \frac{1}{4} z^4 + C$.

$dy = \frac{dz}{z^n} = z^{-n}dz;$ $y = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)z^{n-1}} + C.$

$dy = \frac{dz}{z^2};$ $y = \frac{-1}{z} + C.$

$dy = \frac{dz}{z^3};$ $y = \frac{-1}{2z^2} + C.$

$dy = \frac{dz}{z^4};$ $y = \frac{-1}{3z^3} + C.$

u. s. f.

$dy = dz.\sqrt[u]{z^v} = z^{\frac{v}{u}}dz;$ $y = \frac{z^{\frac{v}{u}+1}}{\frac{v}{u}+1} + C = \frac{u\sqrt[u]{z^{v+u}}}{v+u} + C.$

$dy = dz.\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}dz;$ $y = \frac{2z\sqrt{z}}{3} + C.$

$dy = dz.\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}dz;$ $y = \frac{3z\sqrt[3]{z}}{4} + C.$

$dy = dz.\sqrt[3]{z^2} = z^{\frac{2}{3}}dz;$ $y = \frac{3z\sqrt[3]{z^2}}{5} + C.$

u. s. f.

$dy = \frac{dz}{\sqrt[v]{z^u}} = z^{\frac{u}{v}}dz;$ $y = \frac{z^{\frac{-u}{v}+1}}{\frac{-u}{v}+1} + C = \frac{v}{(v-u)\sqrt[v]{z^{u-v}}} + C.$

$dy = \frac{dz}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}}dz;$ $y = 2\sqrt{z} + C.$

$dy = \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = z^{-\frac{1}{3}}dz;$ $y = \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{2} + C.$

$dy = \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2}} = z^{-\frac{2}{3}}dz;$ $y = 3\sqrt[3]{z} + C.$

Und auf diese Art findet man das Integral y für jeden einfachen Verschwindungs-Quotienten von der Form $dy = z^m \sqrt[n]{z^p}.dz$, weil $z^m \sqrt[n]{z^p}.dz = z^m.z^{\frac{p}{n}}.dz = z^{m+\frac{p}{n}}.dz$ ist, mithin auch der veränderliche Theil des Integrals $\int z^m \sqrt[n]{z^p}.dz$ dem veränderlichen Theile des Integrals $\int z^{m+\frac{p}{n}}.dz$ (24. §.) gleich seyn muß (6. §. 7. Zus.).

Beyspiele.

Aus	folgt
$dy = zdz.\sqrt{z} = dz.\sqrt{z^3} = z^{\frac{3}{2}}dz;$	$y = \frac{2z^2\sqrt{z}}{5} + C.$
$dy = z^2dz.\sqrt{z} = z^{\frac{5}{2}}dz;$	$y = \frac{2z^3\sqrt{z}}{7} + C.$
$dy = zdz\sqrt[3]{z^2} = z^{\frac{5}{3}}dz;$	$y = \frac{3z^2\sqrt[3]{z^2}}{8} + C.$
$dy = \frac{dz}{z\sqrt{z}} = z^{-\frac{3}{2}}dz;$	$y = \frac{-2}{\sqrt{z}} + C.$
$dy = \frac{dz}{z^2\sqrt{z}} = z^{-\frac{5}{2}}dz;$	$y = \frac{-2}{3z\sqrt{z}} + C.$
$dy = \frac{dz}{z\sqrt[3]{z^2}} = z^{-\frac{5}{3}}dz;$	$y = \frac{-3}{2\sqrt[3]{z^2}} + C.$
$dy = \frac{dz}{z^2\sqrt[3]{z^2}} = z^{-\frac{8}{3}}dz;$	$y = \frac{-3}{5z\sqrt[3]{z^2}} + C.$

Weil aber z bey der Auflösung der vorigen Aufgabe auch eine jede Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse x bedeuten konnte; so wird man auf gleiche Art das Integral y für jeden Verschwindungs-Quotienten $dy = z^m dz$ bestim-

bestimmen, wobey was immer für eine nte Potenz einer Function z von x mit dem Verschwindungs-Quotienten derselben Function z multiplicirt ist.

Beyspiele.

Sey $dy = b\,dx.\sqrt{(bx-c)} = b\,dx.(bx-c)^{\frac{1}{2}}$.

Für $z = bx - c$ ist $dz = bdx$, $dy = z^{\frac{1}{2}}dz$:

also $y = \int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2z\sqrt{z}}{3} + C$.

Daher $y = \frac{2(bx-c)\sqrt{(bx-c)}}{3} + C$.

Sey $dy = 2xdx.\sqrt{(c^2+x^2)} = 2xdx.(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Für $z = c^2+x^2$ ist $dz = 2xdx$, $dy = z^{\frac{1}{2}}dz$;

also $y = \int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{2}{3}z\sqrt{z} + C$.

Daher $y = \frac{2(c^2+x^2)\sqrt{(c^2+x^2)}}{3} + C$.

Sey $dy = \frac{(4x+4bx^3)dx}{\sqrt[3]{(2x^2+bx^4)^2}}$.

Für $z = 2x^2+bx^4$ ist $dz = (4x+4bx^3)dx$:

also $dy = z^{-\frac{2}{3}}dz$ und $\int dy = 3\sqrt[3]{z} + C$,

oder $y = 3\sqrt[3]{(2x^2+bx^4)} + C$.

2. Zusatz.

Kömmt ein Verschwindungs-Quotient unter der Form $dy = Az^m dz$ vor; so suche man das mit $z^m dz$ zusammenhängende Integral, oder vielmehr seinen veränderlichen Theil,

und multiplicire ihn mit dem unveränderlichen Factor A, um den veränderlichen Theil von y zu erhalten (24. §. 3. Zuſ.)

Beyſpiele.

Sey $dy = 5x^2dx$; ſo iſt $y = 5\int x^2dx$:

aber $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$: alſo $y = \frac{5x^3}{3} + C$.

Sey $dy = \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x^2}.dx$; ſo iſt $y = \frac{3}{2}\int x\sqrt[3]{x^2}.dx$.

Nun wäre $\int x\sqrt[3]{x^2}.dx = \frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C$:

alſo iſt $y = \frac{3}{2}.\frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} = \frac{9}{16}x^2\sqrt[3]{x^2} + C$.

Sey $dy = \frac{(3x - 3c + 18x^2)dx}{\sqrt{(x^2 - 2cx + 4x^3)^3}}$.

Für $z = x^2 - 2cx + 4x^3$ iſt $dz = (2x - 2c + 12x^2)dx$,

und $\frac{3}{2}dz = (3x - 3c + 18x^2)dx$:

alſo $dy = \frac{3}{2}.\frac{dz}{\sqrt{z^3}} = \frac{3}{2}z^{-\frac{3}{2}}dz$, mithin iſt

$y = \frac{3}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}dz = \frac{3}{2}.-2z^{-\frac{1}{2}} = \frac{-3}{z^{\frac{1}{2}}} + C$,

folglich $y = \frac{-3}{\sqrt{(x^2 - 2cx + 4x^3)}} + C$.

Sey $dy = \frac{2}{7}x^2dx.\sqrt[3]{(a - 2x^3)}$.

Für $z = a - 2x^3$ iſt $dz = -6x^2dx$,

$\frac{-dz}{6} = x^2dx$: alſo $dy = \frac{2}{7}.\frac{-dz}{6}.z^{\frac{1}{3}} = \frac{-1}{21}z^{\frac{1}{3}}dz$,

daher

daher $y = \frac{-1}{21}\int z^{\frac{1}{3}}dz = \frac{-1}{28}z\sqrt[3]{z}+C$,

oder $y = \frac{-1}{28}(a-2x^3)\sqrt[3]{(a-2x^3)}+C$.

Sey $dy = \frac{(3x-18x^2)dx}{\sqrt[3]{(x^2-4x^3)^2}}$.

Man setze $z = x^2-4x^3$; $dz = (2x-12x^2)dx$;

so ist $\frac{3}{2}dz = (3x-18x^2)dx$, $dy = \frac{3}{2}z^{-\frac{2}{3}}dz$:

also $y = \frac{3}{2}\int z^{-\frac{2}{3}}dz = \frac{9}{2}\sqrt[3]{z}+C$,

mithin $y = \frac{9}{2}\sqrt[3]{(x^2-4x^3)}+C$.

Sey $dy = (2a-4x)dx.\sqrt{(ax-x^2)}$.

Für $z = ax-x^2$ ist $dz = (a-2x)dx$,

und $2dz = (2a-4x)dx$: also ist

$dy = 2z^{\frac{1}{2}}dz$ und $\int dy = 2\int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{4}{3}z\sqrt{z}+C$,

mithin $y = \frac{4}{3}(ax-x^2)\sqrt{(ax-x^2)}+C$.

3. Zusatz.

Kömmt nun ein Verschwindungs-Quotient unter der Form $dy = Az^m dz + Bu^n du + Cv^p dv + \cdots$ vor, wobey $z, u, v \cdots$ was immer für Functionen von einer absoluten veränderlichen Grösse x seyn können; so bestimme man das damit zusammenhängende Integral $y = A\int u^m dz + B\int u^n du + C\int v^p dv + \cdots$ nach (24. §. 3. Zus. und 25. §. Zus.),

mithin $y = \frac{Az^{m+1}}{m+1} + \frac{Bu^{n+1}}{n+1} + \frac{Cv^{p+1}}{p+1} + \cdots + \text{Const.}$

Beyspiele.

$$dy = 3x^2dx - \frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{4}{7}x^{-\frac{1}{3}}dx$$

giebt $y = 3\int x^2dx - \frac{2}{5}\int x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{4}{7}\int x^{-\frac{1}{3}}dx$,

daher $y = x^3 - \frac{4}{15}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{2}{3}} + C.$

$$dy = 3(x - 10x^3)dx.\sqrt[3]{(x^2 - 5x^4)^2} - (1 - x^2dx.(3x - x^3)^2,$$

giebt $y = \int 3(x - 10x^3)dx.\sqrt[3]{(x^2 - 5x^4)^2} - \int(1 - x^2)dx.(3x - x^3)^2$.

Nun ist nach (4. Zus.).

$$\int 3(x - 10x^3)dx.\sqrt[3]{(x^2 - 5x^4)^2} = \frac{9}{10}\sqrt[3]{(x^2 - 5x^4)^5},$$

und $\int(1 - x^2)dx.(3x - x^3)^2 = \frac{1}{9}(3x - x^3)^3$;

also $y = \frac{9}{10}\sqrt[3]{(x^2 - 5x^4)^5} - \frac{1}{9}(3x - x^3)^3 + C.$

Und auf diese Art läßt sich das Integral vollkommen bestimmen, welches mit einem Verschwindungs-Quotienten von der Form $dy = Ax^m dx Z^p Y^q X^r \ldots P^u$ ist, es mögen $Z, Y, X, \ldots P$ was immer für Functionen von der Form $\alpha + \beta x^a + \gamma x^b + \delta x^c \ldots$ seyn, wenn nur $p, q, r \ldots u$ ganze bejahte Zahlen sind, m mag was immer für eine Zahl seyn. Denn für bejahte ganze Zahlen $p, q, r \ldots u$ werden die Potenzen $Z^p, Y^q, X^r, \ldots P^u$ durch solche Reihen verschiedener Potenzen von x ausgedrückt werden können, derer jede eine bestimmte Anzahl von Gliedern haben muß; mithin wird man durch die Multiplication dieser

Reihen

Reihen unter einander und mit Ax^m auch den Verschwindungs-Quotienten dy in eine solche Reihe verwandeln können.

Beyspiel.

Sey $dy = x^{\frac{3}{2}} dx (a + x^2)(bx^{\frac{1}{2}} - x)^2$;

so ist $dy = dx(ax^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{2}})(b^2x - 2bx^{\frac{3}{2}} + x^2)$

$= (ab^2x^{\frac{1}{2}} - 2abx^3 + ax^{\frac{7}{2}} + b^2x^{\frac{9}{2}} - 2bx^5 + x^{\frac{11}{2}})dx$;

also $y = \frac{2}{7}ab^2x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}abx^4 + \frac{2}{9}ax^{\frac{9}{2}} + \frac{2}{11}b^2x^{\frac{11}{2}}$

$- \frac{1}{3}bx^6 + \frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}} + C.$

4. Zusatz.

Und hierinn bestehet eine allgemeine Methode, das mit jedem Verschwindungs-Quotienten $dy = Xdx$ zusammenhängende Integral y wenigstens durch eine ohne Ende fortlaufende Reihe auszudrücken, welche dem wahren Integrale desto näher kommen mag, je mehr Glieder für sie berechnet werden: denn es kann jede Function X von x in eine gleichgültige Reihe von der Form $X = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$ verwandelt werden (6. §.); mithin kann man jeden Verschwindungs-Quotienten $dy = Xdx$ in $dy = Ax^a dx + Bx^b dx + Cx^c dx + \ldots$ verwandeln, und daraus nach (3. Zus.) das Integral $y = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \ldots$ bestimmen. Folgende Beyspiele können bey vielen Unter-

suchungen ihren Gebrauch finden, wie es im dritten Haupt-stücke erhellen wird.

I. Sey $dy = dx\sqrt{(\beta x^m + \gamma x^n)} = (\beta x^m + \gamma x^n)^{\frac{1}{2}} dx$.

Nach (I. B. 76. §. 7. Zus.) verwandelt man diesen Verschwindungs-Quotienten in folgende Reihe:

$$dy = \Big(\beta^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}} + \frac{\gamma . x^{\frac{2n-m}{2}}}{2\beta^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.\gamma^2 . x^{\frac{4n-3m}{2}}}{2.4.\beta^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3\gamma^3 x^{\frac{6n-5m}{2}}}{2.4.6.\beta^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{1.3.5.\gamma^4 . x^{\frac{8n-7m}{2}}}{2.4.6.8.\beta^{\frac{7}{2}}} + \frac{1.3.5.7.\gamma^5 x^{\frac{10n-9m}{2}}}{2.4.6.8.10.\beta^{9}}$$

$$- \frac{1.3.5.7.9.\gamma^6 . x^{\frac{12n-11m}{2}}}{2.4.6.8.10.12.\beta^{\frac{11}{2}}} + \text{----} \Big) dx$$

also

$$y = \frac{\beta^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} + \frac{\gamma . x^{\frac{2n-m}{2}+1}}{2\beta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2n-m}{2}+1\right)} - \frac{1.\gamma^2 . x^{\frac{4n-3m}{2}+1}}{2.4.\beta^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4n-3m}{2}+1\right)}$$

$$+ \frac{1.3.\gamma^3 . x^{\frac{6n-5m}{2}+1}}{2.4.6.\beta^{\frac{5}{2}}\left(\frac{6n-5m}{2}+1\right)} - \frac{1.3.5.\gamma^4 . x^{\frac{8n-7m}{2}+1}}{2.4.6.8.\beta^{\frac{7}{2}}\left(\frac{8n-7m}{2}+1\right)}$$

$$+ \frac{1.3.5.7.\gamma^5 . x^{\frac{10n-9m}{2}+1}}{2.4.6.8.10.\beta^{\frac{9}{2}}\left(\frac{10n-9m}{2}+1\right)} - \frac{1.3.5.7.9.\gamma^6 . x^{\frac{12n-11m}{2}+1}}{2.4.6.8.10.12.\beta^{\frac{11}{2}}\left(\frac{12n-11m}{2}+1\right)}$$

$$+ \text{- - - - - - - -}$$

oder

oder II.

$$y=2\left(\frac{\beta^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}+\frac{\gamma\cdot x^{\frac{2n-m+2}{2}}}{2\beta^{\frac{1}{2}}(2n-m+2)}-\frac{\gamma^2\cdot x^{\frac{4n-3m+2}{2}}}{2.4.\beta^{\frac{3}{2}}(4n-3m+2)}\right.$$

$$+\frac{3\cdot\gamma^3\cdot x^{\frac{6n-5m+2}{2}}}{2.4.6.\beta^{\frac{5}{2}}(6n-5m+2)}-\frac{3\cdot5\cdot\gamma^4\cdot x^{\frac{8n-7m+2}{2}}}{2.4.6.8.\beta^{\frac{7}{2}}(8n-7m+2)}$$

$$+\frac{3.5.7.\gamma^5.x^{\frac{10n-9m+2}{2}}}{2.4.6.8.10\beta^{\frac{9}{2}}(10n-9m+2)}-\frac{3.5.7.9.\gamma^6.x^{\frac{12n-11m+2}{2}}}{2.4.6.8.10.12.\beta^{\frac{11}{2}}(12n-11m+2)}$$

$$\left.+\cdots\pm\frac{3.5.7.9\cdots(2r-3)\gamma^r.x^{\frac{2rn-(2r-1)m+2}{2}}}{2.4.6.8\cdots(2r-4)(2r-2)2r\beta^{\frac{2r-1}{2}}.(2rn-(2r-1)m+2)}\right)$$

Und bey dieſem allgemeinen Gliede muß das Zeichen (+) oder (−) genommen werden, nachdem r eine ungerade oder gerade Zahl iſt.

III. Sey $dy=\frac{dx}{\sqrt{(\beta x^m+\gamma x^n)}}=dx.(\beta x^m+\gamma x^n)^{-\frac{1}{2}}$.

Nach (I. B. 76. §. 7. Zuſ.) verwandelt ſich dieſer Verſchwindungs-Quotient in folgende Reihe:

$$dy=\left(\frac{x^{\frac{-m}{2}}}{\beta^{\frac{1}{2}}}-\frac{\gamma.x^{\frac{2n-1m}{2}}}{2.\beta^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\cdot\gamma^2.x^{\frac{4n-5m}{2}}}{2.4.\beta^{\frac{5}{2}}}-\frac{3.5.\gamma^3x^{\frac{6n-7m}{2}}}{2.4.6.\beta^{\frac{7}{2}}}\right.$$

$$+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^4x^{\frac{8n-9m}{2}}}{2.4.6.8.\beta^{\frac{9}{2}}}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^5x^{\frac{10n-11m}{2}}}{2.4.6.8.10.\beta^{\frac{11}{2}}}$$

$$\left.+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot\gamma^6.x^{\frac{12n-13m}{2}}}{2.4.6.8.10.12.\beta^{\frac{13}{2}}}\cdots\cdots\right)dx$$

also ist IV.

$$y = 2\left(\frac{-1}{(m-2)\beta^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{m-2}{2}}} \quad \frac{+\gamma}{2(3m-2n-2)\beta^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{3m-2n-2}{2}}}\right.$$

$$\frac{-3\gamma^2}{2.4(5m-4n-2)\beta^{\frac{5}{2}}.x^{\frac{5m-4n-2}{2}}} \quad \frac{+3.5\gamma^3}{2.4.6(7m-6n-2)\beta^{\frac{7}{2}}.x^{\frac{7m-6n-2}{2}}}$$

$$\frac{-3.5.7\gamma^4}{2.4.6.8.(9m-8n-2)\beta^{\frac{9}{2}}.x^{\frac{9m-8n-2}{2}}} + \text{- - - - - - - - -}$$

$$\left.\frac{\pm 3.5.7\text{----}(2r-1)\gamma^r}{2.4.6.8\text{--}(2r-2)2r((2r+1)m-2rn-2)\beta^{\frac{2r+1}{2}}.x^{\frac{(2r+1)m-2rn-2}{2}}}\right).$$

5. Zusatz.

Unmittelbar nach den zwoen ersten Formeln findet man das Integral, welches mit einem unter der Form

$$dy = \frac{dx\sqrt{(Bx^p + Cx^q)}}{x^u}$$

gegebenen Verschwindungs-Quotienten zusammenhängt: denn es ist $dy = dx\sqrt{(Bx^{p-2u} + Cx^{q-2u})}$, und diese Formul ist mit der ersten des vorigen Zusatzes einerley, weswegen man das mit diesem Verschwindungs-Quotienten zusammenhängende Integral y nach der Formul II. des vorigen Zusatzes findet, wenn man daselbst $\beta = B$, $\gamma = C$, $m = p - 2u$, und $n = q - 2u$ setzt. Daß übrigens dieses sowohl für eine bejahte, als verneinte Zahl u gilt, ist offenbar.

6. Zusatz.

Wäre aber ein Verschwindungs-Quotient unter der Form

$$dy = \frac{x^u dx}{\sqrt{(Bx^p + Cx^q)}}$$

gegeben,

gegeben, wobey u bejaht oder verneint seyn kann; so wäre

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(Bx^{p-2u} + Cx^{q-2u})}},$$

welche Formul mit der dritten des vorigen Zusatzes einerley ist, daher findet man das mit diesem Verschwindungs-Quotienten zusammenhängende Integral y nach der Formul IV. des vorigen Zusatzes, wenn man bey ihr $\beta = B$, $\gamma = C$, $m = p - 2u$, und $n = q - 2u$ setzt.

Anmerkung.

Indessen ist diese Integrirungs-Methode sehr unvollkommen, weil der Gebrauch der ohne Ende fortlaufenden Reihen unbequem ist, und man dadurch das verlangte Integral nicht genau, sondern nur beynahe beurtheilen kann, ausgenommen, daß man die Summe der ein Integral ausdrückenden Reihe zu bestimmen im Stande ist, da doch dieses seine grossen Schwierigkeiten hat: mithin, weil an der genauesten und einfachen Bestimmung eines Integrals viel gelegen ist, darf man sich dieser Integrirungs-Methode nicht eher bedienen, als wenn man sich überzeugt hat, es sey kein Kunstgriff bekannt, wodurch sich dasselbe Integral ganz genau angeben ließe, und alsdann muß man dafür sorgen, daß die Reihen sich so schnell, als möglich nähern mögen (I. B. 133. §.).

27. §. Aufgabe.

Das Integral y zu bestimmen, welches mit einem unter der Form $dy = \frac{dz}{z}$ vorkommenden Verschwindungs-Quotienten zusammenhängt.

Auflö-

Auflösung. Es könnte einem einfallen, dieses Integral nach (26. §.) zu suchen: daselbst müßte man $m=-1$ setzen, und alsdann erhielte man

$$\int\frac{dz}{z}=\int z^{-1}dz=\frac{z^{-1+1}}{-1+1}=\frac{1}{0}$$

nichts angebliches: wenn man sich aber an die Gründe erinnert, aus welchen die in (26. §. 1. Zus.) gegebene Regel bestimmt wurde; so wird man sogleich einsehen, daß die dortige Regel den Fall, wo $m=-1$ wäre, ausschloß. Denn wir haben bey der Auflösung der dortigen Aufgabe blos aus dem Grunde bewiesen, es müsste $\int z^m dz=\frac{z^{m+1}}{m+1}$ seyn, weil $d\left(\frac{z^{m+1}}{m+1}+c\right)=z^m dz$ war, und dieses mußte wegen (8. §. Zus.) gelten, indem man daselbst $a=m+1$ setzen konnte: so wie also in (8. §. 3.) der Exponent a eine wirkliche bejahte oder verneinte, ganze oder gebrochene Zahl bedeuten mußte, und man für $a=0$ nichts gefunden hätte; eben so muß in (26. §.) $m+1=a$ eine wirkliche Zahl geben, welches doch für $m=-1$ nicht geschehen kann.

Das Integral $\int\frac{dz}{z}$ muß also aus andern Gründen bestimmt werden. Hätte man $u=lz+C$, wobey z entweder eine absolute veränderliche Grösse, oder eine Function von einer absoluten veränderlichen Grösse x seyn kann; so wäre $du=\frac{dz}{z}$ nach (17. §.): das mit dem Verschwindungs-Quotienten $dy=\frac{dx}{x}$ zusammenhängende

Integral

Integral ist daher eine Function $= lz + C$ (24. §.), oder $\int \frac{dz}{z} = lz + C$.

1. Zusatz.

Wie oft demnach ein gebrochener Verschwindungs-Quotient von der Form $dy = \frac{dz}{z}$ gegeben wird, wobey der Zähler den dem Nenner zugehörigen Verschwindungs-Quotienten enthält; so oft ist der veränderliche Theil des damit zusammenhängenden Integrals dem natürlichen Logarithmen des Nenners gleich.

Beyspiele.

Aus	folgt
$dy = \frac{2xdx}{1+x^2}$;	$y = l(1+x^2) + C$.
$dy = \frac{nx^{n-1}dx}{a+x^n}$;	$y = l(a+x^n) + C$.
$dy = \frac{Adz}{z}$;	$y = Alz + C$ (24. §. 3. Z.).

2. Zusatz.

Bisweilen enthält der Zähler nicht ausdrücklich den dem Nenner zugehörigen Verschwindungs-Quotienten, sondern nur insofern dieser mit einer gewissen unveränderlichen Grösse multiplicirt oder dividirt wird, in welchem Fall auch der Logarithme des Nenners mit eben derselben Grösse multiplicirt oder dividirt werden muß; man entdeckt es am sichersten dadurch, wenn man durch Einführung einer andern

dern veränderlichen Gröſſe den vorgelegten Verſchwindungs-Quotienten unter eine einfachere Form bringet.

Beyſpiele.

$dy = \frac{dx}{a(1+x)}$ giebt $y = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{a}l(1+x)+C.$

$dy = \frac{ax^{n-1}dx}{b-cx^n}$ für $z = b - cx^n$; $dz = -ncx^{n-1}dx$,

daher $x^{n-1}dx = \frac{-dz}{nc}$ giebt $dy = \frac{-adz}{ncz}$;

alſo $y = \frac{-a}{nc}\int\frac{dz}{z} = \frac{-a}{nc}lz = \frac{-a}{nc}l(b-cx^n)+C.$

5. Zuſatz.

Sey $y = \frac{AZ^v}{v} + Y$ das mit einem Verſchwindungs-Quotienten dy zuſammenhängende Integral; ſo iſt y eigentlich aus $dy = d\left(\frac{AZ^v}{v} + Y\right)$ entſtanden (24. §.), mithin aus $dy = AZ^{v-1}dZ + dY$, dergeſtalt, daß $\frac{AZ^v}{v} + Y$ durch die Gleichung $y = \int AZ^{v-1}dZ + \int dY$ vollkommen beſtimmt wird. Setzt man $v = 0$ bey $\frac{AZ^v}{v} + Y$; ſo übergeht dieſe Function dafür in $\frac{AZ^0}{0} + Y$; da aber für $v = 0$ das Integral $\int AZ^{v-1}dZ + \int dY = \int\frac{AdZ}{Z} + \int dY$ $= A\log Z + Y$ iſt; ſo muß dieſes der eigentliche Werth der Function y für $v = 0$ ſeyn, welchen man würde erhalten haben,

haben, wenn man vor der Integrirung des Verschwindungs-Quotienten dy, $v=0$ gesetzt hätte. Wie oft also das mit einem Verschwindungs-Quotienten dy zusammenhängende Integral die Form $y=\frac{AZ^v}{v}+Y$ hat, so oft muß man $A\,Log\,Z$ statt $\frac{AZ^0}{0}$ bey ihm nehmen, um den Werth zu erhalten, den dasselbe für $v=0$ eigentlich haben muß.

28. §. Aufgabe.

Den veränderlichen Theil Z eines Integrals $y=Z+C$, welches mit einem gegebenen oder auf irgend eine Art erhaltenen Verschwindungs-Quotienten dy zusammenhängt, hat man genau bestimmt; man soll untersuchen, ob es dafür einen unveränderlichen Theil C wirklich giebt, und was er für einen Werth haben muß.

Auflösung. Untersuchungen von dieser Art können nur bey wirklicher Anwendung der Integral-Rechnung angestellt werden, und alsdann kömmt alles darauf an, daß man aus der Natur derjenigen Grösse, welche das verlangte Integral $\int dy=Z+C$ geben soll, bestimme, was für einen Werth dieselbe Grösse erlangen müßte, wenn die veränderliche Grösse x, wovon $Z+C$ eine Function ist, einen gewissen Werth erreichte. Denn wenn es bekannt wäre, daß die Grösse, welche das Integral $Z+C$ ausdrückt, einen Werth W bekömmt, sobald die veränderliche Grösse x einen gewissen Werth v erlanget; so würde dieses ein un-

trüglicher Beweis davon seyn, daß das verlangte Integral Z+C den Werth W erlangen muß, wenn x=v bey ihm gesetzt wird; mithin müßte man bey ihm x=v wirklich setzen, wofür, wenn der veränderliche Theil Z in V für x=v übergienge, wäre V+C=W, folglich C=W—V. Folgende Aufgaben, weil sie aus andern Gründen bekannte Gegenstände betreffen, werden dieses und den Gebrauch der vorhergehenden Theorie genugsam erläutern.

29. §. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines geraden Kegels ABC (Fig. 3.) zu bestimmen.

Fig. 3.

Auflösung. 1) Sey seine Höhe AD=a, und DC=r der Halbmesser seiner Grundfläche BC. Nun nehme man ein beliebiges Stück Ab=x der Höhe AD, und bilde sich den durch b zur Grundfläche BC parallelen Durchschnitt PQ ein; so ist APQ ein unbestimmtes, von Ab=x abhängiges Stück des ganzen Kegels ABC, und nun läßt sich fragen, welche Function y von x würde den körperlichen Inhalt des Kegelstückes APQ genau ausdrücken.

2) Diese Function mag indessen was immer für eine seyn; so ist doch gewiß, daß sie von der Beschaffenheit seyn muß, vermöge welcher dieselbe gleich Null werden sollte, wenn x=o würde, und den körperlichen Inhalt des ganzen Kegels ABC für x=a geben müßte: denn das Kegelstück APQ, welches dieselbe Function ausdrücken soll, hängt von Ab=x dergestalt ab, daß es abnimmt, wenn

Ab kleiner wird, und verschwindet, wenn Ab = o ist; hingegen zunimmt, wenn Ab gröſſer wird, und in ABC übergehet, wenn Ab in AD sich verwandelt.

3) Stellt man sich vor, daß Ab = x um eine beliebige Differenz bc = Δx wächst, mithin Ab = x in Ac = x + Δx übergehet; so muß, indem dieses geschieht, y = APQ einen neuen Werth y′ = Apq erlangen, und es ist y′ − y = Apq − APQ = PQqp die Differenz der unbekannten Function y von x, nämlich Δy = PQqp (3. §. 2. Zus.). Da also das Kegelstück PQqp allemal gröſſer, als der Cylinder PgfQ bey der Grundfläche PQ, und zugleich allemal kleiner ist, als der Cylinder hpqe bey der Grundfläche pq, es mag bc = Δx wie immer klein genommen werden; so ist die Differenz Δy der nach unbekannten Function y = APQ dergestalt beschaffen, daß sie gröſſer als PQfg und zugleich kleiner als hpqe für jeden wie immer kleinen Werth von Δx = bc seyn muß.

4) Nun aber war die Höhe AD = a, und der Grundfläche BC Halbmesser DC = r, mithin der Flächen-Inhalt der Grundfläche = πr², wofern 1 : π das Verhältniß des Halbmessers zur halben Peripherie bedeutet; so ist des kreisförmigen Durchschnittes PQ Flächen-Inhalt = $\frac{\pi r^2}{a^2} x^2$, und des Durchschnittes pq seiner = $\frac{\pi r^2}{a^2}(x+\Delta x)^2$, folglich des Cylinders PQfg körperlicher Inhalt = $\frac{\pi r^2 x^2}{a^2} \cdot \Delta x$,

und des Cylinders hpqe seiner $= \frac{\pi r^2}{a^2}(x+\Delta x)^2.\Delta x$;
also ist nach (n. 3.) allemal

$$\Delta y > \frac{\pi r^2 x^2}{a^2}\cdot\Delta x;\quad \Delta y < \frac{\pi r^2}{a^2}(x+\Delta x)^2.\Delta x;$$

daher $\frac{\Delta y}{\Delta x} > \frac{\pi r^2}{a^2}x^2$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} < \frac{\pi r^2}{a^2}x^2 + \frac{\pi r^2}{a^2}(2x+\Delta x)\Delta x$.

5) Und aus diesen Bedingungen erhält man nach (20. §. Zus.) $dy = \frac{\pi r^2 x^2}{a^2}dx$ für den Verschwindungs-Quotienten der noch unbekannten Function y von x, welche das damit zusammenhängende Integral seyn soll (24. §.): also ist nach (26. §. 1. n. 2. Zus.) $y = \frac{\pi r^2 x^3}{3a^2} + C$.

Da aber diese Function $= o$ für $x = o$ wird (n. 2.); so muß $\frac{\pi r^2 . o^3}{3a^2} + C = o$, mithin $C = o$ seyn: die verlangte Function y, welche das Kegelstück APQ ausdrücken soll, hat daher keinen unveränderlichen Theil C, sie ist vielmehr ganz genau $y = \frac{\pi r^2 x^3}{3a^2}$. Weil ferner dieselbe Function für $x = a$ den körperlichen Inhalt des ganzen Kegels ABC geben muß (n. 2.); so ist dieser $= \frac{\pi r^2 a^3}{3a^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 a$

30. §. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt des zwischen zweenen zur Grundfläche BC parallelen Durchschnitten RS, PQ liegenden Kegelstückes RSQP zu bestimmen, wenn des Durchschnittes RS Entfernung von der Spitze A gegeben, etwa Aa = e, und des Durchschnittes PQ Entfernung unbestimmt genommen wird, nämlich Ab = x. Fig. 3.

Auflösung. 1) Das Kegelstück RSQP hängt von Ab = x dergestalt ab, daß es gleich Null werden muß, wenn Ab = Aa = e wird; ist demnach y = RSQP die Function von x, welche dasselbe Kegelstück ausdrücken soll; so ist auch y von der Beschaffenheit, daß y = o für x = e wird.

2) Nun mag y was immer seyn; so findet man doch den derselben Function zugehörigen Verschwindungs-Quotienten vollkommen nach (29. §. n. 3. 4. 5), und aus ihm die Function selbst $y = \frac{\pi r^2 x^3}{3a^2} + C$.

3) Aber wegen (n. 1.) muß $\frac{\pi r^2 e^3}{3a^2} + C = o$ seyn: also ist $C = -\frac{\pi r^2 e^3}{3a^2}$, daher ist $y = \frac{\pi r^2 x^3}{3a^2} - \frac{r^2 e^3}{3a^2}$ die Function, welche das Kegelstück RSQP für jeden Werth von x = Ab ausdrückt.

31. §. Aufgabe.

Für den gegebenen Halbmeſſer BC=r einer Kugel (Fig. 4.) ihren körperlichen Inhalt zu beſtimmen.

Fig. 4

I) Auflöſung. 1) Auf dem Halbmeſſer AC, der auf der Grundfläche BD der Halbkugel ſenkrecht ſtehen mag, nehme man ein Stück Ab=x, und bilde ſich durch den Punct b den zur Grundfläche parallelen Durchſchnitt PQ ein; ſo hängt der Kugelabſchnitt APQ von Ab=x dergeſtalt ab, daß er =o für Ab=o, und gleich der halben oder ganzen Kugel wird, wenn Ab=x dem Halbmeſſer oder dem Durchmeſſer gleich iſt. Es muß demnach eine Function y von x möglich ſeyn, welche den Kugelabſchnitt APQ ausdrückt, und ihre vorzügliche Beſchaffenheit beſtehet darinn, daß ſie entweder der Null, oder der Halbkugel, oder der ganzen Kugel gleich wird, ſobald x entweder der Null, oder dem Halbmeſſer, oder dem Durchmeſſer gleich iſt.

2) Um nun dieſelbe Function zu beſtimmen, ſtelle man ſich vor, es wachſe Ab=x um eine Differenz bc=Δx; ſo wird dafür die Function y=APQ um die Differenz Δy=PQqp zunehmen, wie in (29. §. n. 3.), und es iſt offenbar, daß dieſe noch unbekannte Differenz allemal gröſſer, als der Cylinder PgfQ, und allemal kleiner als der Cylinder hpqe ſeyn muß, man mag bc=Δx wie immer klein nehmen.

3) Da

3) Da nun die Halbmesser der Durchschnitte PQ und pq nichts anders sind, als zwo gerade Linien, welche von zweenen Puncten Q, q des Umfanges eines größten Kreises der Kugel auf seinen Durchmesser senkrecht fallen; so sind die Quadrate derselben Halbmesser $Qb^2 = Ab.(2AC - Ab)$, $qc^2 = Ac(2AC - Ac)$, mithin $Qb^2 = 2rx - x^2$ und $qc^2 = 2rx - x^2 + (2r - 2x - \Delta x)\Delta x$. Da also πr^2 den Quadratinhalt der Grundfläche BD ausdrückt, wenn $1 : \pi$ das Verhältniß des Halbmessers zur halben Peripherie bedeutet; so ist des Durchschnittes PQ Flächeninhalt $= \pi r^2 . \frac{Qb^2}{r^2} = \pi . Qb^2 = 2r\pi x - \pi x^2$, mithin ist des Cylinders PgfQ körperlicher Inhalt $= (2r\pi x - \pi x^2)\Delta x$; und des Durchschnittes pq Flächeninhalt ist $= \pi r^2 . \frac{qc^2}{r^2}$ $= \pi . qc^2 = 2r\pi x - \pi x^2 + \pi(2r - 2x - \Delta x)\Delta x$, folglich ist des Cylinders hpqe körperlicher Inhalt $= (2r\pi x - \pi x^2 + \pi(2r - 2x - \Delta x)\Delta x)\Delta x$.

4) Hieraus und aus (n. 2.) findet man für die Differenz Δy der verlangten Function $y = APQ$ folgende Bedingungen, welche für jede wie immer kleine Differenz $bc = \Delta x$ zugleich erfüllt werden müssen.

$$\Delta y > (2r\pi x - \pi x^2)\Delta x; \quad \Delta y < (2r\pi x - \pi x^2 + \pi(2r - 2x - \Delta x)\Delta x)\Delta x,$$

mithin auch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 2r\pi x - \pi x^2; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} < 2r\pi x - \pi x^2 + \pi(2r - 2x - \Delta x)\Delta x.$$

Und aus diesen Bedingungen ergiebt sich nach (20. §. Zus.) der der noch unbekannten Function $y = APQ$ zugehörige Verschwindungs-Quotient $dy = 2r\pi x dx - \pi x^2 dx$, mithin ist dieselbe Function, als das mit dy zusammenhängende Integral (24. §.) nach (26. §. 3. Zusatz) $y = \frac{2r\pi x^2}{2} - \frac{\pi x^3}{3} + C$, oder $y = r\pi x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 + C$.

Für $x = o$ soll aber diese Function auch gleich Null seyn (n. 1.): also ist $r\pi . o^2 - \frac{1}{3}\pi . o^3 + C = o$, folglich $C = o$, daher ganz genau $y = r\pi x^2 - \frac{\pi x^3}{3}$, woraus wegen (n. 1.), für $x = r$ der körperliche Inhalt der Halbkugel $= r\pi . r^2 - \frac{\pi . r^3}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$, und für $x = 2r$ der körperliche Inhalt der ganzen Kugel $= r\pi . 4r^2 - \frac{\pi . 8r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$ folgt.

II. Auflösung. 1) Man nehme vom Mittelpuncte C an ein Stück $Cc = x$, welches um das Stück $cb = \Delta x$ hernach wachsen soll; so wird $y = Apq$ eine solche Function von $x = Cc$ seyn, welche um eine Differenz $\Delta y = Ppq$ abnimmt, indem x um Δx zunimmt, und aus dieser Ursache wird man den der Function y zugehörigen Verschwindungs-Quotienten verneint nehmen müssen (5. §. 8. Zus.).

2) Uebri-

2) Uebrigens bleiben die bey der vorigen Auflösung (n. 2.) erwähnten Bedingungen ungeändert, nämlich $\Delta y > PgfQ$ und $\Delta y < hpqe$. Weil aber nun $Cc = x$ und $AC = r$ ist; so sind nun die Quadrate der Halbmesser der Durchschnitte PQ, pq folgende, $Qb^2 = Ab.(AC+Cb) = (r-(x+\Delta x))(r+x+\Delta x)$; $qc^2 = Ac.(Ac+Cc) = (r-x)(r+x)$, oder $Qb^2 = r^2 - x^2 - (2x+\Delta x)\Delta x$; $qc^2 = r^2 - x^2$; mithin ist nun des Durchschnittes PQ Flächeninhalt $= \pi r^2 . \frac{Qb^2}{r^2} = \pi . Qb^2 = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi(2x+\Delta x)\Delta x$, und des Cylinders PgfQ körperlicher Inhalt $= (\pi r^2 - \pi x^2 - \pi(2x+\Delta x)\Delta x)\Delta x$; ferner ist des Durchschnitts pq Flächeninhalt $= \pi r^2 . \frac{qc^2}{r^2} = \pi . qc^2 = \pi r^2 - \pi x^2$, und des Cylinders pheq körperlicher Inhalt $= (\pi r^2 - \pi x^2)\Delta x$. Hieraus und aus vorigen Bedingungen folgt endlich, es sey:

$$\Delta y < (\pi r^2 - \pi x^2)\Delta x; \quad \Delta y > (\pi r^2 - \pi x^2 - \pi(2x+\Delta x)\Delta x)\Delta x,$$

daher auch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < \pi r^2 - \pi x^2; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} > \pi r^2 - \pi x^2 - \pi(2x+\Delta x)\Delta x.$$

3) Nach (20. §. Zus.) sollte also $dy = (\pi r^2 - \pi x^2)dx = \pi r^2 dx - \pi x^2 dx$ der Verschwindungs-Quotient seyn, welcher der noch unbekannten Function $y = Apq$ zugehört; er ist aber wegen (n. 1.) eigentlich $dy = \pi x^2 dx - \pi r^2 dx$, folglich ist nach (26. §. 3. Zus.) die verlangte Function $Apq = y = \frac{\pi x^3}{3} - \pi r^2 x + C$.

4) Nun ist klar, daß die Function $y = Apq$ abnimmt, wenn $Cc = x$ zunimmt, und sie gleich Null wird, wenn $Cc = x = CA = r$ ist: für $x = r$ muß also das Integral in (n. 3.) die Gleichung $\frac{\pi r^3}{3} - \pi r^2 . r + C = o$ geben, und hieraus erhält man $C = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$. Die Function $y = Apq$ in (n. 3.) ist also ganz genau $y = \frac{\pi x^3}{3} - \pi r^2 x + \frac{2}{3}\pi r^3$.

Aus $y = Apq$ muß für $Cc = x = o$ der körperliche Inhalt der Halbkugel erhalten werden, welcher daher ist $= \frac{\pi . o^3}{3} - \pi r^2 . o + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$: und für $x = -r$ verwandelt sich Apq in die ganze Kugel; ihr körperlicher Inhalt ist demnach $\frac{\pi(-r)^3}{3} - \pi r^2(-r) + \frac{2}{3}\pi r^3$ $= -\frac{\pi r^3}{3} + \pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

32. §. Aufgabe.

Ein zur Grundfläche BD der Halbkugel BAD paralleler Durchschnitt RS liegt in einer bestimmten Entfernung $Aa = e$ vom äusserſten Punct A des auf derselben Grundfläche senkrecht stehenden Halbmessers AC; eines andern Durchschnittes PQ Entfernung $Ab = x$ ist aber veränderlich: man soll den körperlichen Inhalt des Kugelstückes RSQP bestimmen,

men, welches zwiſchen den Durchſchnitten RS, PQ liegt.

Auflöſung. 1) Das Kugelſtück RSQP hängt von Ab = x dergeſtalt ab, daß es gleich Null wird, wenn Ab = x in Aa = e übergeht: diejenige Function y von x, welche es ausdrücken mag, muß alſo von der Beſchaffenheit ſeyn, daß ſie für x = e gleich Null ſey.

2) Nun findet man vollkommen ſo, wie in (31. §. I. Aufl. n. 2. 3. 4.), es ſey $y = r\pi x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 + C$; daher iſt wegen (n. 1.), $r\pi e^2 - \frac{1}{3}\pi e^3 + C = 0$, folglich $C = \frac{1}{3}\pi e^3 - r\pi e^2$, und nun $y = r\pi(x^2 - e^2) - \frac{1}{3}\pi(x^3 - e^3)$.

33. §. Aufgabe.

Das Integral $\int x^u dx (g + fx^h)^q$ durch Potenzen von $g + fx^h$ auszudrücken.

Auflöſung. Sey $g + fx^h = z$; ſo iſt $x = \frac{(z-g)^{\frac{1}{h}}}{f^{\frac{1}{h}}}$;

$dx = \frac{dz\,(z-g)^{\frac{1-h}{h}}}{h f^{\frac{1}{h}}}$; und $x^u = \frac{(z-g)^{\frac{u}{h}}}{f^{\frac{u}{h}}}$;

alſo iſt

$$x^u dx (g + fx^h)^q = \frac{z^q dz (z-g)^{\frac{u+1}{h} - 1}}{h f^{\frac{u+1}{h}}}.$$

Und

Und für $\mu = \frac{n+1}{h}$ iſt.

$$x^n dx(g+fx^h)^q = \frac{1}{hf^\mu} \cdot z^q dz (z-g)^{\mu-1}$$

Nun iſt nach (I. B. 76. §. 6. Zuſ.)

$$(z-g)^{\mu-1} = z^{\mu-1} - \frac{(\mu-1)}{1} gz^{\mu-2} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2} g^2 z^{\mu-3}$$

$$- \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3} \cdot g^3 z^{\mu-4} + \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-r)}{1.2.3\ldots(r-1)r} \cdot g^r z^{\mu-r-1};$$

alſo muß ſeyn:

$$x^n dx(g+fx^h)^q = \frac{1}{hf^\mu}\Big(z^{q+\mu-1}dz - \frac{(\mu-1)}{1} \cdot g z^{q+\mu-2}dz$$

$$+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2} \cdot g^2 z^{q+\mu-3}dz \ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-r)}{1.2.3\ldots\ldots(r-1)} \cdot g^r z^{q+\mu-r-1}dz\Big)$$

Und hieraus findet man nach (26. §. 3. Zuſ.)

$$\int x^n dx(g+fx^h)^q = \frac{1}{hf^\mu}\Big(\frac{z^{q+\mu}}{q+\mu}$$

$$- \frac{(\mu-1)g}{1} \cdot \frac{z^{q+\mu-1}}{q+\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)g^2}{1.2} \cdot \frac{z^{q+\mu-2}}{q+\mu-2}$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\pm \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-r)g^r}{1.2.3\ldots\ldots(r-1)r} \cdot \frac{z^{q+\mu-r}}{q+\mu-r}\Big) + C.$$

1. Zusatz.

Für $u=m$, $g=a$, $f=b$, $h=n$, $q=p$, mithin $z=g+fx^h=a+bx^n$ erhält man hieraus.

$$\mu=\frac{m+1}{n}$$

$$\text{I)}\ \int x^m dx(a+bx^n)^p=\frac{1}{nb^\mu}\Big(\frac{(a+bx^n)^{p+\mu}}{p+\mu}$$
$$-\frac{(\mu-1)a}{1}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+\mu-1}}{p+\mu-1}$$
$$+\frac{(\mu-1)(\mu-2)a^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+\mu-2}}{p+\mu-2}$$
$$-\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+\mu-3}}{p+\mu-3}$$
$$+\ \text{— — — — — — — —}$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$\pm\frac{(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-r)a^r}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+\mu-r}}{p+\mu-r}\Big)+C.$$

Aus dem unbestimmten Gliede erhält man alle vorhergehenden Glieder, vom zweyten Gliede an, wenn man bey ihm $r=1$, $r=2$, $r=3$, u. s. f. setzt.

Es ist ferner $x^m dx(a+bx^n)^p=x^{m+np}dx(ax^{-n}+b)^p$: das damit zusammenhängende Integral wird man also aus der vorigen allgemeinen Formul für $u=m+np$, $f=a$, $g=b$, $h=-n$, $q=p$, mithin $z=ax^{-n}+b=\frac{a+bx^n}{x^n}$, wie folgt, erhalten:

$\mu=$

$$\mu = -\left(\frac{m+1}{n} + p\right).$$

$$\text{II)}\ \int x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{1}{n a^\mu}\left(-\frac{\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+\mu}}{p+\mu}\right.$$

$$+\frac{(\mu-1)b}{1}\cdot\frac{\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+\mu-1}}{p+\mu-1}$$

$$-\frac{(\mu-1)(\mu-2)b^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+\mu-2}}{p+\mu-2}$$

$$+\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)b^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+\mu-3}}{p+\mu-3} -$$

$$- - - - - - - -$$

$$- - - - - - - -$$

$$- - - - - - - -$$

$$\left.\pm\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\cdots(\mu-r)b^r}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r}\cdot\frac{\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+\mu-r}}{p+\mu-r}\right)+C.$$

Auch hier giebt das unbestimmte Glied für $r=1$, $r=2$, $r=3$ u. s. f. alle vorhergehende Glieder vom zweyten an gerechnet.

2. Zusatz.

Einleuchtend ist es, daß die Reihen (1. Zus.) ohne Ende fortlaufen müssen, wenn μ eine solche Zahl ist, wofür kein Factor $\mu - r$ gleich Null werden kann; für eine solche Zahl μ läßt sich demnach das Integral $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ nach

nach (1. Zuſ.) nie vollkommen beſtimmen. Wie oft aber μ eine ganze bejahte Zahl iſt; ſo oft muß ein unter den Factoren $\mu-1$, $\mu-2$, $\mu-3$ ------, welche aus $\mu-r$ für $r=1$, $r=2$, $r=3$ erhalten werden, nothwendig gleich Null ſeyn, und dafür bricht eine von den Reihen I) II) in (1. Zuſ.) ab, und giebt eine beſtimmte Anzahl von Gliedern für das Integral, welches dieſelbe ausdrückt.

3. Zuſatz.

Da alſo bey der erſten Reihe in (1. Zuſ.) $\mu=\frac{m+1}{n}$, bey der zweyten Reihe aber $\mu=-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$ war, welches nur alsdann eine ganze bejahte Zahl ſeyn kann, wenn $\frac{m+1}{n}+p$ eine ganze verneinte Zahl iſt; ſo iſt gewiß, daß man das Integral $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ nach (1. Zuſ.) nur in zweenen Fällen vollkommen beſtimmen kann; erſtlich nach der dortigen erſten Reihe, wenn $\mu=\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte Zahl iſt, es mögen m, n, p, für ſich genommen, was immer für Zahlen ſeyn: hernach nach der dortigen zweyten Reihe, wenn $\frac{m+1}{n}+p$ eine ganze verneinte Zahl iſt. Und wenn beym wirklichen Gebrauch derſelben Reihen in irgend einem Gliede $\frac{(a+bx^n)^\circ}{\circ}$ oder $\frac{\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^\circ}{\circ}$ vorkömmt; ſo wird man ſtatt deſſen den natürlichen Logarithmen von $a+bx^n$ oder $\frac{a+bx^n}{x^n}$ nehmen müſſen (27. §. 2. Zuſ.).

Bey-

Beyspiele.

1. Sey $dy = x^5 dx\sqrt{(2+x^2)^3} = x^5 dx(2+x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Hier giebt $x^5 dx(2+x^2)^{\frac{3}{2}}$ mit $x^m dx(a+bx^n)^p$ verglichen die Werthe $m=5$, $a=2$, $b=1$, $n=2$, $p=\frac{3}{2}$, $\mu=\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{2}=3$, welches eine ganze bejahte Zahl ist: das Integral y erhält man also nach (1. Zuf. I. Form.) wie folgt:

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}(2+x^2)^{\frac{9}{2}}-\frac{2}{1}\cdot 2\cdot\frac{2}{7}(2+x^2)^{\frac{7}{2}}+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{5}(2+x^2)^{\frac{5}{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{9}(2+x^2)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{7}(2+x^2)^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}(2+x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

Sey $dy=\frac{dx\sqrt{(3-5x^2)^3}}{x^8}=x^{-8}dx(3-5x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Vergleichet man $x^m dx(a+bx^n)^p$ mit $x^{-8}dx(3-5x^2)^{\frac{3}{2}}$; so wird seyn $m=-8$, $n=2$, $p=\frac{3}{2}$ nun ist $\frac{m+1}{n}=\frac{-7}{2}$ keine ganze bejahte Zahl, mithin läßt sich das Integral nach (1. Zuf. I. Form.) nicht bestimmen. Setzt man aber $p=\frac{3}{2}$ hinzu; so ist $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-7}{2}+\frac{3}{2}=-2$ eine ganze verneinte Zahl: also kann das Integral y nach (1. Zuf. II. Form.) erhalten werden, nämlich für $p=\frac{3}{2}$, $\mu=-(-2)=2$, $a=3$, $b=-5$, $m=-8$, $n=2$, wie folgt:

$y=$

$$y=\frac{1}{2.3^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{2}{7}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{1}.5.\frac{2}{5}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}\right)+C.$$

$$=-\frac{1}{63}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{9}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}+C.$$

Sey $dy=\frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{(1+x^{\frac{3}{2}})^3}=x^{\frac{7}{2}}dx(1+x^{\frac{3}{2}})^{-3}$.

Für $m=\frac{7}{2}$, $n=\frac{3}{2}$ ist $\frac{m+1}{n}=\frac{9}{2}:\frac{3}{2}=3$: alſo findet man das Integral y nach (1. Zuſ. I. Form.) für $\mu=3$, $p=-3$, $a=b=1$, $n=\frac{3}{2}$, $m=\frac{7}{2}$, wie folgt:

$$y=\frac{2}{3}\left(\frac{(1+x^{\frac{3}{2}})^0}{0}+3(1+x^{\frac{3}{2}})^{-1}-\frac{1}{2}(1+x^{\frac{3}{2}})^{-2}\right)+C.$$

$$=\frac{2}{3}\log(1+x^{\frac{3}{2}})+\frac{4}{3(1+x^{\frac{3}{2}})}-\frac{1}{3(1+x^{\frac{3}{2}})^2}+C.$$

Sey $dy=\frac{x^{15}dx}{(1+x^4)^2}=x^{15}dx(1+x^4)^{-2}$.

Für $m=15$, $n=4$ ist $\frac{m+1}{n}=4$, mithin läßt ſich das Integral y nach (1. Zuſ. I. Form.) für $\mu=4$, $p=-2$, $a=b=1$, $n=4$ beſtimmen, wie folgt:

$$y=\frac{1}{4}\left(\frac{(1+x^4)^2}{2}-3(1+x^4)^1+\frac{3(1+x^4)^0}{0}\right.$$

$$\left.+(1+x^4)^{-1}\right)+C.$$

$$=\frac{1}{8}(1+x^4)^2-\frac{3}{4}(1+x^4)+\frac{3}{4}\log(1+x^4)\frac{+1}{4(1+x^4)}+C.$$

Sey $dy = \frac{dx}{x^{\frac{13}{4}}(3+7x^{\frac{3}{4}})^2} = x^{-\frac{13}{4}} dx (3+7x^{\frac{3}{4}})^{-2}$.

Für $m = -\frac{13}{4}$, $n = \frac{3}{4}$ ist $\frac{m+1}{n} = -\frac{9}{4} : \frac{3}{4} = -3$ keine ganze bejahte Zahl: hingegen ist $\frac{m+1}{n} + p = -3 - 2 = -5$ eine ganze verneinte Zahl. Man findet also das Integral y nach (1. Zuf. II. Form.) für $\mu = 5$, $n = \frac{3}{4}$, $a = 3$, $b = 7$, $p = -2$, wie folgt:

$$y = \frac{4}{3^6}\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{3+7x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\right)^3 + 4.7.\frac{1}{2}\left(\frac{3+7x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\right)^2 - \frac{4.3.7^2}{1.2}.\left(\frac{3+7x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\right) + \frac{4.3.2.7^3}{1.2.3}.\left(\frac{3+7x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\right)^0 + \frac{4.3.2.1.7^4}{1.2.3.4}\left(\frac{3+7x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\right)^{-1}\right) + C.$$

$$= \frac{4}{3^6}\left(-\frac{1}{3}.\frac{(3+7x^{\frac{3}{4}})^3}{x^{\frac{9}{4}}} + \frac{14(3+7x^{\frac{3}{4}})^2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{294(3+7x^{\frac{3}{4}})}{x^{\frac{3}{4}}} + 1372\log\left(\frac{3+7x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\right) + \frac{2401x^{\frac{3}{4}}}{3+7x^{\frac{3}{4}}}\right) + C.$$

4. Zu-

4. Zusatz.

Kömmt ein Verschwindungs-Quotient unter der Form $x^q dx(gx^h+fx^r)^s$ vor; so schaffe man die veränderliche Grösse aus was immer für einem Gliede des zwischen den Klammern befindlichen Binomiums weg, etwa x^r aus dem zweyten Gliede, welches leicht geschieht, wenn man den Exponenten q um das Product aus r in s vermehrt, und zugleich den Exponenten h um r vermindert, mithin setzt:

$$x^q dx(gx^h+fx^r)^s = x^{q+rs} dx(gx^{h-r}+f)^s.$$

Ist dieses geschehen; so sehe man, ob nicht das damit zusammenhängende Integral sich nach (2. Zus.) bestimmen läßt.

Beyspiele.

Sey $dy = \frac{x^{\frac{10}{3}} dx}{\sqrt[3]{(5x^4+8x^5)}} = x^{\frac{10}{3}} dx(5x^4+8x^5)^{-\frac{1}{3}}$.

Man setze $dy = x^{\frac{10}{3}-\frac{4}{3}} dx(5+8x^{5-4})^{-\frac{1}{3}} = x^2 dx(5+8x)^{-\frac{1}{3}}$;

so ist nach (1. Z. I. Form.) für $a=5, b=8, \mu=3, n=1, p=-\frac{1}{3}$.

$$y = \frac{1}{8^3}\left(\frac{3}{8}(5+8x)^{\frac{8}{3}} - 6(5+8x)^{\frac{5}{3}} + \frac{75}{2}(5+8x)^{\frac{2}{3}}\right)+C.$$

Sey $dy = \frac{x^5 dx}{(x^2+x)^2} = x^5 dx(x^2+x)^{-2}$.

Man setze $dy = x^{5-2} dx(x^{2-1}+1)^{-2} = x^3 dx(x+1)^{-2}$.

So ist nach (1. Z. I. Form.) für $a=b=1, \mu=4, p=-2, n=1$.

$$y = \frac{1}{4}(x+1)^4 - 3(x+1) + 3\log(x+1) + \frac{1}{x+1} + C.$$

Sey $dy = \frac{x^3 dx}{(x+x^2)^5} = x^3 dx (x+x^2)^{-5}$.

Man ſetze $dy = x^{3-5} dx (1+x^{2-1})^{-5} = x^{-2} dx (1+x)^{-5}$.

Dafür muß man das Integral nicht nach (1. Zuſ. I. Form.) ſuchen, indem $\frac{m+1}{n} = \frac{-2+1}{1} = -1$ keine bejahte ganze Zahl iſt: man findet es aber nach (1. Zuſ. II. Form.) für $m = -2$, $n = 1$, $p = -5$, $a = b = 1$, und $\mu = -\left(\frac{m+1}{n} + p\right) = 6$, wie folgt:

$$y = -\frac{(1+x)}{x} + 5 \log\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{10x}{1+x} - \frac{5x^2}{(1+x)^2} + \frac{5x^3}{3(1+x)^3} - \frac{x^4}{4(1+x)^4} + C.$$

Anmerkung.

Es war übrigens hier nur vom veränderlichen Theile eines Integrals die Rede, woraus der andere unveränderliche Theil C, wenn es einen giebt, bey wirklicher Anwendung der Integral-Rechnung nach (28. §.) beſtimmt werden kann: in der Folge werden wir die Conſtante C mehrentheils weglaſſen, und nur den veränderlichen Theil eines verlangten Integrals zu beſtimmen ſuchen, wobey doch allemal die Vorausſetzung zum Grunde liegen wird, daß hinzu vielleicht noch eine Conſtante C kommen muß, welches nach (28. §.) erſt entſchieden werden ſoll.

Der

Der II. Abschnitt.

Von den merkwürdigsten Verschwindungs-Quotienten, derer Integrirung von Logarithmen und Kreisbogen abhängt.

34. §. Aufgabe.

Die Integralien zu bestimmen, welche mit den Verschwindungs-Quotienten $\frac{adx}{b-cx^2}$, $\frac{adx}{cx^2-b}$, $\frac{adx}{\sqrt{(cx^2 \pm b)}}$, $\frac{\pm adx}{b+cx^2}$, $\frac{\pm adx}{\sqrt{(b-cx^2)}}$ zusammenhängen.

Auflösung. Es wird hier und überall in der Folge vorausgesetzt, daß diejenigen Integralien, welche durch Logarithmen oder Kreisbogen bestimmt sind, als vollkommen bestimmte, nämlich als solche Functionen betrachtet werden müssen, welche man in Zahlen so genau, als es immer verlangt werden mag, angeben kann, wofür theils durch die schon berechneten logarithmischen und trigonometrischen Tafeln, theils auch durch die Bestimmung verschiedener Methoden dieselben zu berechnen genugsam gesorgt worden ist. Nun soll seyn:

I) $\int \frac{adx}{b-cx^2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot l \frac{\sqrt{b}+x\sqrt{c}}{\sqrt{b}-x\sqrt{c}}$.

II) $\int \frac{adx}{cx^2-b} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot l \frac{x\sqrt{c}-\sqrt{b}}{x\sqrt{c}+\sqrt{b}}$.

III) $\int \frac{a\,dx}{\sqrt{(cx^2 \pm b)}} = \frac{a}{\sqrt{c}} \cdot l(x\sqrt{c} + \sqrt{(cx^2 \pm b)})$.

IV) $\int \frac{a\,dx}{b + cx^2} = \frac{a}{\sqrt{bc}} \cdot \text{Arc Tang } \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$.

V) $\int \frac{-a\,dx}{b + cx^2} = \frac{a}{\sqrt{bc}} \cdot \text{Arc Cot } \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$.

VI) $\int \frac{a\,dx}{\sqrt{(b - cx^2)}} = \frac{a}{\sqrt{c}} \cdot \text{Arc Sin } \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{a}{\sqrt{c}} \text{ Arc Tang } \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{(b - cx^2)}}$.

VII) $\int \frac{-a\,dx}{\sqrt{(b - cx^2)}} = \frac{a}{\sqrt{c}} \cdot \text{Arc Cof } \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{a}{\sqrt{c}} \text{ Arc Tang } \frac{\sqrt{(b - cx^2)}}{x\sqrt{c}}$.

Beweis. Die Integralien I) II) erhält man aus (27. §.) mit Zuziehung (I. B. 165. §.) auf diese Art.

Es ist $\frac{a\,dx}{b - cx^2} = \frac{a\,dx}{2(\sqrt{b} + x\sqrt{c})\sqrt{b}} + \frac{a\,dx}{2(\sqrt{b} - x\sqrt{c})\sqrt{b}}$;

$\frac{a\,dx}{cx^2 - b} = \frac{a\,dx}{2(x\sqrt{c} - \sqrt{b})\sqrt{b}} \cdot \frac{-a\,dx}{2(x\sqrt{c} + \sqrt{b})\sqrt{b}}$;

also ist

$\int \frac{a\,dx}{b - cx^2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot l(\sqrt{b} + x\sqrt{c}) \frac{-a}{2\sqrt{bc}} l(\sqrt{b} - x\sqrt{c})$,

$\int \frac{a\,dx}{cx^2 - b} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} l(x\sqrt{c} - \sqrt{b}) - \frac{a}{2\sqrt{bc}} l(x\sqrt{c} + \sqrt{b})$.

Und dieß sind die in I) II) angeführten Integralien.

Ferner

Ferner sey $z = x\sqrt{c} = \sqrt{(cx^2 \pm b)}$; so ist

$$x = \frac{z^2 \mp b}{2z\sqrt{c}}; \quad dx = \frac{(z^2 \pm b)dz}{2z^2\sqrt{c}},$$

$$\sqrt{(cx^2 \pm b)} = z - x\sqrt{c} = z - \frac{z^2 \pm b}{2z} = \frac{z^2 \pm b}{2z};$$

also $\int \frac{dx}{\sqrt{(cx^2 \pm b)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot lz$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} l(x\sqrt{c} + \sqrt{(cx^2 \pm b)}).$$

Welches das Integral III) ist.

Unmittelbar aus der im (24. §.) gegebenen Erklärung, und aus (22. §. und 2. §. 11. Zus.) erhält man folgende Integralien:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{Arc Sinz}; \int \frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{Arc Cos z}.$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{Arc Tang z}; \int \frac{-dz}{1+z^2} = \text{Arc Cot z}.$$

Setzt man aber $z = \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$, mithin $x = \frac{z\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$, $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$; so findet man:

$$\int \frac{\pm a\,dx}{\sqrt{(b-cx^2)}} = \frac{a}{\sqrt{c}} \int \frac{\pm dz}{\sqrt{(1-z^2)}}; \int \frac{\pm a\,dx}{b+cx^2}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{bc}} \int \frac{\pm dz}{1+z^2}.$$

Hieraus ergeben sich also für $z = \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$ die Integralien (IV - - - - VII).

35. §. Aufgabe.

Das Integral zu bestimmen, welches mit einem unter der Form $dy = \frac{Adx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ vorkommenden Verschwindungs-Quotienten zusammenhängt.

Auflösung. Sey $x+\frac{\beta}{2\gamma}=z$; so wird seyn $dx=dz$; $x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\beta^2}{4\gamma^2}=z^2$, mithin $\gamma x^2+\beta x+\alpha=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}+\gamma z^2$: also ist

$$1)\int\frac{Adx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\int\frac{Adz}{\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}+\gamma z^2}$$

Ist nun γ wirklich bejaht; so findet man dieses Integral nach 34. §. IV. Form.) für $a=A$, $b=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$, $c=\gamma$, nämlich:

$$2)\int\frac{Adx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{A}{\sqrt{\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}\cdot\gamma}}\cdot\text{ArcT}\frac{z\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}}}$$

$$=\frac{2A}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}\text{Arc Tang}\frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}+C.$$

Ist aber γ verneint; so giebt (n. 1.) folgendes Integral, welches nach (34. §. I. Form.) für $a=A$, $b=\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{4\gamma}$, $c=\gamma$ gefunden wird.

3)

$$3)\int\frac{A\,dx}{\alpha+\beta x-\gamma x^2}=\int\frac{A\,dz}{\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{4\gamma}-\gamma z^2}$$

$$=\frac{A}{2\sqrt{\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{4\gamma}}\cdot\gamma}\cdot\log\frac{\sqrt{\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{4\gamma}}+z\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{4\gamma}}-z\sqrt{\gamma}}$$

$$=\frac{A}{\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}\cdot\log\frac{\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}+2\gamma x-\beta}{\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}-2\gamma x+\beta}+C.$$

Anmerkung.

Bey wirklicher Anwendung dieser Formuln kömmt alles darauf an, daß man die unmöglichen Gröſſen zu vermeiden suche, welche hier vorkommen können, etwa in (n. 2.) für $4\alpha\gamma<\beta^2$; dazu wird aber die Verwandlung der Zeichen im Zähler und Nenner, womit ein vorgelegter Verschwindungs-Quotient versehen ist, in entgegengeſetzte hinreichen, damit derselbe zur Formul gehöre, welche für diese neuen Zeichen nichts unmögliches giebt. Zu diesen Formuln gehört doch nicht der Fall, wo $4\alpha\gamma=\beta^2$ ist: denn wo dieſes geschieht, da ist eigentlich

$$\int\frac{A\,dx}{\alpha\pm\beta x+\gamma x^2}=\int\frac{A\,dx}{(\sqrt{\alpha}\pm x\sqrt{\gamma})^2}=\frac{\mp A}{\sqrt{\alpha\gamma}\pm\gamma x}.$$

Beyspiele.

Sey $dy=\frac{dx}{1-x+x^2}$.

Für $A=1$, $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=1$ ist nach (n. 2.)

$$\int\frac{dx}{1-x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\text{Arc Tang}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Sey $dy = \frac{dx}{1+3x-x^2}$,

Für $A=1$, $\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=1$ iſt nach (n. 3.).

$$\int \frac{dx}{1+3x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot l \frac{\sqrt{13}+2x-3}{\sqrt{13}-2x+3} + C.$$

Sey $dy = \frac{dx}{1-3x+x^2}$.

Dieſen Verſchwindungs-Quotienten ſollte man, wie er da ſtehet, nach (n. 2.) integriren, nämlich für $A=1$, $\alpha=1$, $\beta=-3$, $\gamma=1$: es wäre aber $\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)} = \sqrt{-5}$ eine unmögliche Gröſſe. Daher, um dieſe zu vermeiden, nehme man den vorgelegten Verſchwindungs-Quotienten mit entgegengeſetzten Zeichen im Zähler und Nenner, wie folgt:

$$dy = \frac{-dx}{-1+3x-x^2}.$$

Und nun für $A=-1$, $\alpha=-1$, $\beta=3$, $\gamma=1$ nach (n. 3.).

$$\int \frac{dx}{1-3x+x^2} = \int \frac{-dx}{-1+3x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot l \frac{\sqrt{5}+2x-3}{\sqrt{5}-2x+3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot l \frac{\sqrt{5}-2x+3}{\sqrt{5}+2x-3} + C.$$

1. Zuſatz.

Bey der Auflöſung der vorigen Aufgabe in (n. 1. 2.) ſetze man $\alpha = a^2$, $\beta = -2ab\,Cof\varphi$, $\gamma = b^2$; ſo iſt $\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)} = 2ab\,Sin\varphi$, und nun:

$$\int \frac{A\,dx}{a^2-2abx\,Cof\varphi+b^2x^2} = \frac{A}{ab\,Sin\varphi} \cdot ArcTang \frac{bx-a\,Cof\varphi}{Sin\varphi} + C.$$

2. Zu-

2. Zuſatz.

Soll dieſes Integral für $x = o$ auch gleich Null ſeyn; ſo muß man ſetzen, es ſey

$$\frac{A}{ab\,\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot \mathrm{Arc\ Tang}\ \frac{-\mathrm{Cof}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} + C = o,$$

daher $C = \frac{-A}{ab\,\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot \mathrm{Arc\ Tang}\ \frac{-\mathrm{Cof}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$ und

$$\int \frac{A\,dx}{a^2 - 2abx\,\mathrm{Cof}\,\varphi + b^2x^2} = \frac{A}{ab\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\left(\mathrm{Arc\ Tang}\ \frac{bx - a\,\mathrm{Cof}\,\varphi}{a\,\mathrm{Sin}\,\varphi} + \mathrm{Arc\ Tang}\ \frac{-\mathrm{Cof}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}\right),$$

oder nach (I. B. 156. §. 1. Zuſ. XV. Form.)

$$\int \frac{A\,dx}{a^2 - 2abx\,\mathrm{Cof}\,\varphi + b^2x^2} = \frac{A}{ab\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\ \mathrm{Arc\ Tang}\ \frac{bx\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{a - bx\,\mathrm{Cof}\,\varphi}.$$

36. §. Aufgabe.

Das Integral zu beſtimmen, welches einem unter der Form $\frac{A\,dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ vorkommenden Verſchwindungs-Quotienten zugehört.

Auflöſung. Sey, wie in (35. §.) $z = x + \frac{\beta}{2\gamma}$, $dx = dz$, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma} + \gamma z^2$, ſo wird ſeyn:

$$\int \frac{A\,dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} = \int \frac{A\,dz}{\sqrt{\left(\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma} + \gamma z^2\right)}}.$$

Iſt nun γ wirklich bejahet; ſo findet man dieſes Integral nach (34. §. III. Form.) für $a=A$, $c=\gamma$, $b=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$, wie folgt in I). Iſt aber γ verneint; ſo erhält man daſſelbe Integral, wie es folgt in II), nach (34. §. VI. Form.) für $a=A$, $b=\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{4\gamma}$, $c=\gamma$.

I) $\int\frac{A\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}=\frac{A}{\sqrt{\gamma}}\,l\left(x\sqrt{\gamma}+\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}+\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}\right)+C.$

II) $\int\frac{A\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}}=\frac{A}{\sqrt{\gamma}}\cdot\mathrm{ArcT}\frac{2\gamma x-\beta}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}}+C.$

Beyſpiele.

Sey $dy=\frac{dx}{\sqrt{(-2+x+x^2)}}$.

Für $A=1$, $\alpha=-2$, $\beta=\gamma=1$ iſt nach I)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(-2+x+x^2)}}=l\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{(-2+x+x^2)}\right)+C.$$

Sey $dy=\frac{dx}{\sqrt{(x^2-x-6)}}$.

Für $A=1$, $\alpha=-6$, $\beta=-1$, $\gamma=1$ iſt nach I)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-x-6)}}=l\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{(x^2-x-6)}\right)+C.$$

Sey $dy=\frac{dx}{\sqrt{(15x^2-11x+2)}}$.

Für

Für $A=1$, $\gamma=15$, $\beta=-11$, $\alpha=2$ ist nach I)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(15x^2-11x+2)}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\,l\left(x\sqrt{15}-\frac{11}{2\sqrt{15}}+\sqrt{(15x^2-11x+2)}\right)+C.$$

Sey $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{(1+x-2x^2)}}$.

Für $A=\alpha=\beta=1$, $\gamma=2$ ist nach II)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x-2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Arc Tang}\frac{4x-1}{2\sqrt{2}\sqrt{(1+x-2x^2)}}+C.$$

37. §. Aufgabe.

Das Integral zu bestimmen, welches mit einem Verschwindungs-Quotienten von der Form $dy=\dfrac{Adx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$ zusammenhängt.

Auflösung. Es ist

$$\frac{Adx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}=\frac{Adx}{x^2\sqrt{(\alpha x^{-2}+\beta x^{-1}+\gamma)}}.$$

Nun sey $x^{-1}+\dfrac{\beta}{2\alpha}=z$, mithin $-\dfrac{dx}{x^2}=dz$, $\dfrac{dx}{x^2}=-dz$

$x^{-2}+\dfrac{\beta x^{-1}}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{4\alpha^2}=z^2$, und $\alpha x^{-2}+\beta x^{-1}+\gamma=\alpha z^2+\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$;

so ist $\dfrac{Adx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}=\dfrac{-Adz}{\sqrt{\left(\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}+\alpha z^2\right)}}$.

Ist

Ist nun α wirklich bejaht; so erhält man dieses Integral nach (34. §. III. Form.) für $a = -A$, $c = \alpha$, $\pm b = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ wie folgt in I). Ist aber α verneint; so erhält man das Integral nach (34. §. VII. Form.), wie folgt in II).

$$\text{I)} \int \frac{A\,dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{-A}{\sqrt{\alpha}} \cdot l\left(z\sqrt{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} + \alpha z^2\right)}\right)$$

$$= \frac{-A}{\sqrt{\alpha}} \cdot l\left(\frac{\sqrt{\alpha} + \frac{\beta x}{2\sqrt{\alpha}} + \sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{x}\right) + C$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \cdot l \frac{x}{\sqrt{\alpha} + \frac{\beta x}{2\sqrt{\alpha}} + \sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} + C.$$

$$\text{II)} \int \frac{A\,dx}{x\sqrt{(-\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{Arc T} \frac{\sqrt{\left(\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{4\alpha} - \alpha z^2\right)}}{z\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{Arc Tang} \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{(-\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{2\alpha - \beta x} + C.$$

Beyspiele.

Sey $dy = \frac{dx}{x\sqrt{(2+x-x^2)}}$.

Für $A = \beta = 1$, $\alpha = 2$, $\gamma = -1$ ist nach I)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(2+x-x^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} l\left(\frac{\sqrt{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} + \sqrt{(2+x-x^2)}}{x}\right) + C.$$

Sey $dy = \frac{dx}{x\sqrt{(3+2x+5x^2)}}$.

Für

Für $A=1, \alpha=3, \beta=2, \gamma=5$ ist nach I)

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(3+2x+5x^2)}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}.l\frac{\sqrt{3}+\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{(3+2x+5x^2)}}{x}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}.l\frac{x}{\sqrt{3}+\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{(3+2x+5x^2)}}+C.$$

Sey $dy=\frac{dx}{x\sqrt{(-2+x+3x^2)}}$.

Für $A=\beta=1, \alpha=2, \gamma=3$ ist nach II)

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(-2+x+3x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\text{Arc Tang}\,\frac{2\sqrt{2}\sqrt{(-2+x+3x^2)}}{4-x}+C.$$

Sey $dy=\frac{dx}{x\sqrt{(-1+4x-x^2)}}$.

Für $A=1, \alpha=1, \beta=4, \gamma=-1$ ist nach II)

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(-1+4x-x^2)}}=\text{Arc Tang}\,\frac{\sqrt{(-1+4x-x^2)}}{1-2x}+C.$$

38. §. Aufgabe.

Es sind u, v gewisse Functionen von einer absoluten veränderlichen Grösse x; man soll bestimmen, wie das Integral $\int uvdx$ davon abhängt.

Auflösung. Sey $\int udx=\omega$; so ist $udx=d\omega$. Nun aber ist $d.v\omega=vd\omega+\omega dv$, $=uvdx+\omega dv$: also ist $\int d.v\omega=\int uvdx+\int\omega dv$, mithin $\int uvdx=v\omega-\int\omega dv$.

1. Zusatz.

Hätte man daher für $X = \alpha + \beta x^{\nu} + \gamma x^{u}$ den Verschwindungs-Quotienten $x^{m-1} dx X^{p+1}$; so wäre

1) $\int x^{m-1} dx X^{p+1} = X^{p+1} \int x^{m-1} dx - \int d(X^{p+1}) . \int x^{m-1} dx.$

Aber $\int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m}$; $d(X^{p+1}) = (p+1) X^p dX$: also

2) $\int x^{m-1} dx X^{p+1} = \frac{x^m X^{p+1}}{m} - \frac{(p+1)}{m} \int x^m X^p dX.$

Ferner ist $dX = \nu\beta x^{\nu-1} dx + u\gamma x^{u-1} dx$: also aus (n. 2.)

3) $\int x^{m-1} dx X^{p+1} = \frac{x^m X^{p+1}}{m} - \frac{\nu\beta(p+1)}{m} \int x^{m+\nu-1} dx X^p$
$- \frac{u\gamma(p+1)}{m} . \int x^{m+u-1} dx X^p.$

Endlich ist $\int x^{m-1} dx X^{p+1} = \int x^{m-1} dx X^p (\alpha + \beta x^{\nu} + \gamma x^{u})$
$= \alpha \int x^{m-1} dx X^p + \beta \int x^{m+\nu-1} dx X^p + \gamma \int x^{m+u-1} dx X^p.$

Setzt man daher diesen Werth in die Gleichung 3); so erhält man eine andere Gleichung, welche folgendes Integral giebt:

4) $\int x^{m+u-1} dx X^p = \frac{x^m X^{p+1}}{\gamma(up+u+m)} - \frac{m\alpha}{\gamma(up+u+m)} \int x^{m-1} dx X^p$
$- \frac{\beta(vp+v+m)}{\gamma(up+u+m)} \int x^{m+\nu-1} dx X^p.$

2. Zusatz.

Und aus dieser Gleichung erhält man das Integral $\int x^{m-1} dx X^p$, wie folgt:

$\int x^{m-1} dx X^p = \frac{x^m X^{p+1}}{m\alpha} - \frac{\beta(vp+v+m)}{m\alpha} \int x^{m+\nu-1} dx X^p$
$- \frac{\gamma(up+u+m)}{m\alpha} \int x^{m+u-1} dx X^p.$

3. Zu-

3. Zusatz.

Bringt man aber den Werth des Integrals $\int x^{m+u-1} dx X^p$ im ersten Zusatz aus der dortigen Gleichung (n. 4.) in die Gleichung (n. 3.); so wird man folgendes Integral finden.

$$\int x^{m-1} dx X^{p+1} = \frac{x^m X^{p+1}}{up+u+m} + \frac{\beta(u-v)(p+1)}{up+u+m} \int x^{m+v-1} dx X^p + \frac{u\alpha(p+1)}{up+u+m} \int x^{m-1} dx X^p.$$

4. Zusatz.

Und hieraus ergiebt sich nachstehendes Integral.

$$\int x^{m+v-1} dx X^p = \frac{-x^m X^{p+1}}{\beta(u-v)(p+1)} \frac{-u\alpha}{(u-v)\beta} \int x^{m-1} dx X^p + \frac{up+u+m}{(u-v)(p+1)\beta} \int x^{m-1} dx X^{p+1}.$$

5. Zusatz.

Die bisher bestimmten Formuln gelten für alle Zahlen m, p, v, u: setzt man $v = 1$, $u = 2$, mithin $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$; so wird man folgende merkwürdige Formuln aus (1. 2. 3. 4. Zus.) erhalten:

I) $$\int x^{m+1} dx X^p = \frac{x^m X^{p+1}}{\gamma(2p+2+m)} \frac{-m\alpha}{\gamma(2p+2+m)} \int x^{m-1} dx X^p - \frac{\beta(p+1+m)}{\gamma(2p+2+m)} \int x^m dx X^p.$$

II) $$\int x^{m-1} dx X^p = \frac{x^m X^{p+1}}{m\alpha} - \frac{\beta(p+1+m)}{m\alpha} \int x^m dx X^p - \frac{\gamma(2p+2+m)}{m\alpha} \int x^{m+1} dx X^p.$$

III) $\int x^{m-1} dx X^{p+1} = \frac{x^m X^{p+1}}{2p+2+m} + \frac{\beta(p+1)}{2p+2+m} \int x^m dx X^p + \frac{2\alpha(p+1)}{2p+2+m} \int x^{m-1} dx X^p.$

IV) $\int x^m dx X^p = -\frac{x^m X^{p+1}}{\beta(p+1)} - \frac{2\alpha}{\beta} \int x^{m-1} dx X^p + \frac{2(p+1)+m}{(p+1)\beta} \int x^{m-1} dx X^{p+1}.$

6. Zusatz.

Für $m = 1$ giebt die dritte Formul des vorigen Zusatzes folgendes Integral I): und die erste Formul des vorigen Zusatzes giebt für $m = 0$ folgendes Integral II); setzt man dieses in I); so erhält man III): und schreibt man $-p-1$ statt p in III); so erhält man IV):

I) $\int dx X^{p+1} = \frac{x X^{p+1}}{2p+3} + \frac{\beta(p+1)}{2p+3} \int x dx X^p + \frac{2\alpha(p+1)}{2p+3} \int dx X^p.$

II) $\int x dx X^p = \frac{X^{p+1}}{2\gamma(p+1)} - \frac{\beta}{2\gamma} \int dx X^p.$

III) $\int dx X^{p+1} = \frac{(\beta+2\gamma x) X^{p+1}}{2\gamma(2p+3)} + \frac{(p+1)(4\alpha\gamma-\beta^2)}{2\gamma(2p+3)} \int dx X^p.$

IV) $\int \frac{dx}{X^{p+1}} = \frac{\beta+2\gamma x}{p(4\alpha\gamma-\beta^2)X^p} + \frac{2(2p-1)\gamma}{p(4\alpha\gamma-\beta^2)} \int \frac{dx}{X^p}.$

7. Zusatz.

Aus (6. Zus. II. Form.) erhält man für $p = -1$ folgende Formul I), wegen (27. §. 3. Zus.). Setzt man aber $p = -\frac{1}{2}$ in (6. Zus. III. Form.); so findet man

$\int dx \sqrt{X}$

$\int dx\sqrt{X}$ durch $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ nach (36. §.), wie folgt in II) III).

Ferner ist $\int \frac{(A+Bx)dx}{X} = A\int \frac{dx}{X} + B\int \frac{x\,dx}{X}$: hieraus erhält man demnach für den unten stehenden Werth von $\int \frac{x\,dx}{X}$ folgendes Integral IV), und daraus V) für $X = a^2 - 2abx\,\mathrm{Cof}\,\phi + b^2x^2$. Endlich ist $\int \frac{A\,dx}{xX} = \frac{A}{\alpha}\int \frac{dx}{x} - \frac{A\beta}{\alpha}\int \frac{dx}{X} = \frac{A\gamma}{\alpha}\int \frac{x\,dx}{X}$: nimmt man nun $\int \frac{x\,dx}{X}$ aus der untenstehenden ersten Formul; so erhält man folgendes Integral VI). Da nun $\int \frac{dx}{X}$ ein bekanntes Integral ist; so sind auch die Integralien I) IV) V) VI) vollkommen bestimmt.

I) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2\gamma}\lg X - \frac{\beta}{2\gamma}\int \frac{dx}{X}$.

II) $\int dx\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \frac{(\beta+2\gamma x)\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{4\gamma} + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}\lg\left(x\sqrt{\gamma}+\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}+\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}\right)+C$.

III) $\int dx\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)} = \frac{(2\gamma x-\beta)\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}}{4\gamma} + \frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{8\sqrt{\gamma}}\,\mathrm{Arc\ Tang}\,\frac{2\gamma x-\beta}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}}+C$.

IV) $\int \frac{(A+Bx)dx}{X} = \frac{B}{2\gamma}\lg X + \frac{2\gamma A-\beta B}{2\gamma}\int \frac{dx}{X}$.

V) $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X}=\frac{B}{2b^2}\lg X+\frac{bA+aB\cos\varphi}{b}\int\frac{dx}{X}$.

VI) $\int\frac{A\,dx}{x\sqrt{X}}=\frac{A}{\alpha}\lg\frac{x}{\sqrt{X}}-\frac{\beta A}{2\alpha}\int\frac{dx}{X}$.

8. Zusatz.

Setzt man bey der dritten Formul in (6. Zus.) $p=\frac{1}{2}$, sodann $p=\frac{3}{2}$, hernach $p=\frac{5}{2}$, und so fort; so wird man die Integralien $\int dx\sqrt{X^3}$, $\int dx\sqrt{X^5}$, $\int dx\sqrt{X^7}$ u. s. f. durch $\int dx\sqrt{X}$ erhalten: man wird zugleich wahrnehmen, daß alle diese Integralien vom Integral $\int dx\sqrt{X}$, und den Zahlen 3, 5, 7 nach einem bestimmten Gesetze abhängen, welches, wenn man es für $\int dx\sqrt{X^{2n+1}}$ gelten läßt, folgendes Integral giebt. Daß aber dasselbe Gesetz dafür wirklich gilt, erhellet aus (I. B. 54. §.), weil, wenn man es für $\int dx\sqrt{X^{2n+1}}$ annimmt, hernach $p=\frac{2n+1}{2}$ (6. Zusatz III. Form.) setzt, um $\int dx\sqrt{X^{2n+3}}$ durch $\int dx\sqrt{X^{2n+1}}$ zu erhalten, das Integral $\int dx\sqrt{X^{2n+3}}$ sich nach eben demselben Gesetze richtet.

$$\int dx\sqrt{X^{2n+1}}=\frac{(\beta+2\gamma x)\sqrt{X^{2n+1}}}{(n+1).2^2.\gamma}$$
$$+\frac{(2n+1)(\beta+2\gamma x)(4\alpha\gamma-\beta^2)\sqrt{X^{2n-1}}}{(n+1)n.2^5.\gamma^2}$$
$$+\frac{(2n+1)(2n-1)(\beta+2\gamma x)(4\alpha\gamma-\beta^2)^2\sqrt{X^{2n-3}}}{(n+1)n(n-1).2^8.\gamma^3}+\ldots\ldots,$$

$$\cdots\cdots + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots}{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots\cdots}$$

$$\cdots\frac{(2n-2r+3)(\beta+2\gamma x)(4\alpha\gamma+\beta^2)^r\sqrt{X^{2n-2r+3}}}{\cdots\cdots(n-r+1).2^{3r+2}.\gamma^{r+1}}$$

$$+\cdots+\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 7.5.3(4\alpha\gamma-\beta^2)^n}{(n+1)n(n-1)\cdots 5.4.3.2.2^{3n}.\gamma^n}\int dx\sqrt{X}.$$

Bey dieſer Formul iſt alſo das Integral $\int dx\sqrt{X^{2n+1}}$ für jede bejahte ungerade Zahl $2n+1$ vollkommen beſtimmt, nämlich für $X=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, wofür $\int dx\sqrt{X}$ ein bekanntes nach (7. Zuſ.) angebliches Integral iſt. Was übrigens das unbeſtimmte Glied anbelangt, ſo erhält man aus ihm alle Glieder, vom zweyten an bis zum vorletzten, für $r=1$, $r=2$, $r=3$, u. ſ. f. bis $r=n-1$.

9. Zuſatz.

Und wenn man in (6. Zuſ. IV. Form.) $p+1$ ſtatt p nimmt; ſo findet man das Integral $\int\frac{dx}{X^{p+2}}$ durch $\int\frac{dx}{X^p}$: ſetzt man aber daſelbſt $p+2$ ſtatt p; ſo erhält man $\int\frac{dx}{X^{p+3}}$ durch $\int\frac{dx}{X^{p+2}}$, oder durch $\int\frac{dx}{X^p}$ für den ſchon gefundenen Werth von $\int\frac{dx}{X^{p+2}}$: auf dieſe Art kann man aus der dortigen Formul die Integralien $\int\frac{dx}{X^{p+2}}$, $\int\frac{dx}{X^{p+3}}$, $\int\frac{dx}{X^{p+4}}$ beſtimmen, welche vom Integral $\int\frac{dx}{X^p}$ und den Zahlen 2, 3, 4 nach einem vollkommen beſtimmten Geſetze abhängen

werden; läßt man dieses Gesetz für $\int \frac{dx}{X^{p+n}}$ gelten, und setzt man $p+n$ statt p in (6. Zus. IV. Form.); so erhält man $\int \frac{dx}{X^{p+n+1}}$ durch $\int \frac{dx}{X^{p+n}}$ nach eben demselben Gesetze, zum untrüglichen Beweise, daß dasjenige Gesetz, nach welchem die Integralien $\int \frac{dx}{X^{p+2}}, \int \frac{dx}{X^{p+3}}$ von $\int \frac{dx}{X^p}$ und den Zahlen 2, 3 abhiengen, und welches man für $\int \frac{dx}{X^{p+n}}$ gelten ließ, für $\int \frac{dx}{X^{p+n}}$ wirklich gilt (I. B. 54. §.), wie folgt:

$$\int \frac{dx}{X^{p+n}} = \frac{\beta+2\gamma x}{(p+n-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)X^{p+n-1}} + \frac{(2p+2n-3)(\beta+2\gamma x)2\gamma}{(p+n-1)(p+n-2)(4\alpha\gamma-\beta^2)^2 X^{p+n-2}} + \frac{(2p+2n-3)(2p+2n-5)\cdots(2p+2n-2r-1)(\beta+2\gamma x)(2\gamma)^r}{(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+n-r-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)^{r+1} X^{p+n-r-1}} + \cdots + \frac{(2p+2n-3)(2p+2n-5)\cdots(2p+1)(2p-1)(2\gamma)^n}{(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+2)(p+1)p(4\alpha\gamma-\beta^2)^n} \int \frac{dx}{X^p}$$

Ist demnach das Integral $\int \frac{dx}{X^p}$ für irgend eine Zahl p bekannt; so findet man dadurch das Integral $\int \frac{dx}{X^{p+n}}$ für jede wie immer grosse bejahte ganze Zahl n, dergestalt, daß alle Glieder, vom zweyten an bis zum vorletzten, aus dem unbestimmten Gliede für $r=1$, $r=2$, $r=3$, u. s. f. bis $r=n-1$ gefunden, werden wodurch das ganze Integral eine ganz bestimmte Anzahl $r+2=n-1+2=n+1$ von Gliedern erhält, die äussersten mitgerechnet.

10. Zu-

10. Zusatz.

Die vorzüglichsten Fälle sind aber für $p=1$ und $p=\frac{1}{2}$, wofür die vorige allgemeine Formul folgende besondere Formuln I) II) giebt; die erste I) giebt das Integral $\int\frac{dx}{X^{n+1}}$ für jede wie immer grosse bejahte ganze Zahl $n+1$, dergestalt, daß dieses Integral, wegen des im letzten Gliede enthaltenen, nach (35. §.) angeblichen Integrals $\int\frac{dx}{X}$, allemal von einem Logarithmen oder einem Kreisbogen abhängt, nachdem γ einen verneinten oder bejahten Werth hat; das Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{X^{2m+1}}}$ ist hingegen bey jeder bejahten ungeraden Zahl $2n+1>1$ sowohl von Logarithmen als Kreisbogen ganz unabhängig.

$$\text{I)}\int\frac{dx}{X^{n+1}}=\frac{\beta+2\gamma x}{n(4\alpha\gamma-\beta^2)X^n}+\frac{(2n-1)(\beta+2\gamma x).2\gamma}{n(n-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)^2X^{n-1}}$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)(\beta+2\gamma x)(2\gamma)^2}{n(n-1)(n-2)(4\alpha\gamma-\beta^2)^3X^{n-2}}+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2r+1)(\beta+2\gamma x)(2\gamma)^r}{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r)(4\alpha\gamma-\beta^2)^{r+1}X^{n-r}}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots5.3.(2\gamma)^n}{n(n-1)(n-2)\ldots3.2(4\alpha\gamma-\beta^2)^n}\int\frac{dx}{X}.$$

$$\text{II)}\int\frac{dx}{\sqrt{X^{2n+1}}}=\frac{2(\beta+2\gamma x)}{(2n-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)\sqrt{X^{2n-1}}}$$

$$+\frac{2^4(n-1)(\beta+2\gamma x)\gamma}{(2n-1)(2n-3)(4\alpha\gamma-\beta^2)^2\sqrt{X^{2n-3}}}+$$

$$- \frac{+2^{r}(n-1)(n-2)(\beta+2\gamma x)\gamma^{r}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(4\alpha\gamma-\beta^{2})^{r}\sqrt{X^{2n-r}}}$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$+ \frac{2^{2r+r}(n-1)(n-2)\cdots(n-r)(\beta+2\gamma x)\gamma^{r}}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2r-1)(4\alpha\gamma-\beta^{2})^{r+1}\sqrt{X^{2n-2r-2}}}$$

11. Zusatz.

In (5. Zus. I. Form.) sey $p=\frac{\mu}{2}$; so wird

[illegible] erhalten;

$$\int dx x^{m+1}\sqrt{X^{\mu}} = \frac{x^{m}\sqrt{X^{\mu+2}}}{\gamma(\mu+2+m)} \frac{-m\alpha}{\gamma(\mu+2+m)}\int x^{m-1}dx\sqrt{X^{\mu}}$$

$$\frac{-\beta(\mu+2+2m)}{2\gamma(\mu+2+m)}\int x^{m}dx\sqrt{X^{\mu}}.$$

Da nun diese Formul für $\mu=1$ und $m=0$ das Integral $\int x\,dx\sqrt{X}$ durch das nach (7. Zus.) angebliche Integral $\int dx\sqrt{X}$ giebt; so wird man nach dieser Formul das Integral $\int x^{k}dx\sqrt{X}$ für jede ganze bejahte Zahl k bestimmen können; wenn man nämlich $\mu=1$, und $m=0$, sodann $m=1$, $m=2$, $m=3$, u. s. f. bis $m=k-1$ setzt.

Will man aber ein Integral $\int dx x^{k}\sqrt{X^{\mu}}$ für $\mu>1$ haben; so suche man erstlich $\int dx\sqrt{X^{\mu}}$ nach (8. Zus.); sodann setze man $m=0$, $m=1$, $m=2$, u. s. f. bis $m=k-1$.

Bey-

Beyſpiele.

Sey $dy = x^3 dx\sqrt{X}$.

Für $\mu = 1$, $m = 0$ findet man,

1) $\int x dx\sqrt{X} = \frac{\sqrt{X^3}}{3\cdot\gamma} - \frac{\beta}{2\gamma}\int dx\sqrt{X}$.

Für $\mu = 1$, $m = 1$ erhält man

2) $\int x^2 dx\sqrt{X} = \frac{x\sqrt{X^3}}{4\gamma} - \frac{\alpha}{4\gamma}\int dx\sqrt{X} - \frac{5\beta}{8\gamma}\int x dx\sqrt{X}$

mithin wegen (1)

3) $\int x^2 dx\sqrt{X} = \frac{(6\gamma x - 5\beta)\sqrt{X^3}}{24\gamma^2} + \frac{5\beta^2 - 4\alpha\gamma}{16\gamma^2}\int dx\sqrt{X}$.

Ferner für $\mu = 1$, $m = 2$ findet man

4) $\int x^3 dx\sqrt{X} = \frac{x^2\sqrt{X^3}}{5\gamma} - \frac{2\alpha}{5\gamma}\int x dx\sqrt{X} - \frac{7\beta}{10\gamma}\int x^2 dx\sqrt{X}$

daher wegen (1. 3.)

5) $\int x^3 dx\sqrt{X} = \frac{(48\gamma^2 x^2 - 42\beta\gamma x + 35\beta^2 - 32\alpha\gamma)\sqrt{X^3}}{240\gamma^3}$

$+ \frac{12\alpha\beta\gamma - 7\beta^3}{32\gamma^3}\int dx\sqrt{X}$.

Und dieſes Integral iſt vollkommen beſtimmt, weil ſein letztes Glied das nach (7. Zuſ.) angebliche Integral $\int dx\sqrt{X}$ enthält.

Sey $dy = x^5 dx\sqrt{X^5}$.

Für $\mu = 5$, $m = 0$ erhält man

1) $\int x dx\sqrt{X^5} = \frac{\sqrt{X^7}}{7\gamma} - \frac{\beta}{2\gamma}\int dx\sqrt{X^5}$.

Und für $\mu = 5$, $m = 1$, findet man

2) $\int x^2 dx \sqrt{X^5} = \frac{x\sqrt{X^7}}{8\gamma} - \frac{\alpha}{8\gamma}\int dx\sqrt{X^5} - \frac{9\beta}{16\gamma}\int x dx\sqrt{X^5}$,

mithin wegen (n. 1.)

3) $\int x^2 dx\sqrt{X^5} = \frac{(14\gamma x - 9\beta)\sqrt{X^7}}{112\gamma^2} + \frac{9\beta^2 - 4\alpha\gamma}{32\gamma^2}\int dx\sqrt{X^5}$.

Zur vollkommenen Bestimmung des Integrals $\int x^2 dx\sqrt{X^5}$ wird also nur noch das Integral $\int dx\sqrt{X^5}$ erfordert, welches aber nach (8. Zus.) sich sehr bequem nehmen läßt.

12. Zusatz.

Aus (5. Zus. II. Form.) erhält man für $-m$ statt m, und $p = -\frac{\mu}{2}$ folgendes Integral I); Setzt man aber in (5. Zus. III. Form.) $m = 0$, $p = -\frac{\mu}{2}$; so wird man daraus folgendes Integral II) erhalten:

I) $\int \frac{dx}{x^{m+1}\sqrt{X^\mu}} = \frac{-1}{m\alpha x^m\sqrt{X^{\mu-2}}} - \frac{\beta(\mu+2m-2)}{2m\alpha}\int \frac{dx}{x^m\sqrt{X^\mu}} - \frac{\gamma(m+\mu-2)}{m\alpha}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{X^\mu}}$.

II) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^\mu}} = \frac{1}{(\mu-2)\alpha\sqrt{X^{\mu-2}}} + \frac{1}{\alpha}\int \frac{dx}{x\sqrt{X^{\mu-2}}} - \frac{\beta}{2\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{X^\mu}}$.

Wenn $\mu = 1$ ist; so findet man nach der ersten Formul das Integral $\int \frac{dx}{x^{m+1}\sqrt{X}}$ für jede bejahte ganze Zahl $m+1$ durch das aus (36. §.) schon bekannte Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$, und das nach (37. §.) angebliche Integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$.

Will

Will man aber ein Integral $\int \frac{dx}{x^k \sqrt{X^q}}$ für $q > 1$ haben; so suche man erstlich $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^q}}$ nach II), für $\mu = 3$, $\mu = 5$, $\mu = 7$ u. s. f. bis $\mu = q$, welches deswegen geschehen kann, weil das zweyte Glied in II) ein zunächst bestimmtes, und das dritte Glied ein nach (10. Zus.) für jede ungerade Zahl μ angebliches Integral enthält. Sodann suche man das verlangte Integral $\int \frac{dx}{x^k \sqrt{X^q}}$ nach I) für $\mu = q$, und $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, bis $m = k-1$.

Dieselben Formuln dienen auch zur Bestimmung eines Integrals $\int \frac{dx}{x^k X^q}$ für alle bejahten ganzen Zahlen k, q; für $q = 1$ findet man nach I) das Integral $\int \frac{dx}{x^k X}$ mit Hülfe des nach (7. Zus.) bekannten Integrals $\int \frac{dx}{xX}$. Ist aber $q > 1$; so suche man $\int \frac{dx}{xX^q}$ nach II) für $\mu = 4$, hernach $\mu = 6$, $\mu = 8$ u. s. f. bis $\mu = 2q$, welches allemal angeht, indem das zweyte Glied in II) allemal das zunächst gefundene, und das dritte Glied ein nach (10. Zus. I. Form.) angebliches Integral enthält.

13. Zusatz.

Für $-\mu$ statt μ erhält man aus den Formuln des vorigen Zusatzes folgende Integralien I) II); und nun folgt aus II) das Integral III) für $\mu = -1$.

I)

I) $\int \frac{dx\sqrt{X^\mu}}{x^{m+1}} = \frac{-\sqrt{X^{\mu+2}}}{m\alpha x^m} + \frac{\gamma(\mu+2-m)}{m\alpha}\int \frac{dx\sqrt{X^\mu}}{x^{m-1}} + \frac{\beta(\mu+2-2m)}{2m\alpha}\int \frac{dx\sqrt{X^\mu}}{x^m}$.

II) $\int \frac{dx\sqrt{X^{\mu+2}}}{x} = \frac{\sqrt{X^{\mu+2}}}{\mu+2} + \frac{1}{2}\beta\int dx\sqrt{X^\mu} + \alpha\int \frac{dx\sqrt{X^\mu}}{x}$.

III) $\int \frac{dx\sqrt{X}}{x} = \sqrt{X} + \frac{1}{2}\beta\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \alpha\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$.

Das Integral in III) kann als ein bekanntes Integral betrachtet werden, indem daſſelbe durch bekannte Integralien $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (36. §.) und $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (37. §.) beſtimmt iſt. Da nun die erſte Formul für $\mu = 1$, $m = 1$ das Integral $\int \frac{dx\sqrt{X}}{x^2}$ durch das aus (7. Zuſ.) bekannte Integral $\int dx\sqrt{X}$ und $\int \frac{dx\sqrt{X}}{x}$ giebt; ſo kann man ſich der erſten Formul zur Beſtimmung des Integrals $\int \frac{dx\sqrt{X}}{x^k}$ für jede ganze bejahte Zahl $k > 1$ bedienen.

Will man hingegen $\int \frac{dx\sqrt{X^n}}{x^k}$ für $n > 1$ haben; ſo ſuche man $\int \frac{dx\sqrt{X^n}}{x}$ nach II), nämlich für $\mu = 1$, $\mu = 3$, $\mu = 5$ u. ſ. f. bis $\mu = n - 2$: daß dieſes angehet, erhellet daraus, weil das zweyte Glied für jede Zahl μ ein nach (8. Zuſ.) angebliches Integral enthält. Iſt aber $\int \frac{dx\sqrt{X^n}}{x}$ bekannt; ſo kann man nun $\int \frac{dx\sqrt{X^n}}{x^k}$ nach

I)

I) für $m=1$, $m=2$, $m=3$, u. s. f. bis $m=k-1$ suchen.

14. Zusatz.

Aus der ersten und vierten Formul in (5. Zus.) erhält man für $p=\frac{-\mu}{2}$ folgende Integralien.

I) $$\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{X^\mu}}=\frac{x^m}{\gamma(m+2-\mu)\sqrt{X^{\mu-2}}}-\frac{m\alpha}{\gamma(m+2-\mu)}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{X^\mu}}$$
$$-\frac{\beta(2m+2-\mu)}{2\gamma(m+2-\mu)}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{X^\mu}}.$$

II) $$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{X^\mu}}=\frac{-2x^m}{(\mu-2)\beta\sqrt{X^{\mu-2}}}-\frac{2\alpha}{\beta}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{X^\mu}}$$
$$+\frac{2(\mu-m-2)}{(\mu-2)\beta}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{X^{\mu-2}}}.$$

Der Umstand, daß die erste Formul für $m=\mu-2$ nichts brauchbares giebt, macht, daß man sich derselben zur Bestimmung des Integrals $\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{X^\mu}}$ für alle bejahte ganze Zahlen $m+1$ und μ nicht so bequem bedienen kann, wie man es verlangen mag: so viel ist doch gewiß, daß beyde Formuln zur vollkommensten Bestimmung eines solchen Integrals allemal hinreichen.

Verlangt man $\int\frac{x^k dx}{\sqrt{X}}$; so wird man dieses Integral für jede bejahte ganze Zahl k nach der ersten Formul allein für $\mu=1$, und $m=0$, $m=1$, $m=2$ u. s. f. bis $m=k-1$ bestimmen, und zwar durch die schon bekannten Integralien $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (36. §.) und $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (37. §.).

Eben

Eben so wird man nach der ersten Formul allein das Integral $\int \frac{x^k dx}{X}$ für $\mu = 2$ durch die schon bekannten Integralien $\int \frac{dx}{X}$, (35. §.) und $\int \frac{dx}{xX}$ (7. Zus.) finden können.

Nach der ersten Formul allein kann man auch das Integral $\int \frac{x^k dx}{\sqrt{X^\mu}}$ für jede ungerade bejahte Zahl μ, und eine bejahte ganze Zahl $k < \mu - 1$ bestimmen: denn man kann $\int \frac{dx}{\sqrt{X^\mu}}$ nach (10. Zus.) nehmen, hernach in 1) $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ u. s. f. bis $m = k - 1$ setzen, ohne zu befürchten, daß $m + 2 - \mu = 0$ wird, welches nur für $m = k - 1 = \mu - 2$ geschehen kann, da vermöge der Voraussetzung $k - 1 < \mu - 2$ ist.

Eben so kann $\int \frac{x^k dx}{X^q}$ für jede ganze bejahte Zahl q, und eine bejahte ganze Zahl $k < 2q - 1$ nach der ersten Formul allein bestimmt werden: man kann nämlich $\int \frac{dx}{X^q}$ nach (10. Zus.) nehmen, und dadurch das verlangte Integral nach der ersten Formul allein für $\mu = 2q$, und $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ u. s. f. bis $m = k - 1$ suchen.

Ist aber $k = \mu - 1$ oder $k > \mu - 1$; so wird man das Integral $\int \frac{x^k dx}{\sqrt{X^\mu}}$ nach der ersten Formul allein nicht bestimmen können; man wird vielmehr die zweyte Formul zu Hülfe nehmen müssen, um aus ihr diejenigen Integralien

lien abzuleiten, wie $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}}$; $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{X^5}}$ u. s. f. welche die erste Formul nicht geben kann, wobey die dazu erforderlichen Hülfsintegralien mit Zuziehung der ersten Formul bestimmt werden: diese Arbeit wird so lang fortgesetzt, bis man auf das Integral $\int \frac{x^{\mu-1} dx}{\sqrt{X^\mu}}$ wird gekommen seyn; denn alsdann wird für $k \geq \mu - 1$ die erste Formul allein zur ferneren Bestimmung des Integrals $\int \frac{x^k dx}{\sqrt{X^\mu}}$ hinreichen.

Ein solches Verfahren ist auch bey der Bestimmung eines Integrals $\int \frac{x^k dx}{X^q}$ nöthig, wenn q irgend eine ganze bejahte Zahl, und $k = 2q - 1$ oder $k > 2q - 1$ ist, wofür $\mu = 2q$ seyn muß.

15. Zusatz.

Nach der vorhergehenden Theorie läßt sich demnach das Integral $\int x^k dx (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{q}{2}}$ für alle ganze bejahte und verneinte Zahlen k und q bestimmen. Hätte man $dy = x^\nu dx (\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^{\frac{u}{2}}$; so würde man $z = x^n$, $z^2 = x^{2n}$, mithin $x = z^{\frac{1}{n}}$, $x^\nu = z^{\frac{\nu}{n}}$, und $dx = \frac{dz}{n z^{\frac{n-1}{n}}}$, mithin $dy = \frac{z^{\frac{\nu+1}{n}-1} dz (\alpha + \beta z + \gamma z^2)^{\frac{u}{2}}}{n}$ setzen können, und das damit zusammenhängende Integral ließe sich nach der vorhergehenden Theorie für jede bejahte und verneinte ganze Zahl $\frac{\nu+1}{n}$ bestimmen, wenn nur noch u was immer

für

für eine ganze Zahl ist, es mögen übrigens v und n was immer für Zahlen seyn, bejahte oder verneinte, ganze oder gebrochene.

39. §. Aufgabe.

Diejenigen Integralien anzugeben, welche mit den Verschwindungs-Quotienten zusammenhängen, die aus $dy=\frac{Adx}{\sqrt{X}}$, $dy=\frac{Adx}{x\sqrt{X}}$, $dy=dx\sqrt{X}$ für $X=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ und $\alpha=0$ oder $\beta=0$ oder auch $\gamma=0$ entstehen.

Auflösung. Aus $\int\frac{Adx}{\sqrt{X}}$ für $\beta=0$ entstehen die Integralien $\int\frac{Adx}{\sqrt{(\pm\alpha+\gamma x^2)}}$ und $\int\frac{Adx}{\sqrt{(\alpha-\gamma x^2)}}$, welche aber schon aus (34. §.) bekannt sind.

Setzt man hingegen $\alpha=0$; so findet man folgende Integralien I) II) aus (36. §.). Ferner giebt $\int\frac{Adx}{x\sqrt{X}}$ für $\beta=0$ folgende Integralien III) IV), und für $\gamma=0$ die Integralien V) VI), sowohl jene als diese wegen (37. §.). Endlich erhält man aus (38. §. 7. Zus.) die Integralien VII) VIII) oder IX) X), nachdem man bey den dortigen Formuln II) III) entweder $\beta=0$, oder $\alpha=0$ setzt.

I) $\int\frac{Adx}{\sqrt{(\gamma x^2\pm\beta x)}}=\int\frac{Adx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\gamma x\pm\beta)}}=\frac{A}{\sqrt{\gamma}}.l\left(x\sqrt{\gamma}\pm\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}+\sqrt{(\gamma x^2\pm\beta x)}\right)+C.$

II)

II) $\int \frac{A\,dx}{\sqrt{(\beta x-\gamma x^2)}} = \int \frac{A\,dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\beta-\gamma x)}}$

$= \frac{A}{\sqrt{\gamma}} \cdot \text{Arc Tang} \frac{2\gamma x-\beta}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\beta x-\gamma x^2)}} + C.$

III) $\int \frac{A\,dx}{x\sqrt{(\alpha \pm \gamma x^2)}} = \frac{-A}{\sqrt{\alpha}} \cdot l \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{(\alpha \pm \gamma x^2)}}{x} + C.$

IV) $\int \frac{A\,dx}{x\sqrt{(\gamma x^2-\alpha)}} = \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{Arc Tang} \frac{\sqrt{(\gamma x^2-\alpha)}}{\sqrt{\alpha}} + C.$

V) $\int \frac{A\,dx}{x\sqrt{(\alpha \pm \beta x)}} = \frac{-A}{\sqrt{\alpha}} \cdot l \frac{\sqrt{\alpha} \pm \frac{\beta x}{2\sqrt{\alpha}}+\sqrt{(\alpha \pm \beta x)}}{x} + C.$

VI) $\int \frac{A\,dx}{x\sqrt{(\beta x-\alpha)}} = \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{Arc Tang} \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{(\beta x-\alpha)}}{2\alpha-\beta x} + C.$

VII) $\int dx\sqrt{(\gamma x^2 \pm \alpha)} = \frac{1}{2} x\sqrt{(\gamma x^2 \pm \alpha)} \frac{\pm \alpha}{2\sqrt{\gamma}} \cdot l(x\sqrt{\gamma} + \sqrt{(\gamma x^2 \pm \alpha)}) + C.$

VIII) $\int dx\sqrt{(\alpha-\gamma x^2)} = \frac{1}{2} x\sqrt{(\alpha-\gamma x^2)} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}} \cdot \text{Arc Tang} \frac{x\sqrt{\gamma}}{\sqrt{(\alpha-\gamma x^2)}} + C.$

IX) $\int dx\sqrt{(\gamma x^2 \pm \beta x)} = \int x^{\frac{1}{2}} dx\sqrt{(\gamma x \pm \beta)}$

$= \frac{(2\gamma x \pm \beta)\sqrt{(\gamma x^2 \pm \beta x)}}{4\gamma} \cdot \frac{-\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}} \cdot l(x\sqrt{\gamma} \frac{\pm \beta}{2\sqrt{\gamma}} + \sqrt{(\gamma x^2 \pm \beta x)}) + C.$

X) $\int dx\sqrt{(\beta x-\gamma x^2)} = \int x^{\frac{1}{2}} dx\sqrt{(\beta-\gamma x)} = \frac{(2\gamma x-\beta)\sqrt{(\beta x-\gamma x^2)}}{4\gamma} + \frac{+\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}} \cdot \text{Arc Tang} \frac{2\gamma x-\beta}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\beta x-\gamma x^2)}} + C.$

40. §. Aufgabe.

Für das bekannte Integral $\int x^{m-1} dx (\alpha+\gamma x^2)^p$ die Integralien $\int x^{m+1} dx (\alpha+\gamma x^2)^p$, $\int x^{m-1} dx (\alpha+\gamma x^2)^{p+1}$ zu bestimmen.

Auflösung. Die dazu nöthigen Formuln findet man aus (38. §. 5. Zus. I. III. Form.) für $\beta = o$, mithin $X = \alpha+\beta x+\gamma x^2 = \alpha+\gamma x^2$: es wird nämlich seyn

$$\text{I)} \int x^{m+1} dx (\alpha+\gamma x^2)^p = \frac{x^m(\alpha+\gamma x^2)^{p+1}}{\gamma(2p+2+m)} - \frac{m\alpha}{\gamma(2p+2+m)} \int x^{m-1} dx (\alpha+\gamma x^2)^p.$$

$$\text{II)} \int x^{m-1} dx (\alpha+\gamma x^2)^{p+1} = \frac{x^m(\alpha+\gamma x^2)^{p+1}}{2p+2+m} + \frac{2\alpha(p+1)}{2p+2+m} \int x^{m-1} dx (\alpha+\gamma x^2)^p$$

1. Zusatz.

Die erste Formul giebt für ein verneintes p und $m = 1$, $m = 3$, $m = 5$, u. s. f. folgendes Integral 1). Setzt man aber bey der ersten Formul ($-m$ und $-p$) statt m und p; so wird man das Integral $\int \frac{dx}{x^{m+1}(\alpha+\gamma x^2)^p}$ durch $\int \frac{dx}{x^{m-1}(\alpha+\gamma x^2)^p}$ ausdrücken, welches für $m = 1$, $m = 3$, $m = 5$ u. s. f. in folgendes Integral 2) übergeht. Setzt man endlich in (38. §. 10. Zus. I. Form.) $\beta = o$, $n+1 = p$; so erhält man das Integral 3).

$$1)\int\frac{x^{2n}dx}{(\alpha+\gamma x^2)^p}=\frac{-x^{2n-1}}{(2p-2n-1)\gamma(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{-(2n-1)\alpha x^{2n-3}}{(2p-2n-1)(2p-2n+1)\gamma^2(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{-(2n-1)(2n-3)\alpha^2 x^{2n-5}}{(2p-2n-1)(2p-2n+1)(2p-2n+3)\gamma^3(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{-(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7.5.3.\alpha^{n-1}x}{(2p-2n-1)(2p-2n+1)(2p-2n+3)\cdots(2p-3)\gamma^n(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{+(2n-1)(2n-3)\cdots 7.5.3.1.\alpha^n}{(2p-2n-1)(2p-2n+1)\cdots(2p-3)\gamma^n}\int\frac{dx}{(\alpha+\gamma x^2)^p}.$$

$$2)\int\frac{dx}{x^{2n}(\alpha+\gamma x^2)^p}=\frac{-1}{(2n-1)\alpha x^{2n-1}(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{+(2p+2n-3)\gamma}{(2n-1)(2n-3)\alpha^2 x^{2n-3}(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{-(2p+2n-3)(2p+2n-5)\gamma^2}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\alpha^3 x^{2n-5}(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{\pm(2p+2n-3)(2p+2n-5)(2p+2n-7)\cdots(2p+1)\gamma^{n-1}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7.5.3\alpha^n x(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$\frac{\mp(2p+2n-3)(2p+2n-5)\cdots(2p+1)(2p-1)\gamma^n}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7.5.3.1.\alpha^n}\int\frac{dx}{(\alpha+\gamma x^2)^p}.$$

$$3)\int\frac{dx}{(\alpha+\gamma x^2)^p}=\frac{x'}{2(p-1)\alpha(\alpha+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$+\frac{(2p-3)x}{2^2(p-1)(p-2)\alpha^2(\alpha+\gamma x^2)^{p-2}}$$
$$+\frac{(2p-3)(2p-5)x}{2^3(p-1)(p-2)(p-3)\alpha^3(\alpha+\gamma x^2)^{p-3}}$$
$$+\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$+\frac{(2p-3)(2p-5)(2p-7)\cdots 5\cdot 3\cdot x}{2^{p-1}(p-1)(p-2)(p-3)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot\alpha^{p-1}(\alpha+\gamma x^2)}$$
$$+\frac{(2p-3)(2p-5)(2p-7)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(p-1)(p-2)(p-3)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2^{p-1}\alpha^{p-1}}\int\frac{dx}{\alpha+\gamma x^2}\cdot$$

Und dieſe Integralien ſind vollkommen beſtimmt, nämlich 1) 2) durch 3), und 3) durch das nach (34. §. I. IV. Form.) angebliche logarithmiſche oder trigonometriſche Integral $\int\frac{dx}{\alpha+\gamma x^2}$, nachdem γ verneint bey einem bejahten α, oder bejaht iſt.

2. Zuſatz.

Bey der erſten Formul 1) der vorhergehenden Aufgabe ſetze man $p=\frac{\mu}{2}$ und $m=1$, $m=3$, $m=5$, u. ſ. f.; ſo wird man folgendes Integral 1) finden: ſetzt man aber in (38. §. 8. Zuſ.) $\beta=0$ und $2n+1=\mu$; ſo erhält man das Integral 2). Das erſte Integral iſt demnach durch das zweyte, und dieſes durch das nach (39. §. VII. VIII. Form.) angebliche logarithmiſche oder trigonometriſche Integral $\int dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}$ vollkommen beſtimmt.

1) $$\int x^{2n}dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu} = \frac{x^{2n-1}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(\mu+2n+1)\gamma}$$
$$-\frac{(2n-1)\alpha x^{2n-3}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(\mu+2n+1)(\mu+2n-1)\gamma^2}$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\alpha^2 x^{2n-5}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(\mu+2n+1)(\mu+2n-1)(\mu+2n-3)\gamma^3}$$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$$\pm\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5.3.\alpha^{n-1}.x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(\mu+2n+1)(\mu+2n-1)(\mu+2n-3)\cdots(\mu+3)\gamma^n}$$
$$\mp\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5.3.1.\alpha^n}{(\mu+2n+1)(\mu+2n-1)(\mu+2n-3)\cdots(\mu+3)\gamma^n}\int dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}.$$

2) $$\int dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu} = \frac{x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{\mu+1}$$
$$+\frac{\mu\alpha x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}{(\mu+1)(\mu-1)}$$
$$+\frac{\mu(\mu-2)\alpha^2 x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-4}}}{(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)}$$
+ . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$$+\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\cdots 7.5.\alpha^{\frac{\mu-3}{2}}.x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^3}}{(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)(\mu-5)\cdots 6.4}$$
$$+\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\cdots 7.5.3.\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}{(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)(\mu-5)\cdots 6.4}\int dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}.$$

3. Zusatz.

Wenn man bey der zweyten Formul der obigen Aufgabe $m = o$, und $p = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{2}$, $p = \frac{5}{2}$ . . . . . $p = \frac{\mu}{2}$ setzt; so erhält man daraus folgendes Integral 1). Nimmt man ferner bey der ersten Formul derselben Aufgabe $p = \frac{\mu}{2}$ und $-m$ statt m; so wird man das Integral $\frac{\int dx \sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{x^{m+1}}$ durch $\frac{\int dx \sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{x^{m-1}}$ bestimmen, welches demnach für $m=2$, $m=4$, $m=6$ u. s. f. in folgendes Integral 2), und für $m=1$, $m=3$, $m=5$ u. s. f. in folgendes 3) übergeht.

1) $$\int \frac{dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{x} = \frac{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{\mu} + \frac{\alpha\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}{\mu-2} + \frac{\alpha^2\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-4}}}{\mu-4} + \ldots + \frac{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}{1} + \alpha^{\frac{\mu+1}{2}} \int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}.$$

2) $$\int \frac{dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{x^{2n+1}} = \frac{-\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{2n.\alpha x^{2n}} - \frac{(\mu-2n+2)\gamma\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{2n(2n-2)\alpha^2 x^{2n-2}} - \frac{(\mu-2n+2)(\mu-2n+4)\gamma^2\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{2n(2n-2)(2n-4)\alpha^3 x^{2n-4}}$$

— — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — —

$$-\frac{(\mu-2n+2)(\mu-2n+4)\cdots(\mu-2)\gamma^{n-1}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4.2.\alpha^n x^2}$$

$$+\frac{(\mu-2n+2)(\mu-2n+4)\cdots(\mu-2)\mu\gamma^n\int dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4.2.\alpha^n \qquad x}$$

8) $$\int\frac{dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}{x^{2n}} = -\frac{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(2n-1)\alpha x^{2n-1}}$$

$$-\frac{(\mu-2n+3)\gamma\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(2n-1)(2n-3)\alpha^2 x^{2n-3}}$$

$$-\frac{(\mu-2n+3)(\mu-2n+5)\gamma^2\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\alpha^3 x^{2n-5}}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{(\mu-2n+3)(\mu-2n+5)\cdots(\mu-1)\gamma^{n-1}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5.3.1.\alpha^n x}$$

$$+\frac{(\mu-2n+3)(\mu-2n+5)\cdots(\mu-1)(\mu+1)\gamma^n}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5.3.1.\alpha^n}\int dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}.$$

Zur Bestimmung des Integrals 2) für gegebene bejahte ungerade Zahlen μ und $2n+1$ wird demnach das Integral 1) erfordert, und dieses ist durch das nach (39. §. III. IV. Form.) angebliche Integral vollkommen bestimmt. Und das Integral 3) hängt für jede bejahte ungerade Zahl μ, und jede bejahte gerade Zahl $2n$ von dem in (2. Zus. n. 2.) vollkommen bestimmten Integral ab: ausgenommen, wenn $\mu < 2n-1$ ist, weil für $\mu < 2n-1$ das letzte Glied in 3) gewiß wegfallen, und 3) ein algebraisches Integral seyn wird, welches sonst nach (33. §. 1. Zus. II. so bestimmt werden könnte.

4. Zusatz.

Bey der ersten Formul der obigen Aufgabe setze man $p = -\frac{1}{2}$, hernach $m = 1$, $m = 3$, $m = 5$, $m = 7$ u. s. f.; so wird man folgendes Integral 1) erhalten und bey der zweyten Formul derselben Aufgabe sey $m = 2n+1$, und $-\frac{p}{2}$ statt p; so findet man daraus das Integral $\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^p}}$ durch $\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{p-2}}}$, woraus für $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$, u. s. f. folgendes Integral 2) sich ergiebt.

1) $$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}} = \frac{x^{2n-1}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}{2n.\gamma}$$
$$- \frac{(2n-1)\alpha x^{2n-3}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}{2n(2n-2)\gamma^2}$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\alpha^2 x^{2n-5}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}{2n(2n-2)(2n-4)\gamma^3}$$
$$- \text{ . . . . . .}$$
$$\pm \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5.3.\alpha^{n-1}x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6.4.2.\gamma^n}$$
$$\mp \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5.3.1.\alpha^n}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6.4.2.\gamma^n}\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}$$

2) $$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}} = \frac{x^{2n+1}}{(\mu-2)\alpha\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}$$
$$- \frac{(2n-\mu+2)x^{2n+1}}{(\mu-2)(\mu-4)\alpha^2\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-4}}}$$

+

$$+\frac{(2n-\mu+3)(2n+\mu+5)x^{2n+3}}{(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\alpha^3\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-6}}}$$

$$\mp\frac{(2n+\mu+3)(2n-\mu+5)\cdots(2n-2)x^{2n+1}}{(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\cdots5.3.1.\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}$$

$$\mp\frac{(2n-\mu+3)(2n-\mu+5)\cdots(2n-2)2n}{(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\cdots5.3.1.\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}.$$

Das Integral 2) hängt also vom Integral 1) ab, und dieses ist durch das aus (34. §. III. VI. Form.) bekannte Integral vollkommen bestimmt. Doch giebt 2) für $2n+1<\mu$ ein algebraisches Integral, welches man nach (33. §. 1. Zus. II. Form.) finden könnte; denn für $2n+1<\mu$ wird das letzte Glied in 2) allemal wegfallen.

5. Zusatz.

Bey der zweyten Formul der vorigen Aufgabe setze man $m=0$ und $-\frac{p}{2}$ statt p; so wird man durch $\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{p-2}}}$ das Integral $\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^p}}$ erhalten, welches hierauf für $p=3$, $p=5$, $p=7$ u. s. f. in folgendes Integral 1) übergeht. Setzt man aber bey der ersten Formul der obigen Aufgabe $p=-\frac{\mu}{2}$ und $-m$ statt m; so findet man das Integral $\int\frac{dx}{x^{m+1}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}$ durch $\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu}}$

worauf jenes für $m = 2$, $m = 4$, $m = 6$, u. s. f. folgendes Integral 2) giebt. Beyde Integralien sind vollkommen bestimmt; das Integral 2) durch 1), und 1) durch das nach (39. §. III. IV. Form.) angebliche.

$$1)\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu}}} = \frac{1}{(\mu-2)\alpha\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}$$

$$\frac{+1}{(\mu-4)\alpha^2\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-4}}}\ \frac{+1}{(\mu-6)\alpha^3\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-6}}}$$

$$+\cdots\cdots\frac{+1}{1.\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}\ \frac{+1}{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}.$$

$$2)\int\frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu}}} = \frac{-1}{2n\alpha x^{2n}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}$$

$$\frac{+(\mu+2n-2)\gamma}{2n(2n-2)\alpha^2 x^{2n-2}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}$$

$$\frac{-(\mu+2n-2)(\mu+2n-4)\gamma^2}{2n(2n-2)(2n-4)\alpha^3 x^{2n-4}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\pm(\mu+2n-2)(\mu+2n-4)\cdots(\mu+2)\gamma^{n-1}}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots6.4.2\,\alpha^n x^2\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}}$$

$$\frac{\pm(\mu+2n-2)(\mu+2n-4)\cdots(\mu+2)\mu\gamma^n}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots6.4.2.\alpha^n}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu}}}.$$

6. Zusatz.

Das Integral, welches mit einem Verschwindungs-Quotienten von der Form $x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^p$ oder $x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^{\frac{\mu}{2}}$ zusammenhängt, läßt sich demnach

für

für alle bejahte und verneinte ganze Zahlen m, p, und alle bejahte und verneinte ungerade Zahlen μ vollkommen bestimmen, wobey man auf diese Art zu verfahren hat, wenn man sonst am vortheilhaftesten zu Werke gehen will.

1) Wenn p eine ganze bejahte Zahl ist; so läßt sich die Potenz $(\alpha+\gamma x^2)^p$ vollkommen bestimmen, und dann findet man das Integral $\int x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^p$ nach (26. §. 3. Zus.). Zuweilen findet man es vortheilhafter nach (33. §. 1. Zus. I. Form.) wenn auch $\frac{m+1}{2}$ eine bejahte ganze Zahl ist; oder auch nach (33. §. 1. Zus. II. Form.) wenn $\frac{m+1}{2}+p$ eine verneinte ganze Zahl ist.

2) Ist aber p keine ganze bejahte, sondern eine ganze verneinte Zahl; so sehe man, ob nicht $\frac{m+1}{2}$ eine ganze bejahte, oder, wenn dieses nicht zutrifft, ob nicht $\frac{m+1}{2}+p$ eine ganze verneinte Zahl ist: geschieht dieses, so suche man das Integral $\int x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^p$ für eine bejahte ganze Zahl $\frac{m+1}{2}$ nach (33. §. 1. Zus. I. Form.), und für eine verneinte ganze Zahl $\frac{m+1}{2}+p$ nach (das. II. Form.).

3) Ist hingegen weder $\frac{m+1}{2}$ eine bejahte ganze, noch $\frac{m+1}{2}+p$ eine verneinte ganze Zahl, so suche man das Integral $\int x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^p$ nach (1. Zus.).

4) Auf

4) Auf gleiche Art verfahre man mit dem Verschwindungs-Quotienten $x^m dx\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^\mu} = x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^{\frac{\mu}{2}}$: man sehe erstlich, ob nicht $\frac{m+1}{2}$ eine ganze bejahte Zahl ist, und, wenn dieses geschieht, suche man das Integral nach (33. §. 1. Zus. I. Form.): ist aber $\frac{m+1}{2}$ keine ganze bejahte Zahl; so sehe man, ob nicht $\frac{m+1}{2}+\frac{\mu}{2}$ eine ganze verneinte Zahl ist, und, wenn dieses zutrifft, suche man das Integral nach (das. II. Form.): ist aber weder $\frac{m+1}{2}$ eine ganze bejahte, noch $\frac{m+1}{2}+\frac{\mu}{2}$ eine ganze verneinte Zahl; so kann man versichert seyn, daß das Integral $\int x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^{\frac{\mu}{2}}$ sich nach einer von den vorhergehenden Formuln (2. 3. 4. 5. Zus.) bestimmen läßt.

41. §. Aufgabe.

Für das bekannte Integral $\int x^m dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}$ die Integralien $\int x^{m-1} dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}$, $\int x^m dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}}$ zu bestimmen.

Auflösung. In (38. §. 5. Zus. II. Form.) sey $\gamma = 0$, und $p = \frac{\mu}{2}$; so findet man daraus folgendes Integral I). Ferner sey in (38. §. 1. Zus. n. 3.) $\gamma = 0$, $v = 1$, $u = 2$, $p = \frac{\mu}{2}$; so erhält man für $m+1$ statt m das Integral $\int x^m dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}}$ durch $\int x^{m+1} dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}$

wovon

wovon der Werth aus I) für $m+1$ statt m folgt; und dadurch erhält man folgendes Integral II).

I) $$\int x^{m-1} dx \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}} = \frac{x^m \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}}}{m\alpha} - \frac{\beta(\mu+2+2m)}{2m\alpha} \int x^m dx \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}.$$

II) $$\int x^m dx \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}} = \frac{2x^{m+1}\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}}}{\mu+4+2m} + \frac{\alpha(\mu+2)}{\mu+4+2m} \int x^m dx \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}.$$

1. Zusatz.

Man setze bey der zweyten Formul $m = \frac{1}{2}$ und $\mu = 1$, $\mu = 3$, $\mu = 5$, u. s. f.; so wird man das Integral 1) erhalten. Setzt man aber bey der ersten Formul $m = \frac{n}{2}$; so findet man aus ihr das Integral $\int x^{\frac{n}{2}} dx \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}$ durch das Integral $\int x^{\frac{n-2}{2}} dx \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}$, worauf jenes Integral für $n = 3$, $n = 5$, $n = 7$, u. s. f. in folgendes 2) übergeht.

1) $$\int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}} = 2x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}}}{\mu+3} + \frac{\mu\alpha\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}{(\mu+3)(\mu+1)} + \frac{\mu(\mu-2)\alpha^2\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}}{(\mu+3)(\mu+1)(\mu-1)} + \text{.....} \right)$$

$$\frac{+\mu(\mu-2)(\mu-4)\cdots 7.5.\alpha^{\frac{\mu-3}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)^5}}{(\mu+3)(\mu+1)(\mu-1)\cdots\cdots 10.8.6}\Big)$$

$$\frac{+\mu(\mu-2)(\mu-4)\cdots 7.5.3.\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}{(\mu+3)(\mu+1)(\mu-1)\cdots 10.8.6.}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(\alpha+\beta x)}.$$

$$2)\ \int x^{\frac{n}{2}}dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}} = \Big(\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(\mu+n+2)\beta}$$

$$\frac{-n\alpha x^{\frac{n-2}{2}}}{(\mu+n+2)(\mu+n)\beta^2}$$

$$\frac{+n(n-2)\alpha^2 x^{\frac{n-4}{2}}}{(\mu+n+2)(\mu+n)(\mu+n-2)\beta^3}$$

$$+ - - - - - - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$\frac{\pm n(n-2)(n-4)\cdots 5\,\alpha^{\frac{n-3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{(\mu+n+2)(\mu+n)(\mu+n-2)\cdots(\mu+5)\beta^{\frac{n-1}{2}}}\Big)2\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}}$$

$$\frac{\mp n(n-2)(n-4)\cdots 5.3.\alpha^{\frac{n-1}{2}}}{(\mu+n+2)(\mu+n)\cdots(\mu+5)\beta^{\frac{n-1}{2}}}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}.$$

Dieſe Integralien ſind nun vollkommen beſtimmt; denn das Integral 2) hängt von 1) ab, und dieſes von $\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(\alpha+\beta x)}$, welches ein bekanntes Integral iſt (39. §. IX. X. Form.).

2. Zusatz.

Sey bey der ersten Formul der vorigen Aufgabe $\mu = -1$, und man suche daraus $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$ durch $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$; so wird man aus der Gleichung, welche dieses angiebt, für $m = \frac{1}{2}$, $m = \frac{3}{2}$, $m = \frac{5}{2}$ u. s. f. folgendes Integral 1) erhalten. Ferner nehme man bey der zweyten Formul derselben Aufgabe $-\mu$ statt μ, und setze $m = \frac{n}{2}$; so wird man $\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}$ durch $\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}}$ bestimmen, und daraus für $\mu = 3$, $\mu = 5$, $\mu = 7$ u. s. f. folgendes Integral 2) erhalten.

1) $$\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)}} = 2\sqrt{(\alpha+\beta x)} \cdot \Big(\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(n+1)\beta} - \frac{n\alpha x^{\frac{n-2}{2}}}{(n+1)(n-1)\beta^2} + \frac{n(n-2)\alpha^2 x^{\frac{n-4}{2}}}{(n+1)(n-1)(n-3)\beta^3} - \cdots \pm \frac{n(n-2)(n-4)\cdots 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{n-1}{2}}}{(n+1)(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2\, \beta^{\frac{n+1}{2}}} \Big) \mp \frac{n(n-2)(n-4)\cdots 3 \cdot 1 \cdot \alpha^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2 \cdot \beta^{\frac{n+1}{2}}} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}}.$$

2)

$$2)\int \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}} = 2x^{\frac{n+2}{2}}\Bigg(\frac{1}{(\mu-2)\alpha\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}} - \frac{(n-\mu+4)}{(\mu-2)(\mu-4)\alpha^{2}\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-4}}} + \frac{(n-\mu+4)(n-\mu+6)}{(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\alpha^{3}\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-6}}} - \cdots \pm \frac{(n-\mu+4)(n-\mu+6)\cdots(n-1)}{(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\cdots 3\cdot 1\cdot\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}}\Bigg) \mp \frac{(n-\mu+4)(n-\mu+6)\cdots(n-1)(n+1)}{(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\cdots 3\cdot 1\cdot\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}\int \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)}}.$$

Auch hier ist das Integral 2) durch 1), und 1) durch das bekannte Integral $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$ (39. §. I. II. Form.) vollkommen bestimmt: nur alsdann, wenn $n+2 < \mu$ ist, giebt 2) ein algebraisches Integral, welches man sonst nach (33. §. 1. Zus. II.) bestimmen könnte; denn es muß für $n+2 < \mu$ das letzte Glied in 2) allemal wegfallen.

Setzt man ferner bey der ersten Formul der vorigen Aufgabe $m = \frac{n}{2}$ und $\mu = -2$; so findet man $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\alpha+\beta x}$ durch $\int \frac{x^{\frac{n-2}{2}}dx}{\alpha+\beta x}$, und hieraus ergiebt sich für $n=3$, $n=5$, $n=7$ u. s. f. folgendes Integral 3). Setzt man aber

aber bey der zweyten Formul der vorigen Aufgabe $m = \frac{n}{2}$, und $\mu = -2p$; so wird man finden $\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{(\alpha+\beta x)^p}$ durch $\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{(\alpha+\beta x)^{p-1}}$, woraus für $p=2$, $p=3$, $p=4$ u. s. f. folgendes Integral 4) entsteht.

Endlich für $z=\alpha+\beta x$ wird $\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\alpha+\beta x} = \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dz\sqrt{(z-\alpha)}}{z}$ $= \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)}} - \frac{\alpha}{\beta^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dz}{z\sqrt{(z-\alpha)}}$; da also der erste Theil $= \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}} . 2\sqrt{(z-\alpha)} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\beta}$, und der zweyte Theil nach (39. §. VI. Form.) $= \frac{-\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}}$ Arc Tang $\frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{(z-\alpha)}}{2\alpha-z}$ $= \frac{-\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}}$ Arc Tang $\frac{2\sqrt{\alpha\beta x}}{\alpha-\beta x}$ ist; so erhält man dadurch folgendes Integral 5).

3) $$\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\alpha+\beta x} = \frac{2x^{\frac{n}{2}}}{n\beta} - \frac{2\alpha x^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)\beta^2} + \frac{2\alpha^2 x^{\frac{n-4}{2}}}{(n-4)\beta^3} \cdots \frac{\pm 2\alpha^{\frac{n-3}{2}} . x^{\frac{3}{2}}}{3\beta^{\frac{n-1}{2}}} \mp \frac{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}{\beta^{\frac{n-1}{2}}} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\alpha+\beta x}.$$

4) $$\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{(\alpha+\beta x)^p} = x^{\frac{n+2}{2}} \left(\frac{1}{(p-1)\alpha(\alpha+\beta x)^{p-1}} \right.$$
$$\left. \frac{-(n-2p+4)}{2(p-1)(p-2)\alpha^2(\alpha+\beta x)^{p-2}} \right.$$

$$\frac{+(n-2p+4)(n-2p+6)}{2^2(p-1)(p-2)(p-3)\alpha^3(\alpha+\beta x)^{p-3}} \cdots \cdots$$
$$\left.\frac{\pm(n-2p+4)(n-2p+6)\cdots(n-4)(n-2)}{2^{p-2}(p-1)(p-2)(p-3)\cdots 3.2.1.\alpha^{p-1}(\alpha+\beta x)}\right)$$
$$\frac{\mp(n-2p+4)(n-2p+6)\cdots(n-4)(n-2)n}{2^{p-1}(p-1)(p-2)(p-3)\cdots 3.2.1.\alpha^{p-1}}\int\frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\alpha+\beta x}.$$

$$5)\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\alpha+\beta x}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\beta}-\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}}\text{ArcTang}\frac{2\sqrt{\alpha\beta x}}{\alpha-\beta x}+C.$$

So sind also auch die Integralien 3) 4) für alle ganze bejahte Zahlen p, und alle bejahte ungerade n vollkommen bestimmt; das Integral 3) durch 5), und 4) durch 3).

3. Zusatz.

Bey der zweyten Formul der vorigen Aufgabe sey $m=-\frac{1}{2}$, oder $m=-1$, hernach $\mu=-1, \mu=1, \mu=3, \mu=5$, u. s. f.; so erhält man folgendes Integral 1) oder 3). Und bey der ersten Formul der vorigen Aufgabe setze man $-m$ statt m; so erhält man $\int\frac{dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}}{x^{m+1}}$ durch $\int\frac{dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}}{x^m}$, und darauf findet man für $m=\frac{1}{2}, m=\frac{3}{2}, m=\frac{5}{2}$ u. s. f. folgendes Integral 2); und für $m=1, m=2, m=3$, u. s. f. das Integral 4).

$$1)\int\frac{dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}}{x^{\frac{1}{2}}}=2x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}}{\mu+1}\right.$$

+,

$$+\frac{\mu\alpha\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}}{(\mu+1)(\mu-1)}$$

$$+\frac{\mu(\mu-2)\alpha^2\sqrt{(\alpha+\beta)x)^{\mu-4}}}{(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)}$$

$$+ \cdots \cdots \cdots

$$3)\int\frac{dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}{x}=\frac{2\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}{\mu}+\frac{2\alpha\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}}{\mu-2}$$

$$+\frac{2\alpha^2\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-4}}}{\mu-4}+\cdots+\frac{2\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}}{1}$$

$$+\alpha^{\frac{\mu+1}{2}}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)}}.$$

$$4)\int\frac{dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}{x^{\nu}}=-\left(\frac{1}{(\nu-1)\alpha x^{\nu-1}}\right.$$

$$+\frac{(\mu-2\nu+4)\beta}{2(\nu-1)(\nu-2)\alpha^2x^{\nu-2}}+\frac{(\mu-2\nu+4)(\mu-2\nu+6)\beta^2}{2^2(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\alpha^3x^{\nu-3}}+\cdots$$

$$\left.\cdots+\frac{(\mu-2\nu+4)(\mu-2\nu+6)\cdots(\mu-4)(\mu-2)\beta^{\nu-2}}{2^{\nu-2}(\nu-1)(\nu-2)\cdots3.2.1.\alpha^{\nu-1}x}\right)\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu+2}}$$

$$+\frac{(\mu-2\nu+4)(\mu-2\nu+6)\cdots(\mu-4)(\mu-2)\mu\beta^{\nu-1}}{2^{\nu-1}(\nu-1)(\nu-2)\cdots3.2.1.\alpha^{\nu-1}}\int\frac{dx\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}{x}.$$

Das Integral 1) hängt vom bekannten Integral $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$ ab, (39. §. I. II. Form.), und durch 1) ist 2) vollkommen bestimmt, dergestalt, daß 2) nur alsdann ein, von 1) unabhängiges, algebraisches Integral giebt, wenn $\mu<n$ ist, weil für $\mu<n$ das letzte Glied in 2) gewiß wegfällt.

Ferner hängt 3) vom bekannten Integral $\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$ ab, (39. §. V. VI. Form.), und dadurch ist 4) vollkommen bestimmt. Doch ist 4) für den Fall, wo ν eine gerade Zahl und $\nu-1>\mu$ ist, nicht brauchbar, in welchem Fall man aber das Integral nach (33. §. 1. Zus. II. Form.) erhält.

4. Zus

4. Zusatz.

Endlich setze man bey der zweyten Formul der obigen Aufgabe $m = -1$, und $-\mu$ statt μ; so wird man das Integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}$ durch $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}}$ finden, und wenn man hernach $\mu = 3$, $\mu = 5$, $\mu = 7$ u. s. f. setzt; so findet man folgendes Integral 1). Ferner setze man bey der ersten Formul derselben Aufgabe $-m$ statt m, und $-\mu$ statt μ, hernach $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$, u. s. f. bis $m = \nu - 1$; so erhält man folgendes Integral 2).

1) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}} = \frac{2}{(\mu-2)\alpha\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}} + \frac{2}{(\mu-4)\alpha^2\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-4}}} + \frac{2}{(\mu-6)\alpha^3\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-6}}} + \cdots\cdots + \frac{2}{\frac{\mu-1}{2}\cdot\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$$

2) $$\int \frac{dx}{x^{\nu}\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-2}}}\left(\frac{-1}{(\nu-1)\alpha x^{\nu-1}} + \frac{\beta(\mu+2\nu-4)}{2(\nu-1)(\nu-2)\alpha^2 x^{\nu-2}} - \frac{\beta^2(\mu+2\nu-4)(\mu+2\nu-6)}{2^2(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\alpha^3 x^{\nu-3}} - \cdots\cdots\right)$$

$$\left.\frac{\pm\beta^{\nu-2}(\mu+2\nu-4)(\mu+2\nu-6)\cdots(\mu+2)}{\alpha^{\nu-2}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\cdots 2.1.\alpha^{\nu-1}x}\right)$$

$$\frac{\pm\beta^{\nu-1}(\mu+2\nu-4)(\mu+2\nu-6)\cdots(\mu+2)\mu}{\alpha^{\nu-1}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\cdots 2.1.\alpha^{\nu-1}}\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu}}}.$$

Da nun das Integral 1) vom bekannten Integral $\int\frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$ (39. §. V. VI. Form.) abhängt; so ist dadurch das Integral 2) vollkommen bestimmt.

Ferner setze man bey der ersten Formul der vorigen Aufgabe $\mu=-2$ und $m=\frac{-n}{2}$; so wird sie $\int\frac{dx}{x^{\frac{n+2}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$ durch $\int\frac{-dx}{x^{\frac{n}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)}}$ geben, woraus man für $n=-1$, $n=1$, $n=3$, $n=5$ u. s. f. folgendes Integral 3) erhält.

Setzt man aber bey der zweyten Formul der vorigen Aufgabe $m=\frac{-n}{2}$ und $\mu=-2p$; so wird man finden $\int\frac{dx}{x^{\frac{n}{2}}(\alpha+\beta x)^{p}}$ durch $\int\frac{dx}{x^{\frac{n}{2}}(\alpha+\beta x)^{p-1}}$ und daraus ergiebt sich für $p=2$, $p=3$, $p=4$, u. s. f. folgendes Integral 4), welches für jede bejahte ganze Zahl p, und jede bejahte ungerade n durch 3) und 3) durch das aus (2. Zus.) bekannte Integral $\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\alpha+\beta x}$ vollkommen bestimmt ist.

3)

$$3)\int \frac{dx}{x^{\frac{n}{2}}(\alpha+\beta x)} = \frac{-2}{(n-2)\alpha x^{\frac{n-2}{2}}} \frac{+2\beta}{(n-4)\alpha^2 x^{\frac{n-4}{2}}}$$

$$\frac{-2\beta}{(n-6)\alpha^3 x^{\frac{n-6}{2}}} + \cdots \frac{\pm 2\beta^{\frac{n-3}{2}}}{\alpha^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} \frac{\pm 2\beta^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\frac{\mp \beta^{\frac{n+1}{2}}}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\alpha+\beta x}.$$

$$4)\int \frac{dx}{x^{\frac{n}{2}}(\alpha+\beta x)^p} = \frac{1}{x^{\frac{n-2}{2}}} \left(\frac{1}{(p-1)\alpha(\alpha+\beta x)^{p-1}} \right.$$

$$\frac{+(n+2p-4)}{2(p-1)(p-2)\alpha^2(\alpha+\beta x)^{p-2}}$$

$$\frac{+(n+2p-4)(n+2p-6)}{2^2(p-1)(p-2)(p-3)\alpha^3(\alpha+\beta x)^{p-3}} \cdots\cdots$$

$$\left. \cdots \frac{+(n+2p-4)(n+2p-6)\cdots(n+4)(n+2)}{2^{p-2}(p-1)(p-2)\cdots 3.2.\alpha^{p-1}(\alpha+\beta x)} \right)$$

$$\frac{+(n+2p-4)(n+2p-6)\cdots(n+4)(n+2)n}{2^{p-1}(p-1)(p-2)\cdots 3.2.\alpha^{p-1}} \int \frac{dx}{x^{\frac{n}{2}}(\alpha+\beta x)}.$$

5. Zusatz.

Soll also das Integral bestimmt werden, welches mit einem Verschwindungs-Quotienten von der Form $x^{\frac{m}{2}} dx (\alpha+\beta x)^{\frac{p}{2}}$ zusammenhängt; so wird man dasselbe entweder nach (26. §. 3. Zus.) bestimmen, wenn nämlich $\frac{p}{2}$ eine bejahte ganze Zahl ist; oder nach (33. §. 1. Zus. I.) wenn $\frac{m}{2}$ eine bejahte ganze Zahl ist, was immer

für eine Zahl $\frac{p}{2}$ seyn mag; oder nach (daſ. II. Form.), wenn $\frac{m}{2}+\frac{p}{2}$ eine verneinte ganze Zahl ist: trifft aber keine von diesen Bedingungen zu; so wird man das Integral nach einer von den vorhergehenden Formuln zu bestimmen haben.

6. Zusatz.

Kömmt ein Verschwindungs-Quotient unter der Form $x^{\frac{m}{2}}dx(\alpha x+\beta x^2)^{\frac{p}{2}}$ vor; so muß man zuerst sehen, ob sich das damit zusammenhängende Integral nicht nach (33. §. 4. Zus.) bestimmen läßt: geht dieses nicht an; so schaffe man auch hier die veränderliche Gröſſe aus dem ersten Gliede weg, mithin setze man $x^{\frac{m}{2}}dx(\alpha x+\beta x^2)^{\frac{p}{2}}$ $=x^{\frac{m+p}{2}}dx(\alpha+\beta x)^{\frac{p}{2}}$ und suche das Integral $\int x^{\frac{m+p}{2}}dx(\alpha+\beta x)^{\frac{p}{2}}$ nach einer von den vorhergehenden Formuln.

1. Anmerkung.

Man wird bemerkt haben, daß sowohl in den nächst vorhergehenden Zusätzen, als in (40. §. u. Zus.) viele Verschwindungs-Quotienten weggelassen worden sind, obgleich dieselben zu den allgemeinen Formuln (40. u. 41. §.) gehörten; dieses geschah aber aus der Ursache, weil sie sich entweder gar nicht, oder vortheilhafter nach (33. §. 1. Zus.) integriren lassen. Wir haben z. B. in vorigen Zusätzen den Verschwindungs-Quotienten $\frac{x^m dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}}$ für den Fall

einer

einer ganzen bejahten Zahl m nirgends in Erwägung gezogen; weil er sich für eine solche Zahl am bequemsten nach (33. §. 1. Zus.) integriren läßt: eben so kömmt der Verschwindungs-Quotient $\frac{dx}{x^v\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}}$ in (4. Zus.) nur für eine ganze bejahte Zahl v in Erwägung, da doch in andern Fällen (1. 2. 3. Zus.) x mit einem gebrochenen Exponenten $\frac{n}{2}$ versehen war; dieß geschah aber ebenfalls aus der Ursache, weil $\int \frac{dx}{x^{\frac{n}{2}}\sqrt{(\alpha+\beta x)^\mu}}$ sich nach (33. §. 1. Zus.) sehr bequem bestimmen läßt. Ueberhaupt wird man sich der in (40. u. 41. §. nebst Zusätzen) ausgeführten Formuln nur alsdann zu bedienen haben, wenn man zuvor erfährt, daß ein sonst zu den allgemeinen Formuln (40. u. 41. §.) gehöriger Verschwindungs-Quotient sich nach (33. §. 1. Z.) nicht integriren läßt, wie dieses schon in (40. §. 6. Zus. und 41. §. 5. Zus.) vorgeschrieben wurde.

2. Anmerkung.

Bisher haben wir diejenigen Verschwindungs-Quotienten betrachtet, welche unter den allgemeinen Formuln $x^m dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p$; $x^m dx(\alpha+\gamma x^2)^p$; $x^m dx(\alpha+\beta x)^p$; $x^m dx(\alpha x+\beta x^2)^p$ vorkommen; wir haben gesehen, daß die zwey ersten Verschwindungs-Quotienten sich ganz genau integriren lassen, wenn m was immer für eine ganze Zahl, und p entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl ist, die doch 2 zum Nenner hat: die zwey letzteren Verschwin-

dungs-Quotienten ließen sich aber für alle ganze Zahlen m, p, und alle gebrochene Zahlen m, p integriren, wenn nur ihre Nenner allemal = 2 sind. Kommen andere, von den hier erwähnten, unterschiedene Zahlen m, p vor z. B. $dy = x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{(\alpha + \gamma x^2)}$; so kann man versichert seyn, daß dieselben Verschwindungs-Quotienten sich gar nicht integriren lassen, wofern es verlangt wird, daß das jedesmalige Integral entweder eine algebraische, von Logarithmen und Kreisbogen unabhängige Function, oder höchstens von Logarithmen oder Kreisbogen abhängig seyn soll. Ausser diesen Verschwindungs-Quotienten giebt es noch unzählige andere, welche in der Ausübung sehr oft vorkommen: der nächst folgende Abschnitt soll die vorzüglichsten kennen lehren, und die Art erklären, worauf es bey der Integrirung derselben ankömmt.

Der-

Der III. Abschnitt.

Anwendung der bisherigen Theorie auf die Integrirung anderer mehr zusammengesetzten Verschwindungs-Quotienten, nebst weiterer Ausführung des Integrals $\int x^m dx(a+bx^n)^p$, und Integrirung sowohl logarithmischer als trigonometrischer Verschwindungs-Quotienten.

42. §. Aufgabe.

Zu erklären, wie es möglich ist, eine ganze rationale Function $Z=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots+\mu x^n$ in dreytheilichte Factoren, wie $p^2-2pqx\,\mathrm{Cof}\varphi+q^2x^2$ zu zerlegen.

Auflösung. 1) Wenn die vorgelegte Function Z einen dreytheilichten Factor von der Form $p^2-2pqx\,\mathrm{Cof}\varphi+q^2x^2$ haben soll; so muß es für sie zween einfache Factoren von der nachstehenden Form geben, die übrigen Factoren mögen wie immer beschaffen seyn.

$$pq(\mathrm{Cof}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})-q^2x;\ pq(\mathrm{Cof}\varphi-\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})-q^2x.$$

Setzt man aber $r=\frac{p}{q}$; so wird der erste Factor gleich Null, für $x=r(\mathrm{Cof}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})$, und der andere Factor wird es für $x=r(\mathrm{Cof}\varphi-\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1})$ werden: also muß auch die Function Z, welche aus denselben Factoren bestehen soll, zweymal gleich Null werden, einmal für den ersten Werth von x, sodann für den zweyten.

2) Nun

2) Nun ist für $x = r(\text{Cos}\varphi + \text{Sin}\varphi\sqrt{-1})$ jede nte Potenz folgende:

$$x^n = r^n(\text{Cos}\, n\varphi + \text{Sin}\, n\varphi\sqrt{-1}).$$

Man wird nämlich finden, daß dieser Satz für $n = 2$, $n = 3$, richtig ist, und für x^{n+1} gelten muß, sobald er für x^n gilt, welches die Behauptung ausser Zweifel setzt (I. B. 54. §.). Denn es ist

$$x^2 = r^2(\text{Cos}\varphi^2 + 2\,\text{Cos}\varphi\,\text{Sin}\varphi\sqrt{-1} - \text{Sin}\varphi^2)$$

also ist nach (I. B. 156. §. 4. Zus. I. II.)

$$x^2 = r^2(\text{Cos}\, 2\varphi + \text{Sin}\, 2\varphi\sqrt{-1}).$$

Hieraus folgt $x^3 = r^2(\text{Cos}\, 2\varphi + \text{Sin}\, 2\varphi\sqrt{-1})r(\text{Cos}\varphi + \text{Sin}\varphi\sqrt{-1}) = r^3(\text{Cos}\, 2\varphi\,\text{Cos}\varphi - \text{Sin}\, 2\varphi\,\text{Sin}\varphi + (\text{Cos}\, 2\varphi\,\text{Sin}\varphi + \text{Cos}\varphi\,\text{Sin}\, 2\varphi)\sqrt{-1})$

also nach (I. B. 156. §. 4. Zus. I. II.)

$$x^3 = r^3(\text{Cos}\, 3\varphi + \text{Sin}\, 3\varphi\sqrt{-1})$$

Und ist $x^n = r^n(\text{Cos}\, n\varphi + \text{Sin}\, n\varphi\sqrt{-1})$;

so ist $x^{n+1} = r^n(\text{Cos}\, n\varphi + \text{Sin}\, n\varphi\sqrt{-1})r(\text{Cos}\varphi + \text{Sin}\varphi\sqrt{-1}) = r^{n+1}(\text{Cos}\, n\varphi\,\text{Cos}\varphi - \text{Sin}\, n\varphi\,\text{Sin}\varphi) + (\text{Cos}\, n\varphi\,\text{Sin}\varphi + \text{Cos}\varphi\,\text{Sin}\, n\varphi)\sqrt{-1}$

daher nach (I. B. 156. §. 4. Zus. I. II.)

$$x^{n+1} = r^{n+1}(\text{Cos}(n+1)\varphi + \text{Sin}(n+1)\varphi\sqrt{-1}).$$

3) Bey dem andern Werthe von x in (n. 1.) ist $-\text{Sin}\varphi\sqrt{-1}$ statt $\text{Sin}\varphi\sqrt{-1}$: also ist, wegen (n. 2.), auch:

$$x^n = r^n(\text{Cos}\, n\varphi - \text{Sin}\, n\varphi\sqrt{-1}).$$

4) Setzt man nun die Werthe der verschiedenen Potenzen von x nach (n. 2.) statt derselben Potenzen in die gege-

bene

bene Function Z, und nimmt man hierauf in Z die Werthe derſelben Potenzen nach (n. 3.); ſo müſſen wegen (n. 1.) daraus zwo folgende Gleichungen I) II) entſtehen, wovon hier nur die erſten und die unbeſtimmten Glieder angemerkt worden ſind.

I) $o = \alpha + \cdots + \mu r^n \operatorname{Cof} n\varphi + \mu r^n \operatorname{Sin} n\varphi \sqrt{-1}$.

II) $o = \alpha + \cdots + \mu r^n \operatorname{Cof} n\varphi - \mu r^n \operatorname{Sin} n\varphi \sqrt{-1}$.

5) Durch die Addition der Gleichungen I) II) erhält man alſo folgende Gleichung III), welche aus dem unbeſtimmten Gliede entwickelt, die Gleichung IV) giebt.

III) $o = 2\alpha + \cdots + 2\mu r^n \operatorname{Cof} n\varphi$

IV) $o = \alpha + \beta r \operatorname{Cof}\varphi + \gamma r^2 \operatorname{Cof} 2\varphi + \delta r^3 \operatorname{Cof} 3\varphi + \cdots + \mu r^n \operatorname{Cof} n\varphi$.

6) Ziehet man aber die Gleichung II) von I) ab, und dividirt man hierauf alle Glieder durch $2\sqrt{-1}$; ſo entſtehet V) und beſſer entwickelt VI).

V) $o = \cdots + \mu r^n \operatorname{Sin} n\varphi$.

VI) $o = \beta r \operatorname{Sin}\varphi + \gamma r^2 \operatorname{Sin} 2\varphi + \delta r^3 \operatorname{Sin} 3\varphi + \cdots + \mu r^n \operatorname{Sin} n\varphi$.

7) Nun enthalten die Gleichungen IV) VI) auſſer den durch die gegebene Function Z bekannten Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots \mu$ nur noch zwo unbekannte Gröſſen $r = \frac{p}{q}$ und φ: alſo wird es allemal möglich ſeyn, dieſe aus denſelben Gleichungen zu beſtimmen, und wenn man ſie ſtatt $r = \frac{p}{q}$ und φ in (n. 1.) nehmen wird; ſo wird man dadurch ſowohl den verlangten dreytheilichten Factor, als die

damit

damit verbundenen unmöglichen einfachen Factoren von Z in (n. 1.) erhalten.

43. §. Aufgabe.

Es ist $Z=a^n+x^n$ gegeben worden; man soll untersuchen, in wie viel dreytheilichte Factoren von der Form $p^2-2pqx\,Cos\varphi+q^2x^2$ diese Function zerlegt werden kann, und wie diese Factoren beschaffen seyn müssen.

Auflösung. 1) Wenn man diese Function mit der allgemeinen $Z=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots+\mu x^n$ in (42. §.) vergleichet; so findet man $\alpha=a^n$, $\beta=0$, $\gamma=0$, u. s. f. bis $\mu=1$: dafür verwandeln sich die Gleichungen (42. §. n. 5. 6.) in nachstfolgende:

I) $0=a^n+r^n\,Cos\,n\varphi$. II) $0=r^n\,Sin\,n\varphi$.

Und dieß sind diejenigen Gleichungen, aus welchen man die Werthe von $r=\frac{p}{q}$ und φ zu suchen hat, wofür $p^2-2pqx\,Cos\varphi-q^2x^2$ ein dreytheilichter Factor von $Z=a^n+x^n$ werden soll.

2) Es kann aber die Gleichung II) nur für $Sin\,n\varphi=0$ bestehen, und es kann, wenn π die halbe Kreislinie bedeutet, $Sin\,n\varphi=0$ nur für $n\varphi=2k\pi$ oder $n\varphi=(2k+1)\pi$ seyn, wo k jede ganze Zahl ausdrücken mag (I. B. 154. §. X. VII.): also muß man $n\varphi=2k\pi$ oder $n\varphi=(2k+1)\pi$ nehmen.

3) Wegen (n. 2.) müssen also die Gleichungen in (n. 1.) sich in folgende verwandeln lassen.

III)

III) $0 = a^n + r^n \operatorname{Cof}(2k+1)\pi$; IV) $0 = r^n \operatorname{Sin}(2k+1)\pi$

oder

V) $0 = a^n + r^n \operatorname{Cof} 2k\pi$; VI) $0 = r^n \operatorname{Sin} 2k\pi$.

Man kann ferner die Gleichungen V) VI) nicht brauchen: denn es ist $\operatorname{Cof} 2k\pi = 1$ (I. B. 154. §. X. VII.), folglich müßte man aus V) $0 = a^n + r^n$ erhalten, und alsdann wäre $r^n = -a^n$, mithin $r = \sqrt[n]{-a^n}$, woraus folgen würde, daß r entweder einen unmöglichen Werth hat, wenn n eine gerade Zahl ist, oder zwar einen möglichen, aber verneinten Werth $-a$, wofern n eine ungerade Zahl wäre, da doch $r = \frac{p}{q}$ seyn soll (33. §. n. 1.).

Es sollen daher die Gleichungen III) IV) allein gelten, und sodann ist $\operatorname{Cof} 2k+1\pi = -1$ (I. B. 154. §. X. VII.), folglich $0 = a^n - r^n$, und $a = r = \frac{p}{q}$, daher $p = a$, $q = 1$: überdem war in (n. 2.) $n\varphi = (2k+1)\pi$, folglich $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n}$. Für diese Werthe von p, q, φ giebt demnach der allgemeine Factor $p^2 - 2pq \times \operatorname{Cof}\varphi + q^2 x^2$ (33. §.), den dreytheilichten Factor von $a^n + x^n$ allemal $= a^2 - 2ax \operatorname{Cof}\frac{(2k+1)\pi}{n} + x^2$.

4) Da aber wegen (n. 2.) k jede ganze Zahl bedeuten kann; so kann auch der dreytheilichte Factor von $a^n + x^n$ in (n. 3.) unzählige Factoren geben, und nun läßt sich fragen, ob alle zur Function $a^n + x^n$ gehören, ob nicht vielmehr die Zahl derselben für diese Function vollkommen bestimmt ist, welches folgendermaßen entschieden wird.

5) Weil

5) Weil das erste Glied des dreytheilichten Factors von a^n+x^n in (n. 3.) a^2 folglich das Quadrat von a ist; so ist offenbar, daß, wenn man die Anzahl der zu a^n+x^n gehörigen dreytheilichten Factoren, welche für gewisse Zahlen k aus dem noch unbestimmten Factor (n. 3.) entstehen sollen, mit m bezeichnet, dieselben alle in einander multiplicirt, die 2mte Potenz a^{2m} zum ersten Gliede des Products geben müssen: da also dieses Product die Function a^n+x^n seyn muß, wofern sie aus lauter dreytheilichten Factoren bestehet; so muß $2m=n$, daher $m=\frac{n}{2}$ seyn; das heißt: die Anzahl m der dreytheilichten Factoren von der Beschaffenheit (n. 3.), welche zur Function a^n+x^n gehören sollen, kann nicht grösser seyn, als $\frac{1}{2}n$, wenn n eine gerade Zahl ist, und so viele kann dieselbe Function allemal haben.

6) Wenn hingegen n eine ungerade Zahl ist; so muß $n-1=2\alpha$ eine gerade Zahl seyn, die nämlich 2α heissen mag, folglich kann höchstens $2m=2\alpha$ oder $m=\alpha=\frac{n-1}{2}$ seyn; das heißt: in diesem Fall kann die Function a^n+x^n nicht aus mehreren dreytheilichten Factoren bestehen, als derer Anzahl durch $m=\frac{n-1}{2}$ bestimmt ist: weil aber so viele dreytheilichte Factoren, alle in einander multiplicirt, nur die Potenz $a^{2m}=a^{n-1}$ geben können, und diese noch einmal mit a multiplicirt werden muß, wenn $a^{n-1}.a=a^n$ herauskommen soll, wie es a^n+x^n erfordert;

so

so ist klar, daß, wenn die Function $a^n + x^n$ wirklich aus $\frac{n-1}{2}$ dreytheilichten Factoren bestehet, dieselbe ausser solchen Factoren noch einen einfachen Factor $a+x$ haben muß.

7) Wenn man nun $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$, u. s. f. in (n. 3.) setzt; so wird man aus dem noch unbestimmten, daselbst angeführten, dreytheilichten Factor, die dreytheilichten Factoren, welche zu a^n+x^n gehören können, völlig bestimmen, und die Anzahl der so bestimmten Factoren wird allemal $=k+1$ seyn, indem z. B. $k=3$ den vierten, $k=2$ den dritten Factor giebt, u. s. f.: wenn also n bey a^n+x^n eine gerade Zahl ist; so kann höchstens $k+1=\frac{1}{2}n$ seyn, wegen (n. 5.): ist aber n eine ungerade Zahl; so kann höchstens $k+1=\frac{1}{2}(n-1)$ seyn, wegen (n. 6.).

8) Hieraus ergeben sich nun folgende Regeln: wegen (n. 3.) ist $a^2 - 2ax\,\mathrm{Cos}\frac{(2k+1)\pi}{n} + x^2$ allemal die eigentliche Form jedes dreytheilichten zur Function a^n+x^n gehörigen Factors, man mag k durch was immer für einen Werth in der Reihe 0, 1, 2, 3, 4 --- bestimmen, wenn man nur nicht $k+1 > \frac{1}{2}n$, im Fall einer geraden Zahl n, oder nicht $k+1 > \frac{1}{2}(n-1)$ nimmt, im Fall n eine ungerade Zahl ist: auf diese Art kann man demnach für jede gegebene Function a^n+x^n beym bestimmten Exponenten n

allemal die ihr zugehörigen dreytheilichten Factoren bestimmen, wobey es doch allemal noch einen einfachen Factor $a+x$ geben wird, wenn n eine ungerade Zahl ist (n. 6.) z. B.

Für a^3+x^3

$$(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{1}{3}\pi+x^2)(a+x).$$

Für a^4+x^4

$$(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{1}{4}\pi+x^2)(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{3}{4}\pi+x^2).$$

Für a^5+x^5

$$(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{1}{5}\pi+x^2)(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{3}{5}\pi+x^2)(a+x).$$

Für a^6+x^6

$$(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{1}{6}\pi+x^2)(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{3}{6}\pi+x^2)(a^2-2ax\,\mathrm{Cof}\tfrac{5}{6}\pi+x^2).$$

u. s. f.

Zusatz.

Für a^n-x^n fände man aus gleichen Gründen die Form der zu dieser Function gehörigen dreytheilichten Factoren $=p^2-2pqx\,\mathrm{Cof}\varphi+q^2x^2$, wenn man $r=\frac{p}{q}$ setzte, und dafür die Gleichungen $o=a^n-r^n\,\mathrm{Cof}n\varphi$, $o=r^n\,\mathrm{Sin}n\varphi$ nähme.

Weil aber auch hier $\mathrm{Sin}\,n\varphi=o$ seyn muß, und dieses nur für $n\varphi=(2k+1)\pi$ oder $n\varphi=2k\pi$ geschehen kann; so muß man eigentlich hier $n\varphi=2k\pi$ nehmen, damit, wegen $\mathrm{Cof}\,n\varphi=\mathrm{Cof}\,2k\pi=+1$, auch hier $o=a^n-r^n$ gelten mag, wie oben (n. 3.): da nun dieses $r=a$ giebt; so ist für $r=\frac{p}{q}=a$ und $n\varphi=2k\pi$, mithin

mithin $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, der zu $a^n - x^n$ gehörige dreytheilichte Factor $a^2 - 2ax\,\mathrm{Cof}\frac{2k\pi}{n} + x^2$, wobey für k jede ganze Zahl von o an genommen werden kann, wenn nur 2k nie grösser als n wird. Z. B.

$a^2 - x^2 = (a-x)(a+x)$

$a^3 - x^3 = (a^2 - 2ax\,\mathrm{Cof}\frac{2}{3}\pi + x^2)(a-x)$

$a^4 - x^4 = (a^2 - 2ax\,\mathrm{Cof}\frac{2}{4}\pi + x^2)(a+x)(a-x)$

$a^5 - x^5 = (a^2 - 2ax\,\mathrm{Cof}\frac{2}{5}\pi + x^2)(a^2 - 2ax\,\mathrm{Cof}\frac{4}{5}\pi + x^2)(a-x)$.

Anmerkung.

Dieß war demnach nur eine Anwendung der allgemeinen Untersuchung (42. §.) auf den einzelnen Fall, wenn eine Function die Form $a^n \pm x^n$ hat, wovon der Gebrauch unten gezeigt wird. Anwendungen dergleichen allgemeiner Untersuchungen (42. §.) auf andere einzelne Functionen, und die Summirung der Reihen, findet man beym Hrn. Euler in seiner Introd. in Analys. infin.

44. §. Lehrsatz.

Nach der vorhergehenden Theorie lassen sich alle Verschwindungs-Quotienten integriren, welche unter der nachstehenden Form vorkommen, es mag $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ oder $X = \alpha + \gamma x^2$, und es mögen a, b, c - - - - p, m bejahte oder verneinte ganze Zahlen, k, l, n - - - v, q aber entweder ganze bejahte oder verneinte, oder gebrochene bejahte oder verneinte Zahlen seyn, wenn nur ihr Nenner nicht grösser als 2 ist.

$$dy = \frac{(A+Bx^aX^k+Cx^bX^l+Dx^cX^n+\ldots+Px^pX^v)\,dx}{x^mX^q}$$

Beweis. Es iſt $dy = \frac{A\,dx}{x^mX^q} + Bx^{a-m}X^{k-q}\,dx$

$$+Cx^{b-m}X^{l-q}\,dx+\ldots+Px^{p-m}X^{v-q}\,dx.$$

alſo $y = A\int\frac{dx}{x^mX^q} + B\int x^{a-m}X^{k-q}\,dx + C\int x^{b-m}X^{l-q}\,dx$

$$+\ldots+P\int x^{p-m}X^{v-q}\,dx.$$

Sind nun a, b, c ... p, m ganze Zahlen, übrigens alle bejaht, oder alle verneint, oder einige bejaht und andere verneint; ſo werden ſolche Zahlen auch a — m, b — m, c — m ... p — m ſeyn müſſen: ſind ferner k, l, n ... v, q lauter ganze Zahlen, oder lauter gebrochene Zahlen, wie $\frac{\mu}{2}$, oder einige ganze und andere gebrochene; ſo werden ſolche Zahlen auch k — q, l — q, n — q ... v — q ſeyn müſſen. Wenn alſo $X = \alpha+\beta x+\gamma x^2$ iſt; ſo laſſen ſich alle Theile des verlangten Integrals y nach (38. §. u. Zuſ.) beſtimmen: iſt aber $X = \alpha+\gamma x^2$; ſo findet man dieſelben Theile nach (40. §. 6. Zuſ.).

1. Zuſatz.

Für C = o, D = o ... P = o, m = o, a = 1, k = o

wäre $dy = \frac{(A+Bx)\,dx}{X^q}$, und

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^q} = A\int\frac{dx}{X^q} + B\int\frac{x\,dx}{X^q}.$$

Nun

Nun ist nach (38. §. 6. Zus. II. Form.) für $p = -q$.

$$\int \frac{x\,dx}{X^q} = \frac{-1}{2\gamma(q-1)X^{q-1}} - \frac{\beta}{2\gamma}\int \frac{dx}{X^q}:$$

also ist für $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$

I) $$\int \frac{(A+Bx)dx}{X^q} = \frac{-B}{2\gamma(q-1)X^{q-1}} + \frac{2\gamma A - \beta B}{2\gamma}\int \frac{dx}{X^q},$$

und nun für $\beta = 0$, $X = \alpha + \gamma x^2$,

II) $$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(\alpha+\gamma x^2)^q} = \frac{-B}{2\gamma(q-1)(\alpha+\gamma x^2)^{q-1}} + A\int \frac{dx}{(\alpha+\gamma x^2)^q}$$

Beyde Integralien I) II) sind vollkommen bestimmt, weil sie von Integrallen $\int \frac{dx}{X^q}$ abhängen, welche aus (38. §. 10. Zus. 40. §. 2. Zus.) bekannt sind.

2. Zusatz.

Wenn bey dem obigen Verschwindungs-Quotienten dy überall $X = \alpha + \beta x$ wäre; so liesse sich das Integral y wegen (41. §. 5. Zus.) bestimmen, wenn auch a, b, c -- p, m gebrochene Zahlen wären, wenn nur ihre Nenner nicht gröſſer als 2 wären.

45. §. Lehrsatz.

Es kann kein Verschwindungs-Quotient unter der Form einer gebrochenen und rationalen Function $dy = \frac{M\,dx}{N}$ gegeben werden, welcher sich nach der vorhergehenden Theorie nicht ganz genau integriren liesse, wenn nur die einfachen Factoren von der Form $p - qx$, aus welchen der Nenner N bestehen mag (I. B. 95. §. 6. Zus.) bekannt wären.

Beweis. 1) Die Function $\frac{M}{N}$ ist entweder ein ächter oder unächter Bruch, in der Bedeutung (I. B. 163. §.). Wenn $\frac{M}{N}$ ein unächter Bruch ist; so kann man $\frac{M}{N}$ in eine ganze Function P, und einen ächten Bruch $\frac{R}{Q}$ zerlegen (I. B. 164. §.), und dann ist

$$\frac{Mdx}{N} = Pdx + \frac{Rdx}{Q}; \text{ also } \int\frac{Mdx}{N} = \int Pdx + \int\frac{Rdx}{Q} \cdots$$

Da nun $\int Pdx$ für jede ganze rationale Function P von x sich nach der vorhergehenden Theorie leicht bestimmen läßt; so würde es noch auf das Integral $\int\frac{Rdx}{Q}$ ankommen, wobey $\frac{R}{Q}$ ein ächter Bruch ist. Soll demnach der angeführte Satz seine Richtigkeit haben; so muß man darthun, daß die vorhergehende Theorie zur Bestimmung des Integrals $\int\frac{Mdx}{N}$ für jede ächte gebrochene und rationale Function $\frac{M}{N}$ hinreichet.

2) Dem zufolge erwäge man, daß die einfachen Factoren $a+bx$, $c+dx$, $e+fx$ --- aus welchen der Nenner bestehen soll, entweder alle möglich, oder auch einige unmöglich sind.

3) Sind alle diese Factoren möglich; so werden sie alle ungleich, oder alle gleich, oder einige gleich und andere ungleich seyn.

Wenn

Wenn alle Factoren von $N=(a+bx)(c+dx)(e+fx)\cdots$ ungleich sind; so wird man nach (I. B. 165. §.) die Function $\frac{M}{N}$ in eben so viele Brüche von nachstehender Form zerlegen können:

$$\frac{M}{N}=\frac{\alpha}{a+bx}+\frac{\beta}{c+dx}+\frac{\gamma}{e+fx}+\cdots$$

daher wird seyn:

$$\int\frac{Mdx}{N}=\alpha\int\frac{dx}{a+bx}+\beta\int\frac{dx}{c+dx}+\gamma\int\frac{dx}{e+fx}+\cdots$$

mithin nach (27. §. 2. Zus.).

$$\int\frac{Mdx}{N}=\frac{\alpha}{b}.l(a+bx)+\frac{\beta}{d}.l(c+dx)$$
$$+\frac{\gamma}{f}.l(e+fx)+\cdots+C.$$

4) Wären aber alle Factoren $a+bx$, $c+dx$, $e+fx\cdots$ von N einander gleich; so würde N diejenige Potenz von einem Factor $a+bx$ seyn, deren Ordnung durch die Anzahl der Factoren bestimmt wird, dergestalt, daß, wenn N aus n gleichen Factoren bestünde, $N=(a+bx)^n$ wäre; und in diesem Fall könnte man die Function $\frac{M}{N}$ in eben so viele Brüche nach (I. B. 167. §.) von nachstehender Form zerlegen, wie viel ihrer die Anzahl n der Factoren anzeiget.

$$\frac{M}{N}=\frac{\alpha}{(a+bx)^n}+\frac{\beta}{(a+bx)^{n-1}}+\cdots+\frac{\mu}{a+bx}$$

es wäre demnach:

$$\int\frac{Mdx}{N}=\int\frac{\alpha dx}{(a+bx)^n}+\int\frac{\beta dx}{(a+bx)^{n-1}}+\ldots+\int\frac{\mu dx}{a+bx}.$$

Mithin nach (26. §. 1. 2. Zuf. und 27. §. 2. Zuf.).

$$\int\frac{Mdx}{N}=\frac{-\alpha}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}+\frac{-\beta}{b(n-2)(a+bx)^{n-2}}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\mu}{b}.l(a+bx)+C.$$

5) Bestehet endlich der Nenner N aus gleichen und ungleichen einfachen Factoren; so wird der Bruch $\frac{M}{N}$ in so viele Brüche, als gleiche und ungleiche Factoren da sind, nach (I. B. 166. §.) zerlegt werden können, und alsdann wird man das Integral $\int\frac{Mdx}{N}$ durch eine Summe mehrerer Integralien erhalten, worunter einige nach (n. 4.), und andere nach (n. 3.) sich angeben lassen.

6) Nun nehme man an, daß der Nenner N ausser seinen möglichen einfachen Factoren, auch ein Paar unmöglicher Factoren hat; so werden diese in einander multiplicirt einen dreytheilichten Factor von der Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ geben: und wenn man S das Product aus allen übrigen möglichen Factoren nennt; so wird $N=S(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$ seyn. Nun kann man nach (I B. 167. §. Anm.) den Bruch $\frac{M}{N}$ bey dieser Voraussetzung in zween Brüche von der folgenden Form zerlegen:

$\frac{M}{N}$

$$\frac{M}{N} = \frac{A+Bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} + \frac{Z}{S}:$$

also wird seyn

$$\int\frac{Mdx}{N} = \int\frac{(A+Bx)\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} + \int\frac{Z\,dx}{S}.$$

Der erste Theil dieses Integrals ist aber aus (38. §. 7. Zus. IV. Form.) bekannt: will man daher $\int\frac{Mdx}{N}$ haben; so muß man noch das Integral $\int\frac{Z\,dx}{S}$ suchen, und dieses kann allemal nach (n. 3. 4. 5.) gefunden werden, indem S aus lauter einfachen möglichen Factoren bestehen soll.

Bestehet endlich der Nenner N aus mehreren Paaren unmöglicher Factoren von der Form $p - qx$, und vielleicht noch aus einigen möglichen, wovon das Product $= S$ seyn mag; so wird man durch jedes Paar unmöglicher Factoren einen dreytheilichten Factor $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ erhalten, und der Bruch $\frac{M}{N}$ wird sich nach (I. B. 167. §. Anm.) dergestalt zerlegen lassen, daß für jeden dreytheilichten Factor ein Bruch, wie $\frac{A+Bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ zum Vorschein kommen, und der ganze Bruch $\frac{M}{N}$ unter die folgende Form gebracht werden wird, wo $X = \alpha+\beta x+\gamma x^2$ bedeutet, obgleich α, β, γ verschieden seyn können.

$$\frac{M}{N} = \frac{A+Bx}{X} + \frac{C+Dx}{X} + \frac{E+Fx}{X} + \ldots + \frac{Z}{S}$$

mithin wird seyn

$$\int\frac{Mdx}{N}=\int\frac{(A+Bx)dx}{X}+\int\frac{(C+Dx)dx}{X}$$
$$+\int\frac{(E+Fx)dx}{X}+\ldots\ldots+\int\frac{Zdx}{S}.$$

Und nun werden alle einzelne Integralien, das letzte ausgenommen, nach (38. §. 7. Zus. IV. Form.) das letzte aber nach (n. 3. 4. 5.) bestimmt werden können.

Geschieht es aber, daß der Nenner N eine Anzahl n von unmöglichen, einander gleichen Factoren hat; so wird derselbe n dreytheilichte einander gleiche Factoren haben, und $=(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^n$ seyn müssen, wofern ausser diesen Factoren kein möglicher da ist: hat aber der Nenner N ausserdem noch einige mögliche einfache Factoren, wovon das Product $=S$ seyn mag; so wird $N=S(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^n$ seyn. In diesem Fall läßt sich der Bruch $\frac{M}{N}$ nach (I. B. 167. §. Anm.), wie folgt zerlegen:

$$\frac{M}{N}=\frac{A+Bx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^n}+\frac{C+Dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{n-1}}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{P+Qx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

oder

$$\frac{M}{N}=\frac{A+Bx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^n}+\frac{C+Dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{n-1}}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{P+Qx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{Z}{S}$$

und

und es ist

$$\int\frac{Mdx}{N}=\int\frac{(A+Bx)dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^n}+\int\frac{(C+Dx)dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{n-1}}+\cdots+\int\frac{(P+Qx)dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

oder

$$\int\frac{Mdx}{N}=\int\frac{(A+Bx)dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^n}+\cdots+\int\frac{(P+Qx)dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\int\frac{Zdx}{S}$$

Da nun alle diese Integralien, $\int\frac{Zdx}{S}$ ausgenommen, sich nach (44. §. 1. Zus. und 38. §. 7. Zus.) bestimmen lassen, und $\int\frac{Zdx}{S}$ nach (n. 3. 4. 5.) sich bestimmen läßt; so wird man das Integral $\int\frac{Mdx}{N}$ auch in diesem Fall ganz genau bestimmen können.

Anmerkung.

Nach dieser Methode lassen sich alle rationalen und gebrochenen Verschwindungs-Quotienten integriren, für welche eine eigene Integrirungs-Methode vorausgeschickt worden ist; die vorausgeschickte Methode ist aber ungemein bequemer, und eben deswegen wird man sich der hier angeführten Methode nur alsdann bedienen, wenn die vorgelegten Verschwindungs-Quotienten nicht unter die im (44. §.) bemerkte Form gehören, und alsdann auch wird die vorhergehende Methode zur beträchtlichen Erleichterung der gegenwärtigen dienen.

Beyspiele.

I) Sey $dy = \frac{(3+2x+x^2)\,dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$.

Wenn man diese Function nach (I. B. 166. §.) zerleget; so wird man finden, es müsse seyn:

$$y = \int \frac{dx}{(1+x)^2} + \int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{(1-x)\,dx}{1+x^2}.$$

Nun ist nach (26. §. 1. 2. Zus.)

$$\int \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{-1}{1+x}.$$

Nach 27. §. 1. Zus.

$$\int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x).$$

Und nach (34. §. IV. Form. und 27. §. 1. Zus.) ist

$$\int \frac{(1-x)\,dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \text{Arc Tang } x - \frac{1}{2}\log(1+x^2):$$

also ist;

$$y = \frac{-1}{1+x} + l\frac{1+x}{\sqrt{(1+x^2)}} + \text{Arc Tang } x + C.$$

II) Sey $dy = \frac{(2x^3+4x)\,dx}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$.

Behalte man die dreytheilichten Factoren des Nenners, die sich in einfache mögliche Factoren ohnehin nicht zerlegen lassen, und zerlege die gebrochene Function dy nach (I B. 167. §. Anm.) in zween Brüche; so wird man erhalten:

$y =$

$$y = \int \frac{(1+x)\,dx}{x^2-x+1} + \int \frac{(x-1)\,dx}{x^2+x+1}.$$

Nun iſt nach (38. §. 7. Zuſ. IV. Form.)

$$\int \frac{(1+x)dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2} l(1-x+x^2) + \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ArcTang} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} l(1+x+x^2) - \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ArcTang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}};$$

alſo iſt:

$$y = \frac{1}{2} l(1-x+x^2)(1+x+x^2) - \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\text{ArcTang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \text{ArcTang} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} l(1+x^2+x^4) - \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ArcTang} \frac{\sqrt{3}}{1+2x^2} + C.$$

III) Sey $dy = \frac{(3-2x+5x^2-x^3+x^4)\,dx}{(1-x+x^2)^2(1+x^2)}$.

Die Zerlegung nach (I. B. 167. §. Anm.) giebt folgende Integral-Gleichung.

$$y = \int \frac{(1+x)\,dx}{(1-x+x^2)^2} + \int \frac{(1-x)\,dx}{1-x+x^2} + \int \frac{(1+x)\,dx}{1+x^2}.$$

Nun iſt nach (38. §. 10. Zuſ. u. 35. §.):

$$\int \frac{dx}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2x-1}{3(1-x+x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \text{ArcTang} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Daher nach (44. §. 1. Zuſ. I. Form.)

$$\int \frac{(1+x)dx}{(1-x+x^2)^2} = \frac{x-1}{1-x+x^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ArcTang} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Ferner

Ferner ist nach (38. §. 7. Zus. IV. Form.)

$$\int\frac{(1-x)dx}{1-x+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.\text{ArcTang}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}l(1-x+x^2).$$

Und nach (34. §. IV. Form. u. 27. §.)

$$\int\frac{(1+x)dx}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{xdx}{1+x^2}=\text{Arc Tang }x$$
$$+\frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Also ist das verlangte Integral

$$y=\frac{x-1}{1-x+x^2}+\sqrt{3}.\text{Arc Tang}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\text{Arc Tang }x$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{1+x^2}{1-x+x^2}+C.$$

IV) Sey $dy=\frac{(1-x)dx}{1+x^3}$.

Wegen (I. B. 76. §. 12. Zus.) muß $1+x^3$ den einfachen Factor $1+x$ haben; dividirt man $1+x^3$ dadurch, so erhält man den andern dreytheilichten Factor $1-x+x^2$, mithin ist:

$$dy=\frac{(1-x)dx}{(1-x+x^2)(1+x)}.$$

Zerlegt man nun diese Function nach (I. B. 167. §. Anmerk.) in zween Brüche von der Form $\frac{(A+Bx)dx}{1-x+x^2}$ $+$ $\frac{Cdx}{1+x}$; so findet man $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{2}{3}$, mithin ist:

$y=$

$$y=\frac{1}{3}\int\frac{(1-2x)dx}{1-x+x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1+x}.$$

Nun ist nach (38. §. 7. Zus. u. 27. §. 1. Zus.)

$$\int\frac{(1-2x)dx}{1-x+x^2}=-\log(1-x+x^2)$$

$$\text{und}\int\frac{dx}{1+x}=\log(1+x);$$

$$\text{also ist } y=-\frac{1}{3}\log(1-x+x^2)+\frac{2}{3}\log(1+x)$$

$$=\frac{1}{3}\log\frac{1+2x+x^2}{1-x+x^2}+C.$$

V) Sey $dy=\frac{dx}{2-3x^4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{dx}{\frac{2}{3}-x^4}$;

$$\text{Es ist } dy=\frac{1}{3}\cdot\frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-x^2\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+x^2\right)};$$

Die Zerlegung nach (I. B. 167. §. Anmerk.) giebt:

$$y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}}-x^2}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}}+x^2};$$

Daher ist nach (34. §. I. IV. Form.)

$$y=\frac{1}{2\sqrt[4]{24}}.\text{ArcTang}\frac{x\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{24}}\log\frac{\sqrt[4]{2}+x\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}-x\sqrt[4]{3}}+C;$$

46. §. Aufgabe.

Zu bestimmen, in welchen Umständen sich das mit einem Verschwindungs-Quotienten von der Form $x^m dx (a+bx^n)^p$ zusammenhängende Integral für jede ganze Zahl p bestimmen läßt.

Auflösung. 1) Wenn p eine ganze bejahte Zahl ist, so kann das verlangte Integral für alle andere Zahlen m, n nach (26. §. 3. Zus.) bestimmt werden.

Nun nehmen wir an, es sey p eine ganze verneinte Zahl, etwa $p = -q$, wofür man einen Verschwindungs-Quotienten von nachstehender Form zu integriren hätte.

I) $$\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^q} = x^m dx (a+bx^n)^{-q}.$$

2) Wenn $\frac{m+1}{n}$ entweder eine bejahte oder verneinte ganze Zahl wäre; so würde man das mit I) zusammenhängende Integral allemal nach (33. §. 1. Zus.) bestimmen können.

3) Ist aber $\frac{m+1}{n}$ keine ganze Zahl, so geschieht dieses vielleicht aus der Ursache, weil $n = 2$, und m eine bejahte oder verneinte ganze gerade Zahl ist: trifft dieses wirklich zu; so suche man das Integral, welches mit I) zusammenhängen soll, nach (40. §. 1. Zus.). Oder es geschieht dasselbe aus der Ursache, weil $n = 1$, und eine bejahte oder verneinte gebrochene, 2 zum Nenner habende Zahl ist, und für diese Fälle suche man das verlangte Integral nach (41. §. 2. Zus. 4. Zus.):

4) Trifft

4) Trifft keiner von den Umſtänden (2. 3.) zu; ſo ſehe man noch, ob nicht $\frac{m+1}{n}$ eine gebrochene, 2 zum Nenner habende, bejahte oder verneinte Zahl iſt: iſt $\frac{m+1}{n}$ wirklich eine ſolche Zahl; ſo ſetze man:

$$z=a+bx^n;\ \text{mithin}\ x^m=\frac{(z-a)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}};\ dx=\frac{dz(z-a)^{\frac{1-n}{n}}}{nb^{\frac{1}{n}}}$$

und ſuche folgendes Integral nach (41. §. 3. 5. Zuſ.)

$$\int\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^q}=\frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int\frac{dz(z-a)^{\frac{m+1}{n}-x}}{z^q}$$

5) Trifft auch dieſes nicht zu, dabey aber ſind auch m, n ganze Zahlen; ſo wird der Verſchwindungs-Quotient 1) eine rationale Form haben, und dafür wird man das damit zuſammenhängende Integral nach (45. §.) beſtimmen können.

Auſſer den Umſtänden (n. 2. 3. 4. 5.) läßt ſich aber das mit 1) zuſammenhängende Integral gar nicht beſtimmen, wenigſtens durch die Kunſtgriffe nicht, welche uns bisher bekannt ſind.

Beyſpiele.

Sey $dy=\frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}(a+bx^3)^2}=\frac{x^{-\frac{5}{2}}dx}{(a+bx^3)^2}$.

Hier iſt $m=-\frac{5}{2}$, $n=3$, $q=2$, $\frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}$:

das Integral y muß also nach (n. 4.) gesucht werden. Es wird nämlich seyn:

$$y = \frac{1}{3} b^{\frac{1}{2}} \int \frac{dz}{z^2 (z-a)^{\frac{3}{2}}} \text{ für } z = a + b x^3.$$

Mithin nach (41. §. 4. Zus.).

$$y = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{3az\sqrt{(z-a)}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^2\sqrt{(z-a)}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{2a^2\sqrt{a}} \text{ArcT} \frac{2\sqrt{a}\sqrt{(z-a)}}{2a-z}$$

$$= \frac{1}{3ax^3(a+bx^3)} \frac{-1}{a^2x^3} \frac{-b^{\frac{1}{2}}}{2a^2\sqrt{a}} \text{ArcTang} \frac{2\sqrt{a}bx^3}{a-bx^3} + C.$$

Sey $dy = \frac{xdx}{(a+bx^{\frac{4}{3}})^1} = xdx(a+bx^{\frac{4}{3}})^{-1}$.

Hier ist $m = 1, n = \frac{4}{3}, q = 1, \frac{m+1}{n} = \rho : \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$,

mithin läßt sich das Integral y nach (n. 4.) bestimmen, nämlich:

$$y = \frac{3}{4b^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dz(z-a)^{\frac{1}{2}}}{z} \text{ für } z = a + bx^{\frac{4}{3}}.$$

Daher nach (41. §. 3. Zus. 3. Form.).

$$y = \frac{3}{4b^{\frac{3}{2}}} 2\sqrt{(z-a)} \frac{-3a}{4b^{\frac{3}{2}}\sqrt{a}} \text{ArcTang} \frac{2\sqrt{a}\sqrt{(z-a)}}{2a-z} + C.$$

$$= \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2b} - \frac{3\sqrt{a}}{4b^{\frac{3}{2}}} \text{ArcTang} \frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}}{a-bx^{\frac{4}{3}}} + C.$$

Sey $dy = \frac{dx}{x^4(1+x^6)^2} = x^{-4}dx(1+x^6)^{-2}$.

Hier

Hier ist $m=-4$, $n=6$, $q=2$, $\frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}$, mithin läßt sich das Integral y auch nach (n. 4.) bestimmen, nämlich:

$$y=\frac{1}{6}\int\frac{dz}{z^2\sqrt{(z-1)^3}} \text{ für } z=1+x^6,$$

daher nach (41. §. 4. Zus.)

$$y=-\frac{1}{6z\sqrt{(z-1)}}-\frac{1}{10\sqrt{(z-1)}}+\frac{1}{4}\text{Arc Tang}\frac{2\sqrt{(z-1)}}{2-z}$$

$$=\frac{1}{6x^3(1+x^6)}-\frac{1}{10x^3}+\frac{1}{4}\text{Arc Tang}\frac{2x^3}{1-x^6}.$$

Hingegen für $dy=\frac{dx}{x^3(1+x^6)^2}$ müßte das Integral nach (n. 5.) mit Zuziehung des (43. §.) gesuchet werden.

47. §. Aufgabe.

Zu bestimmen, in welchen Umständen sich das Integral bestimmen läßt, welches mit einem unter der Form $dy=x^m dx(a+bx^n)^{\frac{u}{2}}$ vorkommenden Verschwindungs-Quotienten für eine ganze bejahte oder verneinte ungerade Zahl u zusammenhängen mag.

Auflösung. 1) Das Integral y läßt sich für diesen Verschwindungs-Quotienten allemal nach (33. §. 1. Zus.) bestimmen, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte, oder $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{2}$ eine ganze verneinte Zahl ist.

2) Geschieht dieses nicht; so sehe man, ob nicht $n=1$, und m eine gebrochene, 2 zum Nenner habende, oder eine ganze verneinte Zahl ist, wofür man das Integral y allemal nach (41. §. 1. 2. 3. 4. Zus.) bestimmen wird: oder ob nicht $n=2$, und m was immer für eine andere ganze Zahl ist, und dann wird sich das Integral y nach (40. §. 1. 2. 3. 4. 5. Zus.) bestimmen lassen.

3) Trifft keiner von diesen Umständen zu; so muß man noch sehen, ob nicht $\frac{m+1}{n}$ entweder eine verneinte ganze, oder eine bejahte oder verneinte gebrochene, 2 zum Nenner habende, Zahl ist: geschieht dieses; so setze man

$$z=\sqrt{(a+bx^n)}, \text{ mithin}$$

$$\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{u}{2}} = \frac{2}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int z^{u+1} dz(z^2-a)^{\frac{m+1}{n}-1},$$

und nun suche man dieses Integral für eine ganze verneinte Zahl $\frac{m+1}{n}$ nach (40. §. 1. Zus.), und für eine gebrochene bejahte oder verneinte, 2 zum Nenner habende Zahl $\frac{m+1}{n}$, nach (40. §. 2. 3. 4. 5. Zus.).

Sind die Zahlen m, n, u von der Beschaffenheit, daß für sie keine unter den angeführten Bedingungen (n. 1. 2. 3.) erfüllt wird; so kann man versichert seyn, daß das Integral $\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{u}{2}}$ sich durch bisher bekannte Kunstgriffe nicht bestimmen läßt.

Beyſpiele.

Sey $dy = \frac{dx\sqrt{(a+bx^4)}}{x^5} = x^{-5}dx(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}$.

Hier iſt $m = -5$, $n = 4$, $u = 1$, $\frac{m+1}{n} = -1$ eine ganze verneinte Zahl, mithin findet man das Integral y nach (n. 3.), wie folgt:

$$y = b\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-a)^2} \text{ für } z = \sqrt{(a+bx^4)}.$$

Daher nach (40. §. 1. Zuſ.).

$$y = \frac{-bz}{z^2-a} + \frac{bz}{2(z^2-a)} + \frac{b}{4\sqrt{a}}\log\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{-\sqrt{(a+bx^4)}}{2x^4} + \frac{b}{4\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{(a+bx^4)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx^4)}+\sqrt{a}} + C.$$

Sey $dy = dx\sqrt{(a+bx^{\frac{2}{3}})^3} = dx(a+bx^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Hier iſt $m = 0$, $n = \frac{2}{3}$, $u = 3$, $\frac{m+1}{n} = \frac{3}{2}$; daher muß man das Integral y nach (n. 3.) ſuchen. Es wird ſeyn:

$$y = \frac{3}{b^{\frac{3}{2}}}\int z^4\,dz(z^2-a)^{\frac{1}{2}} \text{ für } z = \sqrt{(a+bx^{\frac{2}{3}})}.$$

Folglich nach (40. §. 2. Zuſ.).

$$y = \frac{z^3\sqrt{(z^2-a)^3}}{2b^{\frac{3}{2}}} + \frac{3az\sqrt{(z^2-a)^3}}{8b^{\frac{3}{2}}} + \frac{3az\sqrt{(z^2-a)}}{16b^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{-3a^2}{16b^{\frac{3}{2}}}\log(z+\sqrt{(z^2-a)}) = \frac{1}{2}x\sqrt{(a+bx^{\frac{2}{3}})^3}$$

$$+\frac{3a}{16b}(abx+x^{\frac{1}{3}})\sqrt{(a+bx^{\frac{2}{3}})}-\frac{3a^2}{16b^{\frac{3}{2}}}\log(b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}$$

$$+\sqrt{(a+bx^{\frac{2}{3}})})+C.$$

Sey $dy=\frac{x^5dx}{\sqrt{(a+bx^4)^5}}=x^5dx(a+bx^4)^{-\frac{5}{2}}$.

Hier ist $m=5, n=4, u=-5, \frac{m+1}{n}=\frac{3}{2}$; also muß man das Integral y nach (n. 3.) suchen, und es wird seyn:

$$y=\frac{1}{2b^{\frac{3}{4}}}\int\frac{dz(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}{z^4} \text{ für } z=\sqrt{(a+bx^4)},$$

mithin nach (40. §. 3. Zus. 3. Form.)

$$y=\frac{\sqrt{(z^2-a)^3}}{6ab^{\frac{3}{4}}z^3}=\frac{x^6}{6a\sqrt{(a+bx^4)^3}}+C.$$

Und dieses findet man sonst nach (33. §. 1. Zus.).

48. §. Aufgabe.

Die Umstände anzugeben, in welchen sich das Integral $\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{u}{\mu}}$ für eine gebrochene Zahl $\frac{u}{\mu}$, deren Nenner $\mu>2$ ist, bestimmen läßt.

Auflösung. 1) Auch dieses Integral findet man nach (33. §. 1. Zus.) allemal, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte, oder $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{\mu}$ eine ganze verneinte Zahl ist.

2) Ist

2) Ist aber weder $\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte, noch $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{\mu}$ eine ganze verneinte Zahl; so wird man das verlangte Integral nur noch in zweenen Fällen bestimmen können, nämlich für eine ganze verneinte Zahl $\frac{m+1}{n}$ und für eine ganze bejahte $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{\mu}$.

Ist nämlich $\frac{m+1}{n}$ eine ganze verneinte Zahl; so setze man:

I) $z=\sqrt[\mu]{(a+bx^n)}$, sodann ist $\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{u}{\mu}}$

$$=\frac{\mu}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int z^{u+\mu-1}dz(z^\mu-a)^{\frac{m+1}{n}-1}.$$

Da nun u, μ ganze Zahlen sind, und $\frac{m+1}{n}$ eine ganze verneinte Zahl seyn soll; so wird $z^{u+\mu-1}dz(z^\mu-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$ eine rationale gebrochne Function von z seyn müssen, mithin wird sich das damit zusammenhängende Integral nach (45. §.) bestimmen lassen.

Ist hingegen $\frac{m+1}{n}$ keine ganze verneinte Zahl, wohl aber $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{\mu}$ eine ganze bejahte Zahl; so setze man:

II) $z=\sqrt[\mu]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$; sodann ist $\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{u}{\mu}}$

$$=\frac{-\mu a^{\frac{m+1}{n}+\frac{u}{\mu}}}{n}\int\frac{z^{u+\mu+1}dz}{(z^\mu-b)^{\frac{m+1}{n}+\frac{u}{\mu}+2}}.$$

Und dieses Integral wird man nun ebenfalls nach (45. §.) bestimmen können.

Beyspiele.

Sey $dy = \frac{dx\sqrt[3]{(a+bx^2)}}{x^3} = x^{-3}dx(a+bx^2)^{\frac{1}{3}}$.

Hier ist $m = -3$, $n = 2$, $u = 1$, $\mu = 3$, $\frac{m+1}{n} = -1$ eine ganze verneinte Zahl; das Integral y muß man also nach I) suchen: es wird nämlich seyn:

$$y = \frac{3}{4}b\int\frac{z^3\,dz}{(z^3-a)^2} \text{ für } z = \sqrt[3]{(a+bx^2)}.$$

Und nun müßte man $z^3 - a$ in einen dreytheilichten und einen einfachen Factor, entweder nach (43. §.) oder nach (I. B. 76 §. 12. Zus.), hernach den ganzen Verschwindungs-Quotienten in mehrere Brüche nach (I. B. 167. §. Anm.) zerlegen, um das Integral selbst nach der vorhergehenden Theorie zu bestimmen.

Sey $dy = x^{\frac{5}{4}}dx(2+3x)^{\frac{7}{4}}$.

Hier ist $m = \frac{5}{4}$, $n = 1$, $u = 1$, $\mu = 4$, $\frac{m+1}{n} = \frac{9}{4}$ keine ganze Zahl: setzt man aber $\frac{u}{\mu} = \frac{7}{4}$ hinzu; so ist $\frac{m+1}{n} + \frac{u}{\mu} = 4$ eine ganze bejahte Zahl, wofür man das Integral y nach II) suchen muß. Es wird nämlich seyn:

$$y = -64\int\frac{z^{10}\,dz}{(z^4-3)^5} \text{ für } z = \sqrt[4]{\frac{2+3x}{x}}.$$

Da

Da nun $\frac{z^{10}}{(z^4-3)^5} = \frac{z^{10}}{(z^2+\sqrt{3})^5(z^2-\sqrt{3})^5}$ ist; so kann man die unter dem Integralzeichen $\int$ befindliche gebrochene Function in mehrere Brüche nach (I. B. 167. §. Anmerk.) zerlegen, hernach das verlangte Integral y nach der vorhergehenden Theorie aufsuchen.

49. §. Aufgabe.

Das Integral zu bestimmen, welches mit einem unter der Form $x^e dx(fx^h+gx^i)^l$ gegebenen Verschwindungs-Quotienten zusammenhängen mag.

Auflösung. Man schaffe die veränderliche Grösse aus einem Gliede des zwischen den Klammern befindlichen Binomiums weg, mithin setze man:

$$x^e dx(fx^h+gx^i)^l = x^{e+hl} dx(f+gx^{i-h})^l.$$

Hernach suche man, ob nicht das Integral

$$\int x^{e+hl} dx(f+gx^{i-h})^l$$

sich nach (46. 47. 48. §.) bestimmen läßt.

50. §. Aufgabe.

Ein Verschwindungs-Quotient $dy = Xdx$ ist von der Beschaffenheit, daß er bey X keine andere irrationale Function enthält, als $\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}$, die doch mit rationalen Functionen von x wie immer durch arithmetische Arbeiten, als Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden, auch auf was immer für Potenzen, derer Exponenten ganze Zahlen sind, erhoben seyn kann; man soll

das damit zusammenhängende Integral y bestimmen.

Auflösung. 1) Zur vollständigen Auflösung dieser Aufgabe wird nichts mehr erfordert, als daß man untersuche, ob und wie derselbe Verschwindungs-Quotient allemal unter eine rationale Form gebracht werden kann; denn bey einer solchen Form wird er sich gewiß nach der vorhergehenden Theorie integriren lassen. Es ist aber einleuchtend, daß der ganze Verschwindungs-Quotient eine rationale Form bekommen muß, wenn man für x, dx, und $\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}$ rationale Werthe angeben kann: es kömmt also alles darauf an, ob dergleichen Werthe sich dafür wirklich angeben lassen. Man muß ferner dafür sorgen, daß unmögliche Grössen durchaus vermieden werden mögen; dem zufolge müssen wir hier zween Fälle in Erwägung ziehen, nämlich für ein bejahtes, und für ein verneintes γ.

2) Ist nun γ wirklich bejaht, so setze man

$$\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)} = z - x\sqrt{\gamma},$$

und auf diese Art erhält man folgende Verwandlungen in I).

3) Ist aber γ verneint, also $-\gamma$ statt γ, so ist

$$\sqrt{(\alpha-\gamma x^2)} = \sqrt{(\sqrt{\alpha}-x\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})};$$

setzt man nun $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\alpha}-x\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma}}\right)} = z$, so findet man nachstehende Verwandlungen in II).

I) Für ein bejahtes γ.

$$\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)} = \frac{z^2+\alpha}{2z},$$

$$x =$$

$$x = \frac{z^2 - \alpha}{2z\sqrt{\gamma}}, \quad dx = \frac{dz(z^2+\alpha)}{2z^2\sqrt{\gamma}},$$

und $z = x\sqrt{\gamma} + \sqrt{(\alpha + \gamma x^2)}$.

II) Für ein verneintes γ.

$$\sqrt{(\alpha - \gamma x^2)} = \frac{2z\sqrt{\alpha}}{1+z^2},$$

$$x = \frac{(1-z^2)\sqrt{\alpha}}{(1+z^2)\sqrt{\gamma}}, \quad dx = -\frac{4z\,dz\sqrt{\alpha}}{(1+z^2)^2\sqrt{\gamma}},$$

und $z = \frac{\sqrt{(\alpha - \gamma x^2)}}{\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma}}$.

Beyspiele.

Sey $dy = \frac{dx}{x - \sqrt{(1-x^2)}}$.

Dieses gehört zu II) für $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, und man findet für die vorigen Werthe von $\sqrt{(1-x^2)}$, x, dx,

$$dy = -\frac{4z\,dz}{(1+z^2)^2} : \left(\frac{1-z^2}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^2}\right)$$

$$= \frac{4z\,dz}{(1+z^2)(-1+2z+z^2)};$$

also $y = \int \frac{4z\,dz}{(1+z^2)(-1+2z+z^2)}$ für $z = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{1+x}$.

Sey $dy = \frac{dx\sqrt{(x^2-1)^3}}{x + \sqrt{(x^2-1)}}$.

Dieser Verschwindungs-Quotient gehört zu I) für $\alpha = -1$, $\gamma = 1$, und man findet

$$dy = \frac{dz(z^2-1)}{2z^2} \cdot \frac{(z^2-1)^3}{(2z)^3} : z = \frac{dz(z^2-1)^4}{16z^6};$$

also $y=\frac{1}{16}\cdot\int z^{-6}\,dz\,(z^2-1)^4$ für $z=x+\sqrt{(x^2-1)}$.

Zusatz.

Für den bejahten Werth $\gamma=1$ erhält man aus I) folgende merkwürdige Integralien:

$$\int(x+\sqrt{(\alpha+x^2)})^n\,dx=\frac{1}{2}\int z^n\,dz+\frac{\alpha}{2}\int z^{n-2}\,dz.$$

$$\int(ax+b\sqrt{(\alpha+x^2)})(x+\sqrt{(\alpha+x^2)})^n\,dx=\frac{1}{4}(a+b)\int z^{n+1}dz$$
$$+\frac{\alpha b}{2}\int z^{n-1}\,dz+\frac{\alpha^2}{4}(b-a)\int z^{n-3}\,dz.$$

Das erste Integral ist für alle Zahlen n ganz algebraisch, nur nicht für $n=-1$ und $n=1$, indem für $n=-1$ sein erster, und für $n=1$ sein zweyter Theil logarithmisch wird. Das zweyte Integral ist ebenfalls für alle Zahlen n ganz algebraisch, die Zahlen $n=\pm 2$ und $n=0$ ausgenommen, indem für $n=-2$ sein erster, für $n=2$ sein zweyter, und für $n=0$ sein dritter Theil logarithmisch wird.

51. §. Aufgabe.

Es wird ein Verschwindungs-Quotient $dy=X.\frac{dx}{x}$ vorgelegt, welcher bey X keine andere irrationale Functionen von x enthalten mag, als solche, welche alle auf die Formen $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)^p}$, $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)^q}$, $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)^r}$, u. s. f. bey den ganzen Zahlen p, q, r gebracht werden können, und die dabey mit rationalen Functionen von x^n durch was immer für arithmetische Arbeiten

(50. §.)

(50. §.) verbunden sind: man soll das damit zusammenhängende Integral y bestimmen.

Auflösung. Für $z = \sqrt[\mu]{(a+bx^n)}$ ist $x^n = \frac{z^\mu - a}{b}$, und $\frac{dx}{x} = \frac{\mu z^{\mu-1} dz}{n(z^\mu - a)}$.

Für diese rationalen Werthe von x^n, $\frac{dx}{x}$ u. $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)}$ kann also jeder Verschwindungs-Quotient von der erwähnten Beschaffenheit unter eine rationale Form gebracht werden, es mag bey ihm die irrationale Function $\sqrt[\mu]{(a+bx^n)}$ mit rationalen Functionen von x^n wie immer durch die Addition, Subtraction, Multiplication, und Division verbunden, und auf was immer für Potenzen erhoben seyn: kommen dergleichen irrationale Functionen mit verschiedenen Wurzelexponenten vor; so kann man alle auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten μ bringen, wenn nur alle dasselbe Binomium $a+bx^m$ unter dem Wurzelzeichen enthalten.

Hat man aber den Verschwindungs-Quotienten $dy = X \cdot \frac{dx}{x}$ unter eine rationale Form gebracht; so wird sich hierauf das damit zusammenhängende Integral nach der vorhergehenden Theorie bey der Voraussetzung, daß die einfachen oder dreytheilichten Factoren seines Nenners, wofern er eine gebrochene Function ist, gefunden werden können, bestimmen lassen.

Bey-

Beyſpiele.

Sey $dy = \frac{dx}{x^3 - x\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{dx}{x(x^2-\sqrt{(1-x^2)})}$.

Hier iſt $\mu = 2$; $n = 2$; $a = 1$; $b = -1$; $x^2 = 1 - z^2$;

$$\frac{dx}{x} = \frac{z\,dz}{z^2-1};\quad z = \sqrt{(1-x^2)};$$

alſo $dy = \frac{z\,dz}{(z^2-1)(1-z-z^2)} = \frac{dz}{1-z^2} \cdot \frac{-dz}{1-z-z^2}$,

mithin iſt nach (34. §. I. u. 35. §.),

$$y = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+2z+1}{\sqrt{5}-2z-1} + C.$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{1-\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{(1-x^2)}+1}{\sqrt{5}-2\sqrt{(1-x^2)}-1} + C.$$

Sey $dy = \frac{dx\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3 - x\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{dx}{x} \cdot \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^2 - \sqrt{(1+x^2)}}$

Für $n = 2$, $\mu = 2$, $a = b = 1$, $z = \sqrt{(1+x^2)}$ findet man

$$x^2 = z^2 - 1;\quad \frac{dx}{x} = \frac{z\,dz}{z^2-1};\quad dy = \frac{z^4\,dz}{(z^2-1)(z^2-z-1)}.$$

Daher $dy = dz + \frac{(z^3+2z^2-z-1)\,dz}{(z^2-1)(z^2-z-1)}$ nach (I. B. 164. §.),

mithin nach (I. B. 167. §. Anm.)

$$y = \int dz - \int\frac{z\,dz}{z^2-1} + \int\frac{(1+2z)\,dz}{z^2-z-1}$$

$$= z - \frac{1}{2}\lg(z^2-1) + \lg(z^2-z-1) - \frac{2}{\sqrt{5}}\lg\frac{\sqrt{5}+2z-1}{\sqrt{5}-2z+1}$$

$$= \sqrt{(1+x^2)} + l\frac{x^2-\sqrt{(1+x^2)}}{x} - \frac{2}{\sqrt{5}}\lg\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{(1+x^2)}-1}{\sqrt{5}-2\sqrt{(1+x^2)}+1} + C.$$

Anmer-

Anmerkung.

Die hier aufgelöſten Beyſpiele, und überhaupt alle andere für $\mu = 2$, $n = 2$ können zwar nach (50. §.) behandelt werden: indeſſen iſt der hier vorgeſchlagene Weg allemal vortheilhafter, wenn nur die Umſtände zutreffen, auf welche er ſich beziehet. Wird nämlich ein Verſchwindungs-Quotient dy vorgelegt, welcher auſſer $\sqrt{(a+bx^2)}$ keine andere irrationale Function von x enthält; ſo ſehe man, ob derſelbe Verſchwindungs-Quotient $\frac{dx}{x}$ und rationale Functionen von x^2 enthält: geſchieht dieſes; ſo ſuche man das damit zuſammenhängende Integral auf die hier angewieſene Art; ſonſt muß man ſich mit der in (50. §.) angegebenen Methode begnügen. Hätte man z. B. den obigen erſten Verſchwindungs-Quotienten $\frac{dx}{x^3 - x\sqrt{(1-x^2)}}$ nach (50. §.) integriren wollen; ſo wäre geweſen:

$$\int \frac{dx}{x^3 - x\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{-4z(1+z^2)\,dz}{(1-z^2)^3 - 2z(1-z^4)}.$$

Da doch dieſes Integral nach der hier angeführten Methode ſehr bequem beſtimmt werden konnte.

Zuſatz.

Für $n = 1$ multiplicire man den obigen Werth von x mit $\frac{dx}{x}$; ſo wird man erhalten:

$$x = \frac{z^\mu - a}{b};\quad dx = \frac{\mu z^{\mu-1} dz}{b};\quad z = \sqrt[\mu]{(a+bx)}.$$

Für

Für dieſe rationalen Werthe von x und dx kann man demnach jeden Verſchwindungs-Quotienten $dy = X\,dx$ unter eine rationale Form bringen, hernach nach der vorhergehenden Theorie zu integriren ſuchen, wofern er bey X keine andere irrationale Function enthält, als $\sqrt[\mu]{(a+bx)}$, die doch mit rationalen Functionen von x wie immer verbunden ſeyn kann.

52. §. Aufgabe.

Ein Verſchwindungs-Quotient $dy = X.\frac{dx}{x}$ enthält bey X keine andere irrationale Function von x, als $\sqrt[\mu]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}}$, die doch mit rationalen Functionen von x^n wie immer verbunden ſeyn kann, in der Bedeutung (50. §.): man ſoll das damit zuſammenhängende Integral y beſtimmen.

Auflöſung. Sey $\sqrt[\mu]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}} = z$; ſo wird ſeyn

$$\frac{a+bx^n}{f+gx^n} = z^\mu;\quad x^n = \frac{fz^\mu - a}{b-gz^\mu};\quad \frac{dx}{x} = \frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-1}dz}{n(fz^\mu-a)(b-gz^\mu)}.$$

Setzt man dieſe rationalen Werthe von x^n, $\frac{dx}{x}$ und $\sqrt{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}}$ in $dy = X.\frac{dx}{x}$; ſo wird dafür der vorgelegte Verſchwindungs-Quotient dy eine rationale Form bekommen, und ſich nach der vorhergehenden Theorie integriren laſſen.

1. Zusatz.

Wäre $n=1$, mithin $x=\frac{fz^\mu-a}{b-gz^\mu}$; $dx=\frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-1}dz}{(b-gz^\mu)^2}$;

$z=\sqrt[\mu]{\frac{a+bx}{f+gx}}$; so würde man für diese rationalen Werthe von x, dx jeden Verschwindungs-Quotienten dy unter eine rationale Form bringen, hernach nach der vorhergehenden Theorie integriren können, wofern derselbe ausser dx, und rationalen Functionen von x nur die irrationale Function $\sqrt[\mu]{\frac{a+bx}{f+gx}}$ enthielte.

Beyspiele.

Für $dy=xdx\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}=\frac{x^2dx}{x}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

erhält man nach Aufg.

$$y=\frac{-z}{1+z^2}+\text{Arc Tang } z=-\frac{1}{2}\sqrt{(1-x^4)}$$
$$+\text{Arc Tang}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}+C.$$

Für $dy=dx\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$

findet man nach Zus.

$$y=\frac{2z}{1+z^2}+2\text{ Arc Tang}z=\frac{2z}{1+z^2}+\text{Arc Tang}\frac{2z}{1-z^2}$$
$$=\sqrt{(1-x^2)}+\text{Arc Tang}\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}+C.$$

2. Zusatz.

Die Auflösung der vorigen Aufgabe giebt für $\mu = 2$ folgende theils rationale, theils irrationale Functionen.

$$x^n = \frac{fz^2 - a}{b - gz^2}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{2(bf - ag)z\,dz}{n(fz^2 - a)(b - gz^2)};$$

$$\sqrt{(a+bx^n)} = \frac{z\sqrt{(bf-ag)}}{\sqrt{(b-gz^2)}}; \quad \sqrt{(f+gx^n)} = \frac{\sqrt{(bf-ag)}}{\sqrt{(b-gz^2)}};$$

$$\text{und } z = \frac{\sqrt{(a+bx^n)}}{\sqrt{(f+gx^n)}} = \frac{\sqrt{(a+bx^n)(f+gx^n)}}{f+gx^n}.$$

Wenn also ein Verschwindungs-Quotient $dy = X \cdot \frac{dx}{x}$ gegeben wird, welcher zwo irrationale, unter einander und mit rationalen Functionen von x^n wie immer durch die Addition, Subtraction, Multiplication, und Division verbundene Functionen von der Form $\sqrt{(a+bx^n)}$, $\sqrt{(f+gx^n)}$ bey X enthalten mag; so wird man x^n, und $\frac{dx}{x}$ durch rationale Functionen von z, dz, und dabey $\sqrt{(a+bx^n)}$, $\sqrt{(f+gx^n)}$ durch eine einzige irrationale Function $\sqrt{(b-gz^2)}$ bestimmen können, worauf der gegebene Verschwindungs-Quotient $dy = X \cdot \frac{dx}{x}$ sich nach (50. oder 51. §.) wird integriren lassen.

3. Zusatz.

In dem einzelnen Fall, wenn $n = 1$ wäre, erhielte man aus (2. Zus.) diese Werthe:

$$x = \frac{fz^2 - a}{b - gz^2}; \quad dx = \frac{2(bf - ag)z\,dz}{(b - gz^2)^2};$$

$\sqrt{(a}$

$$\sqrt{(a+bx)}=\frac{z\sqrt{(bf-ag)}}{\sqrt{(b-gz^2)}};\ \sqrt{(f+gx)}=\frac{\sqrt{(bf-ag)}}{\sqrt{(b-gz^2)}};$$

$$\text{für } z=\frac{\sqrt{(a+bx)}}{\sqrt{(f+gx)}}=\frac{\sqrt{(a+bx)(f+gx)}}{f+gx}.$$

Wird demnach ein Verschwindungs-Quotient $dy=Xdx$ vorgelegt, welcher ausser rationalen Functionen von x zwo wie immer durch die Addition, Subtraction, Multiplication, und Division damit verbundene irrationale Functionen $\sqrt{(a+bx)}$, $\sqrt{(f+gx)}$ enthalten mag; so kann man denselben Verschwindungs-Quotienten durch die angeführten Werthe von x, dx, $\sqrt{(a+bx}$, $\sqrt{(f+gx)}$ in einen andern verwandeln, welcher sich nach (50. oder 51. §.) wird integriren lassen.

Beyspiel.

$$\text{Für } dy=\frac{dx}{\sqrt{(2+x)}+\sqrt{(1-2x)}}$$

könnte seyn $\sqrt{(a+bx)}=\sqrt{(2+x)}$; $\sqrt{(f+gx)}=\sqrt{(1-2x)}$,

daher $dy=\frac{2zdz}{(z+1)\sqrt{(1+2z^2)^3}}$ für $z=\frac{\sqrt{(2+x)}}{\sqrt{(1-2x)}}$.

Und diesen Verschwindungs-Quotienten könnte man ferner nach (50. §. 1.) für u statt des dortigen z, wie folgt verwandeln.

$$dy=\frac{4\sqrt{2}.u(u^2-1)du}{(u^2+2u\sqrt{2}-1)(u^2+1)^2} \text{ für } u=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{(2+x)}}{\sqrt{(1-2x)}}.$$

Daß man nun das Integral y für diesen Verschwindungs-Quotienten nach der vorhergehenden Theorie vollständig bestimmen kann, ist einleuchtend.

Anmerkung.

Indessen muß man merken, daß dergleichen Verwandlungen nicht eher vorgenommen werden, als wenn man erfährt, daß man das verlangte Integral auf einem bequemern Wege nicht bestimmen kann. Hätte man z. B. $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}$ gehabt; so würde man leicht eingesehen haben, daß dieser Verschwindungs-Quotient unter eine vortheilhaftere Gestalt gebracht wird, wenn man seinen Zähler und Nenner mit $\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}$ multiplicirt; denn es wird seyn

$$dy = \frac{dx\sqrt{(1+x)}}{2x} - \frac{dx\sqrt{(1-x)}}{2x}.$$

Und nun läßt sich das damit zusammenhängende Integral

$$y = \int \frac{dx\sqrt{(1+x)}}{2x} - \int \frac{dx\sqrt{(1-x)}}{2x},$$

nach (41. §. 3. Zus. n. 3.) vollständig bestimmen: es wird nämlich seyn:

$$y = \frac{2\sqrt{(1+x)}}{2} - \frac{1}{2} l \frac{1+\sqrt{(1+x)}}{x} - \frac{2\sqrt{(1-x)}}{2} + \frac{1}{2} l \frac{1+\sqrt{(1-x)}}{x}$$

$$= \sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)} + \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1+x)}} + C.$$

53. §. Aufgabe.

Ein Verschwindungs-Quotient $dy = X dx$ enthält die irrationale Function $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$; ausser ihr befindet sich doch keine irrationale Function von x bey X; sie selbst aber mag bey X mit rationalen Functionen von x wie immer verbunden seyn, in der Bedeutung (50. §.); man soll das damit zusammenhängende Integral y bestimmen.

Auflösung. 1) Um einen solchen Verschwindungs-Quotienten unter eine rationale Form zu bringen, und ihn sodann nach der vorhergehenden Theorie integriren zu können, muß man auch hier, so wie in (50. §.), zween Fälle in Erwägung ziehen, nämlich für ein bejahtes und für ein verneintes γ, wodurch die unmöglichen Grössen vermieden werden.

2) Ist nun γ wirklich bejaht, so setze man

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = z - x\sqrt{\gamma},$$

und auf diese Art erhält man folgende Verwandlungen in I).

3) Ist aber γ verneint, also $-\gamma$ statt γ, so ist für $x - \frac{\beta}{2\gamma} = u$ nach (36. §.)

$$x = u + \frac{\beta}{2\gamma},\quad dx = du,$$

und $\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)} = \sqrt{\left(\frac{\beta^2+4\alpha\gamma}{4\gamma} - \gamma u^2\right)}$.

4) Drückt man nun die Grössen u, du und $\sqrt{\left(\frac{\beta^2+4\alpha\gamma}{4\gamma} - \gamma u^2\right)}$ in (n. 3.) durch z aus nach (50. §. II.),

so findet man nachstehende Verwandlungen in II), allwo für $-\alpha$ statt α und $\beta^2 < 4\alpha\gamma$ die Grösse $\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}$ unmöglich seyn muß, weil auch der vorgelegte Verschwindungs-Quotient für $\beta^2 < 4\alpha\gamma$ bey $\sqrt{(-\alpha+\beta x-\gamma x^2)}$ unmöglich ist.

I) Für ein bejahtes γ.

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \frac{\alpha\sqrt{\gamma}+\beta z+z^2\sqrt{\gamma}}{\beta+2z\sqrt{\gamma}},$$

$$x = \frac{z^2-\alpha}{\beta+2z\sqrt{\gamma}},\quad dx = \frac{2dz(\alpha\sqrt{\gamma}+\beta z+z^2\sqrt{\gamma})}{(\beta+2z\sqrt{\gamma})^2},$$

und $z = x\sqrt{\gamma}+\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$.

II) Für ein verneintes γ.

$$\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)} = \frac{z\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{(1+z^2)\sqrt{\gamma}},$$

$$x = \frac{\beta(1+z^2)+(1-z^2)\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\gamma(1+z^2)},$$

$$dx = -\frac{2zdz\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{\gamma(1+z^2)^2},$$

$$\text{und } z = \frac{2\sqrt{\gamma}.\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}}{\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}-\beta+2\gamma x}.$$

Auf diese Art wird es also in jedem Fall möglich seyn, den Verschwindungs-Quotienten $dy = X\,dx$ unter eine rationale Form zu bringen, und darauf nach der vorhergehenden Theorie zu integriren.

Anmer-

Anmerkung.

Gewöhnlich braucht man zu dieser Absicht die Factoren, in welche die Function $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ zerlegt wird: bekanntlich werden sie durch die Auflösung der quadratischen Gleichung $\alpha+\beta x+\gamma x^2=0$ bestimmt, und wenn man sie $a+bx$, $f+gx$ nennt; so wird seyn:

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}=\sqrt{(a+bx)(f+gx)}.$$

Nun sey $(a+bx)(f+gx)=(a+bx)^2.z^2$; so ist

$$x=\frac{f-az^2}{bz^2-g};\quad dx=\frac{2(ag-bf)z\,dz}{(bz^2-g)^2};$$

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}=-\frac{(ag-bf)z}{bz^2-g};\quad z=\sqrt{\frac{f+gx}{a+bx}}.$$

Ueberdem kann man sich noch folgende Verwandlung merken, welche dienen soll, die unmöglichen Factoren zu vermeiden, die man durch die Auflösung der Gleichung $\alpha+\beta x+\gamma x^2=0$ erhalten möchte. Sey nämlich:

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}=\sqrt{(a^2-2abx\,\mathrm{Cos}\varphi+b^2x^2)},$$

und $a^2-2abx\,\mathrm{Cos}\varphi+b^2x^2=(bx-az)^2$; so ist

$$x=\frac{a(1-z^2)}{2b(\mathrm{Cos}\varphi-z)};\quad dx=\frac{a(1-2z\,\mathrm{Cos}\varphi+z^2)dz}{2b(\mathrm{Cos}\varphi-z)^2};$$

$$\sqrt{(a^2-2abx\,\mathrm{Cos}\varphi+b^2x^2)}=\frac{a(1-2z\,\mathrm{Cos}\varphi+z^2)}{2(\mathrm{Cos}\varphi-z)},$$

$$\text{für } z=\frac{bx-\sqrt{(a^2-2abx\,\mathrm{Cos}\varphi+b^2x^2)}}{a}.$$

54. §. Aufgabe.

Es ist ein Verschwindungs-Quotient $dy = X\,dx$ vorgelegt worden, welcher nur einfache irrationale Functionen von der Form $\sqrt[m]{x^n}$ bey x enthält, die übrigens mit was immer für Exponenten versehen, und sowohl unter einander als mit rationalen Functionen von x verbunden seyn mögen; man soll das damit zusammenhängende Integral y bestimmen.

Auflösung. Man bringe alle irrationale Functionen auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten; etwa auf μ, und setze hierauf $\sqrt[m]{x} = z$.

Beyspiel.

Sey $dy = \dfrac{(a+\sqrt[3]{x^2})\,dx}{\sqrt{x}-x}$

Es ist $dy = \dfrac{(a+\sqrt[6]{x^4})\,dx}{\sqrt[6]{x^3}-x}$. Nun sey $\sqrt[6]{x} = z$;

so ist $\sqrt[6]{x^4} = z^4$; $\sqrt[6]{x^3} = z^3$; $x = z^6$; $dx = 6z^5\,dz$

$$dy = \frac{(a+z^4).6z^5\,dz}{z^3-z^6} = \frac{6(az^2+z^6)\,dz}{1-z^3}.$$

55. §. Aufgabe.

Es sind Z, Y was immer für Functionen von einer veränderlichen Grösse x; man soll bestimmen, wie das Integral $\int Z\,Y\,dx$ von den Verschwindungs-Quotienten abhängt, welche die Function Z geben mag.

Auflö-

Auflösung. 1) Es giebt zween merkwürdigste Fälle, das Integral $\int ZY dx$ durch die Verschwindungs-Quotienten, welche der Function Z zugehören mögen, auszudrücken: der erste Fall ist, wenn man es durch die der Function Z zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dZ, d^2Z, d^3Z u. s. f. bestimmet (15. §.); der zweyte Fall aber ist, wenn man statt dieser Verschwindungs-Quotienten diejenigen nimmt, welche durch den ersten Verschwindungs-Quotienten dZ dergestalt bestimmt werden, daß jeder darauf folgende Verschwindungs-Quotient nichts anders ist, als der Verschwindungs-Quotient, welcher den nächst vorhergehenden mit der veränderlichen Grösse x multiplicirten Verschwindungs-Quotienten als einer Function von x zugehört.

2) Dem zufolge nehme man an, es sey

$$\int Y^2 dx = \int dx \int Y dx; \int Y^3 dx = \int dx \int Y^2 dx;$$
$$\int Y^4 dx = \int dx \int Y^3 dx \text{ u. s. f.}$$

Wenn man nämlich das Integral $\int Y dx$ hat; so multiplicirt man es mit dx, und sucht aufs neue das Integral $\int dx \int Y dx$, welches mit dem Verschwindungs-Quotienten $dx : \int Y dx$ zusammenhängt, und eben dasselbe Integral bedeutet $\int Y^2 dx$; multiplicirt man auch dieses mit dx; so kann man auch $dx : \int Y^2 dx$ als einen Verschwindungs-Quotienten betrachten, und das damit zusammenhängende Integral soll $\int Y^3 dx$ anzeigen, u. s. f. Und nun rechnet man nach (38. §.) mit Zuziehung (14. §. 2. Zus.) auf diese Art.

$$\int Z Y dx = Z\int Y dx - \int dZ \int Y dx = Z\int Y dx - \int \frac{dZ}{dx} dx \int Y dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int dx \int Y dx + \int d.\frac{dZ}{dx}\int dx \int Y dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \int \frac{d^2Z}{dx}\int Y^2 dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \int \frac{d^2Z}{dx^2} dx \int Y^2 dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \frac{d^2Z}{dx^2}\int dx \int Y^2 dx$$

$$- \int d.\frac{d^2Z}{dx^2}\int dx \int Y^2 dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \frac{d^2Z}{dx^2}\int Y^3 dx - \int \frac{d^3Z}{dx^2}\int Y^3 dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \frac{d^2Z}{dx^2}\int Y^3 dx - \int \frac{d^3Z}{dx^3} dx \int Y^3 dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \frac{d^2Z}{dx^2}\int Y^3 dx - \frac{d^3Z}{dx^3}\int dx \int Y^3 dx$$

$$+ \int d.\frac{d^3z}{dx^3}\int dx \int Y^3 dx$$

$$= Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \frac{d^2Z}{dx^2}\int Y^3 dx - \frac{d^3Z}{dx^3}\int Y^4 dx$$

$$+ \int \frac{d^4Z}{dx^3}\int Y^4 dx$$

u. s. f.

Daher überhaupt, wie es sich leicht zeigen läßt:

$$\int Z Y dx = Z\int Y dx - \frac{dZ}{dx}\int Y^2 dx + \frac{d^2Z}{dx^2}\int Y^3 dx - \frac{d^3Z}{dx^3}\int Y^4 dx$$

$$+ \cdots \pm \frac{d^rZ}{dx^r}\int Y^{r+1} dx \mp \frac{d^{r+1}Z}{dx^{r+1}}\int Y^{r+2} dx.$$

3) Eine

3) Eine andere Reihe wird man erhalten, wenn man ebenfalls aus Y und Z verschiedene Integralien und Verschwindungs-Quotienten, aber auf eine andere Art, ableitet. Wenn $\int Y\,dx$ bekannt ist; so multiplicire man es mit $\frac{dx}{x}$, und suche hierauf das Integral $\int\frac{dx}{x}\int Y\,dx$, welches mit $\frac{dx}{x}\int Y\,dx$ als mit einem für sich bestehenden Verschwindungs-Quotienten zusammenhängt: ein solches Integral soll aber in der Folge mit $\int^{I} Y\,dx$ bezeichnet werden. Multiplicirt man dieses mit $\frac{dx}{x}$, und sucht man hernach das Integral $\int\frac{dx}{x}\int^{I} Y\,dx$; so soll dieses $\int^{II} Y\,dx$ heissen, u. s. f. wie unten in II) deutlich gezeigt wird. Ferner sucht man dZ aus Z, und wenn $dZ=Adx$ ist; so nimmt man Ax statt A, sodann sucht man $dAx=Bdx$; alsdann nimmt man Bx statt B, und sucht $dBx=Cdx$, u. s. f., wie dieses unten in III) gezeigt wird.

II) $\int Y dx$; $\int^{I} Y dx=\int\frac{dx}{x}\int Y dx$; $\int^{II} Y dx=\int\frac{dx}{x}\int^{I} Y dx$;

$$\int^{III} Y\,dx=\int\frac{dx}{x}\int^{II} Y\,dx.$$

und überhaupt $\int^{N} Y dx=\int\frac{dx}{x}\int^{N-I} Y\,dx.$

III) $dZ=Adx$; $dAx=Bdx$; $dBx=Cdx$; $dCx=Ddx$ u. s. f.

Nun rechne man nach (38. §.), wie folgt:

$\int ZYdx$

$$\int ZY\,dx = Z\int Y\,dx - \int dZ \int Y\,dx = Z\int Y\,dx - \int A\,dx \int Y\,dx$$

$$= Z\int Y\,dx - \int Ax\frac{dx}{x}\int Y\,dx = Z\int Y\,dx - Ax\int\frac{dx}{x}\int Y\,dx$$

$$+ \int dAx \int\frac{dx}{x}\int Y\,dx$$

$$= Z\int Y\,dx - Ax\int^{I} Y\,dx + \int B\,dx \int^{I} Y\,dx = Z\int Y\,dx$$

$$- Ax\int^{I} Y\,dx + \int Bx\frac{dx}{x}\int^{I} Y\,dx$$

$$= Z\int Y\,dx - Ax\int^{I} Y\,dx + Bx\int\frac{dx}{x}\int^{I} Y\,dx$$

$$- \int dBx\int\frac{dx}{x}\int^{I} Y\,dx$$

$$= Z\int Y\,dx - Ax\int^{I} Y\,dx + Bx\int^{II} Y\,dx - \int Cx\int^{II} Y\,dx$$

$$= Z\int Y\,dx - Ax\int^{I} Y\,dx + Bx\int^{II} Y\,dx - \int Cx\frac{dx}{x}\int^{II} Y\,dx$$

$$= Z\int Y\,dx - Ax\int^{I} Y\,dx + Bx\int^{II} Y\,dx - Cx\int\frac{dx}{x}\int^{II} Y\,dx$$

$$+ \int dCx\int\frac{dx}{x}\int^{II} Y\,dx$$

$$= Z\int Y\,dx - Ax\int^{I} Y\,dx + Bx\int^{II} Y\,dx - Cx\int^{III} Y\,dx$$

$$+ \int Dd x \int^{III} Y\,dx$$

u. s. f.

Daher

IV) $$\int ZY\,dx = Z\int Y\,dx - Ax\int^{I} Y\,dx + Bx\int^{II} Y\,dx - Cx\int^{III} Y\,dx$$

$$+ Dx\int^{IV} Y\,dx - Ex\int^{V} Y\,dx + \ldots\ldots$$

$$\pm Px\int^{N} Y\,dx \mp \int\frac{Qx\,dx}{x}\int^{N} Y\,dx, \text{ wobey}$$

$$Q\,dx = dP\,x \text{ ist.}$$

1. Zu-

1. Zusatz.

Die Reihe I) bricht nur alsdann ab, wenn die Function z von der Beschaffenheit ist, daß ein gewisser, ihr zugehöriger, Verschwindungs-Quotient d^rZ gleich Null werden muß, in der Bedeutung (14. §. 3. Zus.): und die Reihe IV) bricht nur in dem Falle ab, wenn einer von den Verschwindungs-Quotienten III) gleich Null wird. In allen andern Fällen laufen die Reihen I) IV) ohne Ende fort, mithin können dieselben zur genauen Bestimmung des Integrals $\int Z Y dx$ in diesen Fällen nicht dienen.

2. Zusatz.

Setzt man $Y = x^0$; so ist $\int Y dx = x$; $\int Y^2 dx = \frac{1}{2} x^2$; $\int Y^3 dx = \frac{1}{2.3} x^3$; und überhaupt $\int Y^r = \frac{1}{2.3.4 \cdots r} x^r$.

Für $Y = x^0 = 1$ giebt also die erste Reihe die folgende bekannte **Bernoullische Reihe.**

$$\int Z dx = xZ - \frac{x^2 dZ}{2.dx} + \frac{x^3 d^2Z}{2.3.dx^2} - \frac{x^4 d^3Z}{2.3.4.dx^3} + \cdots$$

3. Zusatz.

Für $Z = (lx)^n$ wäre in der Bedeutung III) $dZ = \frac{n(lx)^{n-1}dx}{x}$;

$xA = n(lx)^{n-1}$; $dAx = \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}dx}{x} = B dx$;

$dBx = \frac{n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3}dx}{x} = C dx$ u. s. f.:

dafür würde man also aus der Reihe IV) folgende finden.

1) $\int Y$

$$1)\ \int Y(lx)^n dx = (lx)^n \int Y dx - n(lx)^{n-1} \overset{I}{\int} Y dx + n(n-1)(lx)^{n-2} \overset{II}{\int} Y dx - n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3} \overset{III}{\int} Y dx + \ldots \pm n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(lx)^{n-r} \int Y^r dx.$$

Wäre demnach Y eine solche Function von x, für welche man die Integralien $\int Y dx$; $\overset{I}{\int} Y dx$; $\overset{II}{\int} Y dx$ u. s. f. in der Bedeutung II) bestimmen könnte; so würde man das Integral $\int Y (lx)^n dx$ wenigstens durch eine ohne Ende fortlaufende Reihe ausdrücken können, wovon alle Glieder vollkommen bestimmt seyn würden. Und wenn überdem n eine ganze bejahte Zahl wäre; so müßte diese Reihe nicht ohne Ende fortlaufen, sondern für $r = n+1$ abbrechen: für eine ganze bejahte Zahl n hätte man nämlich:

$$2)\ \int Y(lx)^n dx = (lx)^n \int Y dx - n(lx)^{n-1} \overset{I}{\int} Y dx + n(n-1)(lx)^{n-2} \overset{II}{\int} Y dx - n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3} \overset{III}{\int} Y dx + \ldots \pm n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1 \int Y^n dx + C.$$

3. Zusatz.

Setzt man $Y = x^m$; so ist in der obigen Bedeutung II)

$$\int Y dx = \frac{x^{m+1}}{m+1};\quad \overset{I}{\int} Y dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2};\quad \overset{II}{\int} Y dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3} \ldots$$

$$\int Y^n dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{n+1}}:$$ also ist wegen (2. Zus. n. 2.)

$\int x^m$

$$\int x^m (lx)^n dx = x^{m+1}\left(\frac{(lx)^n}{m+1} - \frac{n(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3}}{(m+1)^4} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(m+1)^{n+1}}\right) + C.$$

4. Zusatz.

Die Reihe in (3. Zus.) gilt für jede Zahl m, nur nicht für $m = -1$, wofür dieselbe nichts brauchbares giebt; für $m = -1$ findet man aber $\int \frac{(lx)^n dx}{x}$ sehr leicht auf diese Art. Wenn man $lx = u$ setzt; so ist $\frac{dx}{x} = du$, mithin

$$\int \frac{(lx)^n dx}{x} = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

5. Zusatz.

Setzt man ferner $Z = x^{m+1}$ und $Y = \frac{1}{x(lx)^n} = \frac{1}{x}(lx)^{-n}$; so findet man, wie in (4. Zus.), in der obigen Bedeutung II)

$$\int Y dx = \frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}; \quad \int^{I} Y dx = \frac{1}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}};$$

$$\int^{II} Y dx = \frac{-1}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}}; \text{ u. s. f. Und in der}$$

obigen Bedeutung III) wird seyn; $dZ = (m+1)x^m dx = A dx$; $dAx = (m+1)^2 x^m dx = B dx$; $dBx = (m+1)^3 x^m dx = C dx$ u. s. f. Und für diese Werthe erhält man aus der obigen Reihe IV) folgendes Integral:

$$\int x^m$$

$$\int\frac{x^m dx}{(lx)^n} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$
$$- \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots - \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3.2.1}\int\frac{x^m dx}{lx}$$

Es ist aber kein Kunstgriff bekannt, das Integral $\int\frac{x^m dx}{lx}$ zu bestimmen. Setzt man $x^{m+1}=z$; so ist $(m+1)lx=lz$, $lx=\frac{lz}{m+1}$, und $(m+1)x^m dx=dz$, mithin $x^m dx=\frac{dz}{m+1}$: also $\frac{x^m dx}{lx}=\frac{dz}{lz}$. Zur vollkommensten Bestimmung des Integrals $\int\frac{x^m dx}{(lx)^n}$ wäre demnach nothwendig, daß man $\frac{dz}{lz}$ zu integriren wüßte.

6. Zusatz.

Aus (17. §. 8. Zus.) folgt $d.a^x=a^x dx la$, also ist auch $\int a^x dx=\frac{a^x}{la}$ (24. §. und 3. Zus.). Für $Y=a^x$ wäre demnach in der obigen Bedeutung

$$\int Y dx=\frac{a^x}{la};\ \int^2 Y dx=\frac{a^x}{(la)^2};\ \int^3 Y dx=\frac{a^x}{(la)^3};\ \text{u. s. f.}$$

und für diese Werthe erhielte man aus der obigen Reihe 1) folgendes Integral:

$$\int a^x Z dx = \frac{a^x Z}{la} - \frac{dZ}{dx}\cdot\frac{a^x}{(la)^2} + \frac{d^2Z}{dx^2}\cdot\frac{a^x}{(la)^3} - \frac{d^3Z}{dx^3}\cdot\frac{a^x}{(la)^4} + \cdots\cdots$$

Dieses

Dieses Integral wird man also nur alsdann vollständig angeben können, wenn es für die Function Z einen Verschwindungs-Quotienten $d^rZ = o$ giebt.

7. Zusatz.

Oder sey $Z = a^x$; so ist nach (15. §. und 17. §. 8. Zus.) $dZ = a^x dx la$; $d^2Z = a^x dx^2 (la)^2$; $d^3Z = a^x dx^3 (la)^3$ u. s. f. die obige Reihe I) giebt dafür folgendes Integral.

$$\int a^x Y dx = a^x \int Y dx - a^x la \int Y^2 dx + a^x (la)^2 \int Y^3 dx$$
$$- a^x (la)^3 \int Y^4 dx + \ldots \pm (la)^r \int a^x dx \int Y^r dx.$$

Und dieses Integral wird alsdann brauchbar seyn, wenn man im Stande seyn wird, die Integralien $\int Y dx$, $\int Y^2 dx$, $\int Y^3 dx$ u. s. f. zu bestimmen.

8. Zusatz.

Für $Z = x^n$ erhält man aus (6. Zus.) folgendes Integral, welches für jede ganze bejahte Zahl n vollständig erhalten wird.

$$\int a^x x^n dx = a^x \left(\frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(la)^3} \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{(la)^4} + \ldots \right) + C.$$

9. Zusatz.

Und aus (7. Zus.) findet man für $Y = \frac{1}{x^m}$, wobey m was immer für eine ganze bejahte Zahl seyn mag, folgendes Integral:

$$\frac{a^x dx}{x^m} = a^x \left(\frac{-1}{(m-1)x^{m-1}} \cdot \frac{-la}{(m-1)(m-2)x^{m-2}} \right.$$

$$\left. \frac{-(la)^2}{(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-3}} \cdots \frac{-(la)^{m-2}}{(m-1)(m-2)\cdots 3.2.1.x} \right.$$

$$\left. \frac{+(la)^{m-1}}{(m-1)(m-2)(m-3)\cdots 3.2.1.} \int \frac{a^x dx}{x} \right) + C.$$

56. §. Aufgabe.

Verschwindungs-Quotienten von der Form $dy = X dx \operatorname{Arc Sin} x$; $dy = X dx \operatorname{Arc Cos} x$; $dy = X dx \operatorname{Arc Tang} x$, **zu integriren.**

Auflösung. Nach (38. §. und 22. §. nebst 2. 3. Zus.) erhält man dafür folgende Integralien.

1) $\int X dx \operatorname{Arc Sin} x = \operatorname{Arc Sin} x \int X dx - \int \frac{dx \int X dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

2) $\int X dx \operatorname{Arc Cos} x = \operatorname{Arc Cos} x \int X dx + \int \frac{dx \int X dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

3) $\int X dx \operatorname{Arc Tang} x = \operatorname{Arc Tang} x \int X dx - \int \frac{dx \int X dx}{1+x^2}$.

1. Zusatz.

Sey m was immer für eine bejahte oder verneinte ganze Zahl, nur nicht $m = -1$; so ist $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$: setzt man also $X = x^m$; so erhält man aus 1) 2) 3) folgende Integralien:

$$\int x^m dx \operatorname{Arc Sin} x = \frac{x^{m+1} \operatorname{Arc Sin} x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

$\int x^m dx$

$$\int x^m dx \operatorname{ArcCos} x = \frac{x^{m+1} \operatorname{ArcCos} x}{m+1} + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

$$\int x^m dx \operatorname{ArcTang} x = \frac{x^{m+1} \operatorname{ArcTang} x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2};$$

Diese Integralien lassen sich demnach für alle ganze Zahlen m nach der vorhergehenden Theorie bestimmen: nämlich allemal entweder nach (33. §. 1. Zus.), oder nach (40. §. 1. 4. 5. Zus.).

2. Zusatz.

Weil ferner die Integralien $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)^\mu}}$; $\int \frac{x^m dx}{(1+x^2)^\mu}$ sich ebenfalls für alle bejahte und verneinte ganze Zahlen m, μ nach der vorhergehenden Theorie bestimmen lassen; so wird man die Integralien 1) 2) bey der Auflösung der vorigen Aufgabe auch für die Function $X = \frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)^\mu}}$, und das dortige Integral 3) wird man für $X = \frac{x^m}{(1+x^2)^\mu}$ allemal bestimmen können.

57. §. Aufgabe.

Diejenigen Verschwindungs-Quotienten zu integriren, welche durch den Verschwindungs-Quotienten $d\varphi$ eines Kreisbogens φ und die Potenzen von Sin φ, Cos φ, Tang φ, Cot φ bestimmt seyn mögen.

Auflösung. Es wird hier eine allgemeine Integrirungsmethode verlangt, welche darinn bestehen soll, daß

man jeden Verschwindungs-Quotienten, der $d\varphi$ und Potenzen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\tang\varphi$, $\cot\varphi$ enthält, unter die Form einer algebraischen Function von irgend einer veränderlichen Grösse x bringe, hernach mit Hülfe der vorhergehenden Theorie zu integriren suche. Daß nun jenes allemal geschehen kann, erhellet auf diese Art.

1) Erstlich kann man $\sin\varphi$, oder $\cos\varphi$, oder $\tang\varphi$, oder $\cot\varphi$ mit einem Buchstaben x bezeichnen, und als eine absolute veränderliche Grösse betrachten: hat man aber irgend eine trigonometrische Linie $=x$ gesetzt; so lassen sich alle übrigen Linien durch eben so viele Functionen von x ausdrücken.

2) Sodann ist gewiß, daß man $d\varphi$ aus einem vorgelegten Verschwindungs-Quotienten allemal wegschaffen, und statt dessen $d\sin\varphi$, oder $d\cos\varphi$, oder $d\tang\varphi$, oder $d\cot\varphi$ einführen kann, nämlich mit Hülfe der folgenden Formuln 1) 2) 3) 4), derer Richtigkeit aus (22. §. 3. 8. 10. Zus.) erhellet.

3) Auf diese Art (n. 1. 2.) wird also jeder Verschwindungs-Quotient, welcher durch $d\varphi$ und Potenzen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\tang\varphi$, $\cot\varphi$ bestimmt seyn mag, unter die Form eines solchen Verschwindungs-Quotienten gebracht werden können, welcher mit einer algebraischen Function von irgend einer veränderlichen Grösse x zusammen zu hängen scheint, der sich daher nach der vorhergehenden Theorie integriren lassen soll.

1) $d\varphi$

1) $d\varphi = \frac{d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cof}\,\varphi}$. 2) $d\varphi = \frac{-d\,\mathrm{Cof}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$.

3) $d\varphi = \mathrm{Cof}\varphi^2 d\mathrm{T}\varphi$. 4) $d\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi^2 d\mathrm{Cot}\,\varphi$.

1. Zusatz.

Nach dieser Anleitung findet man sehr leicht folgende Integralien:

1) $\int d\varphi\,\mathrm{Cof}\varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi$.

2) $\int d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi = -\mathrm{Cof}\varphi$.

3) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\mathrm{Cof}\varphi}{1+\mathrm{Cof}\varphi} = \log\mathrm{Tang}\frac{1}{2}\varphi$.

4) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cof}\,\varphi} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\mathrm{Sin}\,\varphi}{1-\mathrm{Sin}\varphi} = \log\mathrm{Tang}(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)$.

5) $\int \frac{d\varphi\,\mathrm{Cof}\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \log\mathrm{Sin}\,\varphi$.

6) $\int \frac{d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cof}\varphi} = -\log\mathrm{Cof}\varphi = \log\mathrm{Sec}\,\varphi$.

7) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cof}\varphi} = \log\mathrm{Tang}\,\varphi$.

8) $\int d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cof}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\varphi^2$.

Denn es ist $\int d\varphi\,\mathrm{Cof}\varphi = \int d\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, und $\int d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi = -\int d\,\mathrm{Cof}\varphi$, woraus für $\mathrm{Sin}\,\varphi = x$, $\mathrm{Cof}\varphi = z$ folgt $\int d\varphi\,\mathrm{Cof}\varphi = \int dx = x = \mathrm{Sin}\varphi$, und $\int d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi = -\int dz = -z = -\mathrm{Cof}\,\varphi$, wie oben in 1) 2).

Ferner ist $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \int \frac{d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = \int \frac{-d\mathrm{Cof}\,\varphi}{1-\mathrm{Cof}\varphi^2}$, mithin für $\mathrm{Cof}\varphi = x$ ist $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = -\int \frac{dx}{1-x^2}$, und

dadurch findet man nach (34. §.) nebst (I. B. 156. §. 7. Zus. III. Form.) das obige Integral 3).

Sodann ist $\int \frac{d\varphi}{Col\,\varphi} = \int \frac{d\varphi\, Col\,\varphi}{Col\,\varphi^2} = \int \frac{d\,Sin\,\varphi}{1-Sin\,\varphi^2}$, welches für $Sin\,\varphi = x$ giebt $\int \frac{d\varphi}{Col\,\varphi} = \int \frac{dx}{1-x^2}$, und hiedurch findet man nach (34. §.) und (I. B. 156. §. 7. Zus. XII. XIII.) das Integral 4).

Ferner ist $\int \frac{d\varphi\, Col\,\varphi}{Sin\,\varphi} = \int \frac{d\,Sin\,\varphi}{Sin\,\varphi} = \int \frac{dx}{x}$ für $x = Sin\,\varphi$, welches das obige Integral 5) giebt: eben so ist $\int \frac{d\varphi\, Sin\,\varphi}{Col\,\varphi} = \int \frac{-d\,Col\,\varphi}{Col\,\varphi} = \int \frac{-dx}{x}$ für $Col\,\varphi = x$, woraus das obige Integral 6) folgt. Und nun ist

$$\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi\, Col\,\varphi} = \int \left(\frac{d\varphi\, Col\,\varphi}{Sin\,\varphi} + \frac{d\varphi\, Sin\,\varphi}{Col\,\varphi} \right) = log\, Sin\,\varphi - log\, Col\,\varphi = log \frac{Sin\,\varphi}{Col\,\varphi} = log\, Tang\,\varphi,$$

wie oben in 7).

Endlich ist $\int d\varphi\, Sin\,\varphi\, Col\,\varphi = \int Sin\,\varphi\, d\,Sin\,\varphi = \int x dx$ für $Sin\,\varphi = x$, woraus das obige Integral 8) folgt.

2. Zusatz.

Es ist $\int d\varphi\, Sin\varphi^n = \int \frac{d\varphi Sin\varphi^n Col\varphi}{Col\varphi} = \int \frac{Sin\varphi^n d Sin\varphi}{Col\varphi}$, woraus nachstehendes Integral 1) folgt. Ferner ist $\int d\varphi\, Col\,\varphi^m = \int \frac{d\varphi Col\varphi^m Sin\varphi}{Sin\,\varphi} = -\int \frac{Col\,\varphi^m d Col\varphi}{Sin\,\varphi}$, und dieses giebt folgendes Integral 2). Sodann ist

$\int d\varphi$

$\int d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^n \operatorname{Cof}\varphi^m = \int d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^n \operatorname{Cof}\varphi^{m-1}, \operatorname{Cof}\varphi = \int \operatorname{Sin}\varphi^n \operatorname{Cof}\varphi^{m-1} d\operatorname{Sin}\varphi$, und dieſes giebt nachſtehendes Integral 3), woraus für $-m$ ſtatt m, oder $-n$ ſtatt n, oder $-m$ und $-n$ ſtatt m und n nachſtehende Integralien 4) 5) 6) folgen.

1) $\int d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ für $x = \operatorname{Sin}\varphi$ und $\sqrt{(1-x^2)} = \operatorname{Cof}\varphi$.

2) $\int d\varphi \operatorname{Cof}\varphi^m = -\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ für $x = \operatorname{Cof}\varphi$ und $\sqrt{(1-x^2)} = \operatorname{Sin}\varphi$.

3) $\int d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^n \operatorname{Cof}\varphi^m = \int x^n dx \sqrt{(1-x^2)^{m-1}}$

4) $\int \frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^n}{\operatorname{Cof}\varphi^m} = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)^{m+1}}}$.

5) $\int \frac{d\varphi \operatorname{Cof}\varphi^m}{\operatorname{Sin}\varphi^n} = \int \frac{dx \sqrt{(1-x^2)^{m-1}}}{x^n}$.

6) $\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^n \operatorname{Cof}\varphi^m} = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{(1-x^2)^{m+1}}}$.

für $x = \operatorname{Sin}\varphi$ und $\sqrt{(1-x^2)} = \operatorname{Cof}\varphi$.

Und dieſe Integralien ſind für alle ganze bejahte Zahlen m, n bey der vorhergehenden Theorie vollkommen beſtimmt worden. Sind n und m gerade Zahlen; ſo erhält man die Integralien 1) 2) nach (40. §. 4. Zuſ. I Form.); das Integral 3) iſt in (40. §. 2. Zuſ.) beſtimmt; das Integral 4) in (40. §. 4. Zuſ.); das Integral 5) in (40. §. 3. Zuſ.) und das Integral 6) in (33. §. 1. Zuſ.). Sind aber n, m ungerade Zahlen; ſo erhält man die Integralien (1. 2. 3. 4.) alle nach (33. §. 1 Zuſ.); das Integral 5) wird nach (26. §. 3. 4. Zuſ.), und 6) nach (33. §. 1. Zuſ.) gefunden u. ſ. f.

Beyſpiele.

Man ſoll $dy = d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^4$ beſtimmen.

Es iſt $dy = \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nach 1):

alſo $y = -\frac{1}{4}x^3\sqrt{(1-x^2)} - \frac{1.3}{2.4}x\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{Arc Sin} x$

(40. §. 4. Zuſ.)

$= -\frac{1}{4}\operatorname{Sin}\varphi^3\operatorname{Cof}\varphi - \frac{1.3}{2.4}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cof}\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi$

wegen 1).

Man ſoll $dy = d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^3$ beſtimmen.

Es iſt $dy = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nach 1):

alſo $y = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{(1-x^2)} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)}$ nach

(33. §. 1. Zuſ.)

$= -\frac{1}{3}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Cof}\varphi - \frac{2}{3}\operatorname{Cof}\varphi.$

Man ſoll $dy = d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Cof}\varphi^2$ beſtimmen.

Es iſt $y = \int x^2 dx\sqrt{(1-x^2)}$ nach 3):

alſo $y = -\frac{1}{4}x\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{8}x\sqrt{(1-x^2)}$

$+ \frac{1}{8}\operatorname{Arc Tang}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (40. §. 2. Zuſ.).

$= -\frac{1}{4}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cof}\varphi^3 + \frac{1}{8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cof}\varphi + \frac{1}{8}\varphi$

wegen 3)

u. ſ. f.

3. Zusatz.

Weil φ überhaupt einen Kreisbogen bedeutete; so wird die obige Integrirungsmethode allemal gelten, es mag φ eine absolute veränderliche Grösse oder was immer für eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Grösse x seyn. Nimmt man einen vielfachen Bogen $m\varphi$ statt des einfachen φ, mithin $md\varphi$ statt $d\varphi$ (5. §. 7. Zus.); so erhält man aus (n. 1, 2.) bey der vorigen Auflösung:

1) $d\varphi = \frac{d\,\mathrm{Sin}\,m\varphi}{m\,\mathrm{Cos}\,m\varphi}$. 2) $d\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cos}\,m\varphi}{m\,\mathrm{Sin}\,m\varphi}$.

Wird demnach ein Verschwindungs-Quotient dy vorgelegt, welcher $d\varphi$ und verschiedene Potenzen von $\mathrm{Sin}\,m\varphi$, $\mathrm{Cos}\,m\varphi$ enthalten mag; so wird man $d\varphi$ aus ihm nach 1) 2) wegschaffen, hernach das Integral y auf die vorige Art aufsuchen können, indem nun $\mathrm{Sin}\,m\varphi$, $\mathrm{Cos}\,m\varphi$ das sind, was zuvor $\mathrm{Sin}\,\varphi$, $\mathrm{Cos}\,\varphi$ waren.

4. Zusatz.

Die Zusätze (1. 2.) enthielten diejenigen Verschwindungs-Quotienten, deren Integralien bey der vorhergehenden Theorie vollkommen bestimmt vorkommen; ausserdem kann man sich merken, daß jeder Verschwindungs-Quotient dy, welcher $d\varphi$ und was immer für ganze Potenzen von $\mathrm{Sin}\,\varphi$, $\mathrm{Cos}\,\varphi$, oder auch, wegen (3. Zus.), von $\mathrm{Sin}\,m\varphi$ und $\mathrm{Cos}\,m\varphi$ enthalten mag, die unter einander und mit rationalen Functionen von $\mathrm{Sin}\,\varphi$, oder $\mathrm{Cos}\,\varphi$, oder $\mathrm{Sin}\,m\varphi$, $\mathrm{Cos}\,m\varphi$ durch die Addition, Subtraction, Multiplication

und Diviſion verbunden ſeyn können, ſich unter die Form einer rationalen Function von einer veränderlichen Gröſſe x bringen läßt: weil nämlich ein ſolcher Verſchwindungs-Quotient vermöge der obigen Anleitung nur ganze Potenzen von x und $\sqrt{(1-x^2)}$ enthalten würde; ſo müßte er ſich allemal nach (50. §.) rational machen.

Beyſpiele.

Sey $dy = \frac{d\varphi \operatorname{Cof}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cof}\varphi} = \frac{d\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cof}\varphi}$.

Für $\operatorname{Sin}\varphi = x$ und $\operatorname{Cof}\varphi = \sqrt{(1-x^2)}$ wäre

$dy = \frac{dx}{x + \sqrt{(1-x^2)}}$; alſo nach (50. §.)

$dy = \frac{-4z\,dz}{(1+z^2)(1+2z-z^2)}$ für $z = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{1+x} = \frac{\operatorname{Cof}\varphi}{1+\operatorname{Sin}\varphi}$.

Sey $dy = \frac{d\varphi}{a\operatorname{Sin}\varphi + b\operatorname{Cof}\varphi^2} = \frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi}{a\operatorname{Sin}\varphi^2 + b\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cof}\varphi^2}$

$= \frac{-d\operatorname{Cof}\varphi}{a\operatorname{Sin}\varphi^2 + b\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cof}\varphi^2}$.

Für $x = \operatorname{Cof}\varphi$ und $\sqrt{(1-x^2)} = \operatorname{Sin}\varphi$ iſt

$dy = \frac{-dx}{a - ax^2 + bx\sqrt{(1-x^2)}}$; alſo nach (50. §.)

$dy = \frac{2(1+z^2)\,dz}{b + 2az - 2bz^2 + 2az^3 + bz^4}$ für $z = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{1+\operatorname{Cof}\varphi}$.

Anmerkung.

Dadurch will man indeſſen nicht ſagen, daß man ſich dieſer Verwandlungen zu bedienen hat, ſobald ein ſolcher Ver-

Verschwindungs-Quotient vorgelegt wird: überhaupt ist die Verwandlung eines irrationalen Verschwindungs-Quotienten in einen rationalen nur alsdann vorzunehmen, wenn man keinen vortheilhafteren Weg findet, das damit zusammenhängende Integral zu bestimmen, wie doch dieses auch bey trigonometrischen Verschwindungs-Quotienten wirklich geschehen kann.

58. §. Aufgabe.

Die Integralien zu bestimmen, welche mit den Verschwindungs-Quotienten $dy = \frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^m}{(a+b\operatorname{Col}\varphi)^n}$, $dy = \frac{d\varphi \operatorname{Cof}\varphi^p}{(a+b\operatorname{Cof}\varphi)^q}$ zusammenhängen.

Auflösung. Es ist

$$\frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^m}{(a+b\operatorname{Col}\varphi)^n} = \frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^m \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi(a+b\operatorname{Col}\varphi)^n} = \frac{-\operatorname{Sin}\varphi^m d\operatorname{Col}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi(a+b\operatorname{Col}\varphi)^n},$$

$$\frac{d\varphi \operatorname{Cof}\varphi^p}{(a+b\operatorname{Cof}\varphi)^q} = \frac{d\varphi\operatorname{Cof}\varphi^p \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi(a+b\operatorname{Cof}\varphi)^q} = \frac{-\operatorname{Cof}\varphi^p d\operatorname{Cof}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi(a+b\operatorname{Col}\varphi)^q}.$$

Nun sey $x = a+b\operatorname{Cof}\varphi$; $\operatorname{Cof}\varphi = \frac{x-a}{b}$; $d\operatorname{Cof}\varphi = \frac{dx}{b}$, und $\operatorname{Sin}\varphi = \sqrt{(1-\operatorname{Cof}\varphi^2)} = \frac{\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}{b}$; so ist:

1) $$\int \frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^m}{(a+b\operatorname{Col}\varphi)^n} = -\frac{1}{b^m}\int \frac{dx\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)^{m-1}}}{x^n},$$

2) $$\int \frac{d\varphi \operatorname{Cof}\varphi^p}{(a+b\operatorname{Cof}\varphi)^q} = \frac{1}{b^p}\int \frac{(x-a)^p dx}{x^q\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}},$$

1. Zusatz.

Nach der Theorie des (38. §. und Zus.) lassen sich also diese Integralien für alle bejahte und verneinte ganze Zahlen m, n, p, q vollkommen bestimmen.

2. Zusatz.

Es waren a, b unbestimmte Coefficienten; setzt man a = b; so erhält man aus 1) 2) folgende Integralien:

$$\int \frac{d\varphi \operatorname{Sin}\varphi^m}{(a+a\operatorname{Col}\varphi)^n} = -\frac{1}{a^m}\int x^{\frac{m-2n-1}{2}}\,dx\sqrt{(2a-x)^{m-1}}.$$

$$\int \frac{d\varphi \operatorname{Col}\varphi^p}{(a+a\operatorname{Col}\varphi)^q} = -\frac{1}{a^{p-1}}\int \frac{(x-a)^p\,dx}{x^{\frac{2q+1}{2}}\sqrt{(2a-x)}}.$$

Das erste Integral ist bey der vorhergehenden Theorie (26. 33. 41. §.) für alle ganze bejahte und verneinte Zahlen m, n vollkommen bestimmt worden: und das zweyte Integral ist es für jede bejahte ganze Zahl p und jede bejahte und verneinte q.

3. Zusatz.

Setzt man bey den Formuln 1) 2) der vorigen Auflösung entweder m = 0 und n = 1, oder p = 0 und q = 1; so erhält man in jedem Fall folgendes Integral:

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\operatorname{Col}\varphi} = \int \frac{-dx}{x\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}.$$

Und für a = b aus (2. Zus.).

$$\int \frac{d\varphi}{a+a\operatorname{Col}\varphi} = \int \frac{-dx}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2a-x)}}.$$

Ist

Ist nun beym ersten Integral $b > a$; so muß $b^2 - a^2$ etwas bejahtes seyn, und dafür findet man dasselbe Integral nach (37. §.): ist aber $b < a$; so ist $b^2 - a^2$ etwas verneintes, wofür man das erste Integral ebenfalls nach (37. §.) findet. Das zweyte Integral aber ergiebt sich nach (33. §. 1. Zus. II. Form.). Da also $x = a + b\,\mathrm{Cos}\varphi$ war; so findet man die beyden Integralien, wie sie in I) II) III) folgen.

I) Für $b > a$.

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\,\mathrm{Cos}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}} \cdot lg \frac{b+a\,\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi.\sqrt{(b^2-a^2)}}{a+b\,\mathrm{Cos}\varphi} + C.$$

II) Für $b < a$.

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\,\mathrm{Cos}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\,\mathrm{Arc\,Tang}\,\frac{\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}{b+a\,\mathrm{Cos}\varphi} + C.$$

III) $$\int \frac{d\varphi}{a(1+\mathrm{Cos}\varphi)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sqrt{(1-\mathrm{Cos}\varphi)}}{\sqrt{(1+\mathrm{Cos}\varphi)}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}\varphi + C.$$

nach (I. B. 156. §. 7. Zus. III.)

4. Zusatz.

Setzt man bey der Auflösung der vorigen Aufgabe $m = 0$; so übergeht dafür das dortige erste Integral in

$$\int \frac{d\varphi}{(a+b\,\mathrm{Cos}\varphi)^n} = \int \frac{-dx}{x^n\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}.$$

Und dieses Integral läßt sich für jede ganze bejahte oder verneinte Zahl n vollkommen bestimmen, für die erste nach (38. §. 12. Zus. I. Form.), und für die zweyte nach (38. §. vorletzt. Zus. I. Form.). Doch gilt dieses nur für ungleiche Werthe von b und a; denn wäre $a = b$; so hätte man:

$\int d\varphi$

$$\int \frac{d\phi}{a^n(1+\mathrm{Col}\varphi)^n} = \int \frac{-dx}{x^{\frac{2n-1}{2}}\sqrt{(2a-x)}}.$$

Und dieſes Integral würde man für alle bejahte und verneinte ganze Zahlen n entweder nach (33. §. 1. Zuſ.), oder nach (41. §. 2. Zuſ.) beſtimmen können.

Beyſpiel.

Man ſoll $\int \frac{d\phi}{(a+b\,\mathrm{Col}\varphi)^2}$ für $b > a$ und $b < a$ beſtimmen.

Es iſt $\int \frac{d\phi}{(a+b\mathrm{Col}\varphi)^2} = \int \frac{-dx}{x^2\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}$ für $x = a+b\,\mathrm{Col}\varphi$.

Daher nach (38. §. 12. Zuſ. I. Form.)

$$\int \frac{d\phi}{(a+b\,\mathrm{Col}\varphi)^2} = \frac{\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}{(b^2-a^2)x} + \frac{a}{b^2-a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}.$$

Nimmt man nun den zweyten Theil dieſes Integrals nach (3. Zuſ.); ſo findet man für den angezeigten Werth von x.

Für $b > a$

$$\int \frac{d\phi}{(a+b\mathrm{Col}\varphi)^2} = \frac{b\,\mathrm{Sin}\,\phi}{(b^2-a^2)(a+b\,\mathrm{Col}\varphi)} \frac{-a}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}} \log \frac{b+a\,\mathrm{Col}\phi+\mathrm{Sin}\,\phi\sqrt{(b^2-a^2)}}{a+b\,\mathrm{Col}\varphi} + C.$$

Für

Für $b < a$

$$\int \frac{d\varphi}{(a+b\,\mathrm{Cos}\varphi)^2} = \frac{-b\,\mathrm{Sin}\varphi}{(a^2-b^2)(a+b\,\mathrm{Cos}\varphi)} + \frac{+a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}} \cdot \mathrm{Arc\,Tang}\frac{\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}{b+a\,\mathrm{Cos}\varphi} + C.$$

5. Zusatz.

In den einzelnen Fällen, wenn $m = n = 1$ wäre, würde man aus dem ersten bey der Auflösung der vorigen Aufgabe vorhandenen Integral folgendes 1) erhalten; und für $p = q$ gäbe das obige zweyte Integral folgendes 2).

1) $$\int \frac{d\varphi\,\mathrm{Sin}\varphi}{a+b\,\mathrm{Cos}\varphi} = -\frac{1}{b}\int\frac{dx}{x} = -\frac{1}{b}\log x = -\frac{\log(a+b\,\mathrm{Cos}\varphi)}{b} = \log\frac{b}{a+b\,\mathrm{Cos}\varphi} + C.$$

2) $$\int \frac{d\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi}{a+b\,\mathrm{Cos}\varphi} = -\frac{1}{b}\int\frac{(x-a)\,dx}{x\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}} = \int\frac{-dx}{b\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}} + \int\frac{a\,dx}{bx\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}} = \int\frac{d\varphi}{b} - \int\frac{a\,d\varphi}{b(a+b\,\mathrm{Cos}\varphi)} = \frac{1}{b}\varphi - \frac{a}{b}\int\frac{d\varphi}{a+b\,\mathrm{Cos}\varphi}$$

Und dieses Integral ist vollkommen bestimmt, indem der zweyte Theil davon das aus (3. Zus.) bekannte Integral enthält.

6. Zusatz.

Es verdient noch angemerkt zu werden, daß alle Verschwindungs-Quotienten, welche durch $d\varphi$, und was immer für ganze Potenzen von $\mathrm{Sin}\varphi$ und $a+b\,\mathrm{Cos}\varphi$, oder

von

von $\mathrm{Col}\varphi$ und $a+b\,\mathrm{Col}\varphi$ bestimmt sind, es mögen diese Potenzen bejahte oder verneinte Zahlen zu ihren Exponenten haben, und unter einander wie immer durch die Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden seyn, sich allemal unter rationale Form bringen lassen, welche ausser dx, $x=a+b\,\mathrm{Col}\varphi$, und rationalen Functionen von x keine andere veränderliche Grösse enthält. Es erhellet nämlich aus der gegebenen Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, daß man aus solchen Verschwindungs-Quotienten allemal $d\varphi$ wegschaffen, und statt dessen $d\,\mathrm{Col}\varphi$ einführen kann; daß ferner für $x=a+b\mathrm{Col}\varphi$, $\frac{dx}{b}=d\,\mathrm{Col}\varphi$, $\mathrm{Sin}\varphi=\frac{1}{b}\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}$ dieselben Verschwindungs-Quotienten allemal in solche verwandeln würde, welche ausser ganzen, übrigens bejahten oder verneinten, Potenzen von x und $\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}$ keine Irrationalgrösse, enthalten könnten, und sich daher nach (53. §.) allemal unter eine rationale Form bringen ließen.

Der

Der IV. Abschnitt.

Von Verschwindungs-Quotienten, welche Functionen von zwoen veränderlichen Grössen zugehören sollen; von den damit zusammenhängenden Integralien; nebst Integrirung der Verschwindungs-Quotienten von verschiedenen Ordnungen (15. §.).

59. §. Erklärung.

Wenn y eine Function von zwoen veränderlichen Grössen u, v ist; so soll der ihr für beyde veränderliche Grössen u, v zugehörige Verschwindungs-Quotient, die Summe derjenigen Verschwindungs-Quotienten bedeuten, welche man nach dem Begriffe (5. §.) erhalten würde, wenn man dy aus y nur für u, als wenn v unveränderlich wäre, hernach dy aus y nur für v suchte, als wenn u unveränderlich wäre. Diese einzelnen Verschwindungs-Quotienten für u, und v, kann man mit dy^u, dy^v bezeichnen, und den Verschwindungs-Quotienten von y für beyde veränderliche Grössen u, v, durch dy^{uv} zu erkennen geben.

Anmerkung.

Eigentlich hängt die Function y von beyden veränderlichen Grössen u und v dergestalt ab, daß diejenigen möglichen Aenderungen, welchen dieselbe unterworfen ist, durch die Aenderungen beyder Grössen u, v bestimmt werden:

es hat indeſſen ſeinen groſſen Nutzen, und es iſt auch geſtattet, diejenigen Aenderungen der Function y in Betrachtung zu ziehen, welchen dieſelbe wegen gewiſſer Aenderungen einzeln genommener Gröſſen u, v unterworfen ſeyn mag. Man kann demnach fragen, was mit der Function y bey jedem beliebigen Werthe von u geſchehen würde, wenn v, bey einem ſolchen Werthe von u, ſich auf eine gewiſſe Art allmählich änderte: in dieſe Aenderung hat nun die Aenderung, welche mit u geſchehen kann, keinen Einfluß, und eben deswegen wird u bey der Beantwortung dieſer Frage als eine unveränderliche Gröſſe betrachtet, nämlich als eine ſolche Gröſſe, welche in ſich veränderlich iſt, die ſich aber während der Aenderung von v nicht ändern ſoll. Daher wird es auch geſtattet ſeyn, die Differenz der Function y für die veränderliche Gröſſe v allein in Betrachtung zu ziehen, und daraus den Verſchwindungs-Quotienten dy^v abzuleiten (5. §.), nicht anders, als wenn u eine beſtändige Gröſſe, und y eine Function von einer einzigen veränderlichen Gröſſe v wäre: aus gleichen Gründen wird man hierauf den Verſchwindungs-Quotienten dy^u in Erwägung ziehen können, welcher der Function y alsdann zugehören würde, wenn ſie nur von der veränderlichen Gröſſe u abhinge.

1. Zuſatz.

Der Verſchwindungs-Quotient einer Function y von zwoen veränderlichen Gröſſen u, v, welcher ihr für beyde veränderliche Gröſſen u und v zugehören ſoll, wird alſo allemal durch die Gleichung $dy^{uv} = dy^u + dy^v$ beſtimmt.

Da

Da aber die Verschwindungs-Quotienten dy^u, dy^v allemal unter die Formuln $dy^u = Mdu$, $dy^v = Ndv$ gebracht werden können; so kann man auch sagen, daß der Verschwindungs-Quotient einer Function y für die beyden veränderlichen Grössen u, v, aus welchen sie bestehen soll, unter die Form $dy^{uv} = Mdu + Ndv$ gehören muß, wobey M, N einzelne oder beyde veränderliche Grössen u, v enthalten können, doch so, daß weder M von dv, noch N von du abhängen kann. Folgende Beyspiele werden dieses genugsam erläutern.

I. Sey $y = vu$;

so ist $dy = vdu + udv$.

II. Sey $y = \frac{v}{u}$;

so ist $dy^v = \frac{dv}{u}$; $dy^u = -\frac{vdu}{u^2}$;

also $dy^{uv} = \frac{dv}{u} - \frac{vdu}{u^2}$.

III. Sey $y = ax^2\sqrt{u} = ax^2u^{\frac{1}{2}}$;

so ist $dy = 2axdx\sqrt{u} + \frac{ax^2du}{2\sqrt{u}}$.

IV. Sey $y = a\sqrt[3]{ux^2} = au^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$;

so ist $dy = \frac{adu\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{u^2}} + \frac{2adx\sqrt[3]{u}}{3\sqrt[3]{x}}$.

V. Sey $y = axu^2 - bx^3u$;

so ist $dy = (au^2 - 3bux^2)dx + (2axu - bx^3)du$.

VI. Sey $y = \frac{u}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$;

so ist $dy = \frac{du}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} + \frac{uxdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$.

VII. Sey $y = ulx$;

so ist $dy = \frac{udx}{x} + dulx$.

VIII. Sey $y = x^u$;

so ist $dy = ux^{u-1}dx + x^u dulx$.

IX. Sey $y = l\frac{x+u}{x-u}$;

so ist $dy = \frac{2xdu - 2udx}{x^2 - u^2}$.

X. Sey $y = \sqrt{(x^2 + u^2)}$;

so ist $dy = \frac{xdx + udu}{\sqrt{(x^2 + u^2)}}$.

XI. Sey $y = \frac{1}{(u^2 + x^2)^2}$;

so ist $dy = -\frac{4udu + 4xdx}{(u^2 + x^2)^3}$.

2. Zusatz.

Dem (6. §.) gemäß kann man jede Function y von zwoen veränderlichen Grössen unter der folgenden allgemeinen Formul darstellen:

$$y = Au^a v^b + Bu^c v^d + Cu^e v^f + \text{- - - - - -},$$

daher $dy^{uv} = (aAv^b u^{a-1} + cBv^d u^{c-1} + eCv^f u^{e-1} + \text{---})du$
$+ (bAu^a v^{b-1} + dBu^c v^{d-1} + fCu^e v^{f-1} + \text{---})dv.$

Setzt

Seßt man den Factor von du, $=M$, und den Factor von dv, $=N$; so wird seyn:

$$\frac{dM^v}{dv} = abAv^{b-1}u^{a-1} + cdBv^{d-1}u^{c-1} + efCv^{f-1}u^{e-1} + \ldots$$

$$\frac{dN^u}{du} = abAu^{a-1}v^{b-1} + cdBu^{c-1}v^{d-1} + efCu^{e-1}v^{f-1} + \ldots$$

$$\text{also allemal } \frac{dM^v}{dv} = \frac{dN^u}{du}.$$

Das heißt: wenn y eine Function von zwoen veränderlichen Grösſen u, v iſt; ſo hat der ihr für beyde Grösſen u, v zugehörige Verſchwindungs-Quotient allemal die Eigenſchaft, daß er unter die Form $Mdu+Ndv$ in der Bedeutung (1. Zuſ.) gehört, wobey M, N ſolche Functionen von denſelben veränderlichen Grösſen u, v ſeyn müſſen, für welche die reſpectiven Verſchwindungs-Quotienten dM^v, dN^u durch die Verſchwindungs-Quotienten dv, du dividirt, einander gleich ſind.

3. Zuſatz.

Eine Function y von u, v, wie in (2. Zuſ.), heißt gleichartig, wenn bey jedem ihrem Gliede die Summe der Exponenten von u, v einerley iſt, wenn daher $a+b=c+d=e+f=\ldots$ bey $y=Au^av^b+Bu^cv^d+Cu^ev^f+\ldots$ iſt; und dann heißt eine ſolche Summe $a+b$, oder $c+d$, oder $e+f$ u. ſ. f. der Index der Ordnung der Function y. Nimmt man an, es ſey $y=Au^av^b+Bu^cv^d+Cu^ev^f+\ldots$ wirklich eine ſolche Function von u, v; ſo iſt nach (1. Zuſ.) $dy=Mdu+Ndv$, und nach (2. Zuſ.)

$$M = aAv^b u^{a-1} + cBv^d u^{c-1} + eCv^f u^{e-1} + \ldots.$$
$$N = bAu^a v^{b-1} + dBu^c v^{d-1} + fCu^e v^{f-1} + \ldots.$$

Und hieraus findet man, es sey

$$Mu + Nv = y(a+b) = y(c+d) = y(e+f) = \ldots.$$

Das heißt: wenn $y = Au^a v^b + Bu^c v^d + \ldots.$ eine gleichartige Function von u, v ist; so hat der ihr für beyde veränderliche Grössen u, v unter der Form $Mdu + Ndv$ zugehörige Verschwindungs-Quotient (1. Zus.) die merkwürdige Eigenschaft, daß M, N, mit u und v, statt du und dv, multiplicirt, zur Summe $Mu + Nv$ das Product aus der ganzen Function y in den Index ihrer Ordnung geben müssen.

4. Zusatz.

Das mit einem Verschwindungs-Quotienten von der Form $dy = Mdu + Ndv$ zusammenhängende Integral ist diejenige Function von den veränderlichen Grössen u, v, deren Verschwindungs-Quotient für beyde veränderliche Grössen dem vorgelegten Verschwindungs-Quotienten $Mdu + Ndv$ gleich ist: wenn man also einen Theil des vorgelegten Verschwindungs-Quotienten, etwa Mdu, für die veränderliche Grösse u, ohne Rücksicht auf die andere veränderliche Grösse v, welche hier als eine unveränderliche Grösse betrachtet werden soll, nach der Theorie der vorhergehenden Abschnitte integrirt, welches Integral mit $^u\int Mdu$ bezeichnet werden kann, und wenn man hierauf findet, daß der diesem Integral für beyde veränderliche Grössen u, v zugehörige Verschwindungs-Quotient dem vorgelegten dy

gleich

gleich ist; so wird dasselbe Integral dem mit dy zusammenhängenden Integral y gleich seyn müssen. Das heißt:

Wenn $dy = Mdu + Ndv$; ${}^{u}\int Mdu = M'$,
und $d^{uv}M' = dy = Mdu + Ndv$ ist;
so ist $y = {}^{u}\int Mdu = M' + C$.

5. Zusatz.

Wenn man $dy = Mdu + Ndv$ hat, und ${}^{u}\int Mdu = M'$ findet (4. Zus.), hernach $d.{}^{uv}M'$ sucht; so ist kein Zweifel, daß dieser Verschwindungs-Quotient Mdu enthalten muß: ob er aber auch Ndv enthalte, dieses ist ungewiß. Setzt man, es sey $d.{}^{uv}M' = Mdu + ndv$, und nicht $n = N$; so wird man $N - n = P$, mithin $N = P + n$ nehmen können, und alsdann wird das mit $dy = Mdu + Ndv$ zusammenhängende Integral $y = M' + \int Pdv$ seyn müssen, dergestalt, daß P nur die veränderliche Grösse v enthalten, und $\int Pdv$ sich nach der vorhergehenden Theorie bestimmen lassen wird. Denn für beyde veränderliche Grössen ist $d(M' + \int Pdv) = Mdu + ndv + Pdv = Mdu + (n + P)dv = Mdu + Ndv$, vermöge der Voraussetzung, mithin war $M' + \int Pdv$ das mit $dy = Mdu + Ndv$ zusammenhängende Integral. Ferner erhält man nach (2. Zus.)

$$\frac{dM^{v}}{dv} = \frac{dN^{u}}{du} \text{ aus } dy = Mdu + Ndv;$$

$$\frac{dM^{v}}{dv} = \frac{dn^{u}}{du} \text{ aus } dM' = Mdu + ndv;$$

also ist $dN^{u} = dn^{u}$.

Nun soll seyn $N = n + P$, daher $dN^u = dn^u + dP^u$:

also $du^u = dn^u + dP^u$, mithin $dP^u = 0$.

Dieses kann aber nicht geschehen, wenn P irgend eine Function von u ist: es kann also P die veränderliche Grösse u nicht enthalten, mithin ist P entweder eine beständige Grösse, oder eine Function von v allein.

60. §. Aufgabe.

Wenn ein Verschwindungs-Quotient unter der Form $dy = Mdu + Ndv$ wirklich vorkömmt, und er die Eigenschaft (59. §. 2. Zus.) hat; wie kann man das damit zusammenhängende Integral y bestimmen?

Auflösung. 1) Man integrire nach der Theorie der vorhergehenden Abschnitte einen Theil davon, etwa Mdu, so, als wenn dieser Theil nur die veränderliche Grösse u enthielte, und merke das auf diese Art bestimmte Integral $^u\int Mdu$.

2) Hernach nehme man den Verschwindungs-Quotienten, welcher dem gefundenen Integral $^u\int Mdu$ für beyde veränderliche Grössen u, v zugehören mag, (59. §. nebst 1. Zus.).

3) Ist nun der nach (n. 2.) gefundene Verschwindungs-Quotient dem gegebenen Mdu + Ndv gleich; so war das nach (n. 1.) bestimmte Integral dem verlangten y gleich, mithin ist das verlangte Integral $y = {}^u\int Mdu + C$, nach (59. §. 4. Zus.).

4) Trifft

4) Trifft aber der nach (n. 2.) gefundene Verschwindungs-Quotient mit dem gegebenen $Mdu+Ndv$ nicht überein; so muß er die Form $Mdu+ndv$ haben, und nun nehme man $N-n=P$, und setze das verlangte Integral $y={}^{u}\int Mdu+\int Pdv$, wobey ${}^{u}\int Mdu$ bekannt ist, und $\int Pdv$ nach der vorhergehenden Theorie für die veränderliche Grösse v, welche allein bey P vorkommen kann, bestimmt werden soll (59. §. 5. Zus.).

Beyspiele.

Sey $dy=2u^2v^{\frac{3}{2}}du+u^3v^{\frac{1}{2}}dv$.

Hier ist $M=2u^2v^{\frac{3}{2}}$, $N=u^3v^{\frac{1}{2}}$;

also ${}^{u}\int Mdu={}^{u}\int 2u^2v^{\frac{3}{2}}du=\frac{2}{3}u^3v^{\frac{3}{2}}$ nach (n. 1.):

also $y=\frac{2}{3}u^3v^{\frac{3}{2}}+C$ nach (n. 3.),

weil $d.\frac{2}{3}u^3v^{\frac{3}{2}}=2u^2v^{\frac{3}{2}}du+u^3v^{\frac{1}{2}}dv=dy$ ist nach (n. 2.).

Sey $dy=\frac{2du\sqrt[3]{v}}{3\sqrt[3]{u}}+\frac{dv\sqrt[3]{u^2}}{3\sqrt[3]{v^2}}$.

Nach der Auflösung der vorigen Aufgabe (n. 1.) findet man

$${}^{u}\int\frac{2du\sqrt[3]{v}}{3\sqrt[3]{u}}=u^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{v}=\sqrt[3]{u^2v}.$$

Und es ist $d.\sqrt[3]{u^2v}$ nach (n. 2.) wirklich $=dy$:

also ist $y=\sqrt[3]{vu^2}+C$ nach (n. 3.).

Sey $dy = \frac{3udu - 2v^2du - 2uvdv}{2\sqrt{(u - v^2)}}$.

Hier ist $M = \frac{3u - 2v^2}{2\sqrt{(u - v^2)}}$; $N = -\frac{2uv}{2\sqrt{(u - v^2)}}$.

Mithin

$$\int^u Mdu = \int^u \frac{(3u - 2v^2)du}{2\sqrt{(u - v^2)}} = \int^u \frac{3udu}{2\sqrt{(u - v^2)}} - \int^u \frac{v^2du}{\sqrt{(u - v^2)}}$$

$= u\sqrt{(u - v^2)}$ nach (33. §. 1. Zuf. I. Form.).

Man findet ferner, es sey $d.u\sqrt{(u - v^2)}$ für u und v wirklich $= dy$:

also muß seyn $y = u\sqrt{(u - v^2)} + C$.

Bequemer findet man es aus $-\frac{2uvdv}{2\sqrt{(u - v^2)}} = Ndv$.

Nämlich $\int^v Ndv = -u\int^v \frac{vdv}{\sqrt{(u - v^2)}} = u\sqrt{(u - v^2)}$

nach (26. §. und Zuf.).

Sey $dy = \frac{udv + vdu}{c^2 + 4u^2v^2} = \frac{udv}{c^2 + 4u^2v^2} + \frac{vdu}{c^2 + 4u^2v^2}$.

Es ist $\int^v \frac{udv}{c^2 + 4u^2v^2} = \frac{1}{2c}$ Arc Tang $\frac{2uv}{c}$ nach

(34. §. IV. Form.),

und $d\frac{1}{2c}$ Arc Tang $\frac{2uv}{c}$ für u und v wirklich $= dy$:

also $y = \frac{1}{2c}$ Arc Tang $\frac{2uv}{c} + C$.

Sey $dy = adu + 2vdv + vdu + udv$.

Es ist $\int^u (a + v)du = au + vu$.

Hievon ist der Verschwindungs-Quotient für u und v

$adu + vdu + udv$ nicht $= dy$.

Nach

Nach der Auflösung der vorigen Aufgabe (n. 4.) nehme man also:

$$2v+u-u=2v=P, \text{ und setze}$$

$$y=\int^{u}(a+v)\,du+\int P\,dv=au+vu+\int 2v\,dv$$
$$=au+vu+v^2+C.$$

Dasselbe Integral findet man aus dy auch so:

$$\int^{v}(2v+u)\,dv=v^2+uv;$$

und $d.\int^{v}(2v+u)dv=d(v^2+uv)$ für u und v ist $2vdv+udv+vdu$ nicht $=dy$.

Daher nehme man $a+v-v=a=P$, und setze

$$y=\int^{v}(2v+u)dv+\int P du=v^2+uv+\int a du$$
$$=v^2+uv+au+C.$$

Sey $dy=\dfrac{3adu-3x^2du-4uxdx}{3\sqrt[3]{(a-x^2)}}\cdot\dfrac{-dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Es ist $\int^{u}\dfrac{(3a-3x^2)du}{3\sqrt[3]{(a-x^2)}}=\int^{u}\dfrac{(a-x^2)du}{\sqrt[3]{(a-x^2)}}=\dfrac{u(a-x^2)}{\sqrt[3]{(a-x^2)}}$.

Und nun ist für u und x

$$d\,\frac{u(a-x^2)}{\sqrt[3]{(a-x^2)}}=\frac{3adu-3x^2du-4uxdx}{3\sqrt[3]{(a-x^2)}} \text{ nicht} = dy.$$

Daher nehme man

$$\frac{-4ux}{3\sqrt[3]{(a-x^2)}}\cdot\frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}+\frac{4ux}{3\sqrt[3]{(a-x^2)}}=\frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}=P,$$

und $y=\dfrac{u(a-x^2)}{\sqrt[3]{(a-x^2)}}+\int P dx=\dfrac{u(a-x^2)}{\sqrt[3]{(a-x^2)}}-\int\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

$=u\sqrt[3]{(a-x^2)^2}-\text{Arc Tang}\,\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}+C$ (41.§.4.Zus.).

Zusatz.

Zusatz.

Diese Art, das mit einem Verschwindungs-Quotienten von der Form $dy = Mdu + Ndv$ zusammenhängende Integral y zu bestimmen, setzt allemal voraus, daß der Verschwindungs-Quotient dy die Eigenschaft $\frac{dM^v}{dv} = \frac{dN^u}{du}$ hat: daher muß man vor der Integrirung eines solchen Verschwindungs-Quotienten untersuchen, ob diese Eigenschaft bey ihm wirklich zutrifft. Ist nicht $\frac{dM^v}{dv} = \frac{dN^u}{du}$; so giebt es auch keine Function y von u und v, deren Verschwindungs-Quotient, für beyde veränderliche Grössen u, v genommen, dem vorgelegten $Mdu + Ndv$ gleich ist, (59. §. 2. Zus.), und so würde man das damit zusammenhängende Integral nach der Auflösung der vorigen Aufgabe vergebens suchen.

61. §. Erklärung.

Wenn y was immer für eine Function von zwoen veränderlichen Grössen u, v, und C entweder $= o$, oder was immer für eine unveränderliche, von u, v unabhängige Grösse ist; so kann doch $y = C$ seyn, und hieraus erhält man $dy^{uv} = dC = o$ (5. §. 4. Zus.), oder $Mdu + Ndv = o$ (59. §. 1. Zus.). Nun heißt $Mdu + Ndv = o$ eine Differential-Gleichung, und $y = C$, woraus sie entstanden ist, heißt die damit zusammenhängende Integral-Gleichung. Jede Differential-Gleichung $Mdu + Ndv = o$ ist ferner gleichartig oder ungleichartig, nachdem die

Summen

Summen der Exponenten, womit die veränderlichen Grösſen u, v in ihren einzelnen Gliedern von der Form Au^av^b verſehen ſind, alle einander gleich ſind, oder nicht. Iſt endlich eine Differential-Gleichung $Mdu+Ndv=0$ von der Beſchaffenheit, daß der Coefficient M von du nur die veränderliche Grösſe u, und der Coefficient N von dv nur die veränderliche Grösſe v enthält; ſo ſagt man: die veränderlichen Grösſen u, v ſeyen bey $Mdu+Ndv$ von einander abgeſondert: ſonſt ſagt man, ſie ſeyen untereinander vermengt.

Z. B. Sey $u^2v^5=a$; ſo iſt für beyde veränderliche Grösſen nach (59. §.) $5u^2v^4dv+2uv^5du=0$, und dieſes iſt eine gleichartige Differential-Gleichung, und die damit zuſammenhängende Integral-Gleichung iſt $u^2v^5=a$. Bey eben der Differential-Gleichung ſind die veränderlichen Grösſen untereinander vermengt, dividirt man ſie aber durch u^2v^5; ſo erhält man aus ihr eine andere Differential-Gleichung, nämlich $\frac{5dv}{v}+\frac{2du}{u}=0$, bey welcher die veränderlichen Grösſen von einander abgeſondert ſind.

1. Zuſatz.

Wenn es für eine Differential-Gleichung $Mdu+Ndv=0$ eine Integral-Gleichung wirklich giebt; ſo muß dieſe die Form $y=C$ bekommen, ſo, daß C eine unveränderliche Grösſe, und y eine ſolche Function von den veränderlichen Grösſen u, v ſey, deren Verſchwindungs-Quotient für beyde

Grösſen

Grösſen u, v dem gegebenen Mdu+Ndv gleich iſt, nämlich $d^{u}y^{v}=Mdu+Ndv$.

2. Zuſatz.

Da aber die Integral-Gleichung $y=C$ für alle Werthe von den darinn befindlichen veränderlichen Grösſen u, v gelten muß; ſo wird man die Conſtante C bey wirklicher Anwendung dergeſtalt beſtimmen können, daß C denjenigen Werth erhalte, welchen y für gewiſſe Werthe von u und v erlangen mag.

3. Zuſatz.

Nimmt man die Bezeichnungen $^{u}\int Mdu$, $^{v}\int Ndv$ in der Bedeutung (59. §. 4. Zuſ.), und ſetzt man $y={}^{u}\int Mdu+{}^{v}\int Ndv$; ſo wird $dy^{uv}=Mdu+Ndv$ ſeyn müſſen, wenn M nur u, und N nur v enthält (59. §. und 1. Zuſ.): bey dieſer Vorausſetzung wird alſo $^{u}\int Mdu+{}^{v}\int Ndv=C$ die Integral-Gleichung ſeyn, welche mit dem Verſchwindungs-Quotienten $Mdu+Ndv=0$ zuſammenhängt (1. Zuſ.), das heißt: wenn bey einer Differential-Gleichung $Mdu+Ndv=0$ die veränderlichen Grösſen u, v von einander abgeſondert ſind (Erklär.); ſo findet man die damit zuſammenhängende Integral-Gleichung, wenn man Mdu und Ndv nach der Theorie der vorhergehenden Abſchnitte für ſich integrirt, hernach $\int Mdu+\int Ndv=C$ ſetzt.

Beyſpiele.

Aus $3x^{2}dx-5z^{\frac{2}{3}}dz=0$ wird $\int 3x^{2}dx-\int 5z^{\frac{2}{3}}dz=C$,

daher $x^{3}-3z^{\frac{5}{3}}=C$.

Aus

Aus $\frac{3dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+\frac{dz}{z}=0$ wird $\int\frac{3dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+\int\frac{dz}{z}=C$,

daher $3\,\mathrm{Arc\,Sin}\,x+\log z=C$.

Aus $\frac{2dx}{1-x}+\frac{4zdz}{2+z^2}=0$ wird $\int\frac{2dx}{1-x}+\int\frac{4zdz}{2+z^2}=C$,

daher $-2\log(1-x)+2\log(2+z^2)=C$, oder $2\log\frac{2+z^2}{1-x}=C$.

4. Zusatz.

Sind aber bey einer Differential-Gleichung $Mdu+Ndv=0$ die veränderlichen Grössen u, v untereinander vermengt (Erklär.), doch dergestalt, daß $\frac{dM^v}{dv}=\frac{dN^u}{du}$ ist; so wird man die damit zusammenhängende Integral-Gleichung allemal dadurch erhalten, wenn man das Integral $\int(Mdu+Ndv)$ nach (60. §.) suchet, hernach $\int(Mdu+Ndv)=C$ setzt.

5. Zusatz.

Wenn hingegen bey einer Differential-Gleichung $Mdu+Ndv=0$ die veränderlichen Grössen u, v unter einander vermengt sind, und nicht $\frac{dM^v}{dv}=\frac{dN^u}{du}$ ist; so giebt es für sie, wie dieselbe da stehet, keine Integral-Gleichung $y=C$; weil es, wegen (59. §. 1. Zus.), keine Function y von u, v giebt, wofür $dy^{uv}=Mdu+Ndv$ seyn könnte, welches doch nothwendig wäre (1. Zus.).

6. Zusatz.

Daraus folgt aber noch nicht, daß eine solche Differential-Gleichung sich gar nicht integriren läßt: denn es ist gestattet,

gestattet, dieselbe mit einer gewissen Function V zu multipliciren, und es ist wohl möglich, daß nach geschehener Multiplication die dadurch entstandene neue Differential-Gleichung sich vollkommen integriren lasse. So kann man z. B. $u^a v du + u dv = o$ für sich nicht integriren; nicht nach (3. Zus.), weil die veränderlichen Grössen unter einander vermengt sind; nicht nach (4. Zus.), weil die Eigenschaft $\frac{dM^v}{dv} = \frac{dN^u}{du}$ bey ihr nicht zutrifft. Wenn man aber die ganze Gleichung mit $\frac{1}{uv}$ multiplicirt; so verwandelt man sie dadurch in $u du + \frac{dv}{v} = o$, und nun ist nach (3. Zus.) $\frac{1}{2} u^2 + \log v = C$.

Anmerkung.

Aus diesem einzigen Beyspiele läßt es sich nun leicht abnehmen, daß es möglich seyn kann, eine Differential-Gleichung, welche für sich mit keiner Integral-Gleichung zusammenhängt, in eine andere zu verwandeln, die sich vollkommen integriren läßt: und weil hiezu hinreichet, wenn bey der neuen Differential-Gleichung die veränderlichen Grössen von einander abgesondert, oder dergestalt unter einander vermengt sind, daß die Eigenschaft $\frac{dM^v}{dv} = \frac{dN^u}{du}$ Statt findet (3. 4. Zus.); so läßt sich fragen, wie es möglich ist, eine gegebene Differential-Gleichung, welche keine von diesen Eigenschaften hat, in eine andere zu verwandeln,

der

der eine von diesen beyden Eigenschaften zugehören mag. Hievon handelt Hr. Euler am umständlichsten (a); folgende Aufgaben werden das Hauptsächlichste davon kennen lehren.

(a) Instit. Calc. Integr. Vol. I. L. I. Sect. II. Cap. I. II.

62. §. Aufgabe.

Zu untersuchen, ob bey einer jeden gleichartigen Differential-Gleichung $Mdu+Ndv=0$ (61. §.) die veränderlichen Grössen u, v von einander abgesondert werden können.

Auflösung. 1) Aus $Mdu+Ndv=0$ folgt $Mdu=-Ndv$, und nun hat man $\frac{M}{N}=-\frac{dv}{du}$.

2) Da nun $Mdu+Ndv=0$ eine gleichartige Gleichung seyn soll; so müssen M und N gleichartige Functionen von u, v seyn: wenn man nämlich M, N in Reihen auflöste; so würden die Summen der Exponenten, womit die veränderlichen Grössen u, v bey ihren einzelnen Gliedern versehen wären, alle einander gleich seyn (59. §. 3. Zus.). Da also dieselben Reihen durch $M=Au^av^b+Bu^cv^d+Cu^ev^f+\cdots$, $N=A'u^{a'}v^{b'}+B'u^{c'}v^{d'}+C'u^{e'}v^{f'}+\cdots$ ausgedrückt werden können; so kann man setzen, es sey wegen (n. 1.)

$$\frac{M}{N}=\frac{Au^av^b+Bu^cv^d+Cu^ev^f+\cdots}{A'u^{a'}v^{b'}+B'u^{c'}v^{d'}+C'u^{e'}v^{f'}+\cdots}=-\frac{dv}{du}$$

und $a+b=c+d=e+f=\cdots=a'+b'=c'+d'=e'+f'=\cdots$.

3) Man ſetze nun $v = zu$, mithin $dv = zdu + udz$; ſo wird aus (n. 2.) folgen:

$$\frac{M}{N} = \frac{Au^{a+b}z^b + Bu^{c+d}z^d + Cu^{e+f}z^f + \text{---}}{A'u^{a'+b'}z^{b'} + B'u^{c'+d'}z^{d'} + C'u^{e'+f'}z^{f'} + \text{---}} = \frac{-zdu - udz}{du}.$$

Und weil man den Zähler und Nenner wegen (n. 2.) durch $u^{a+b} = u^{c+d} = u^{e+f} = \text{---} = u^{a'+b'} = u^{c'+d'} = u^{e'+f'} = \text{---}$ dividiren kann; ſo iſt:

$$\frac{M}{N} = \frac{Az^b + Bz^d + Cz^f + \text{---}}{A'z^{b'} + B'z^{d'} + C'z^{f'} + \text{---}} = \frac{-zdu - udz}{du}.$$

Und ſetzt man $Z = \frac{Az^b + Bz^d + Cz^f + \text{----}}{A'z^{b'} + B'z^{d'} + C'z^{f'} + \text{----}}$;

ſo iſt $Z = \frac{-zdu - udz}{du}$, und hieraus folgt:

$$\frac{du}{u} + \frac{dz}{z+Z} = 0.$$

Bey welcher Gleichung die veränderlichen Gröſſen u, z von einander abgeſondert ſind, indem Z nur z enthält.

1. Zuſatz.

Aus dieſer Differential-Gleichung erhält man nun nach (61. §. 2. Zuſ.) die Integral-Gleichung

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{dz}{z+Z} = C, \text{ oder } \log u + \int \frac{dz}{z+Z} = C.$$

Wie oft alſo eine Differential-Gleichung $Mdu + Ndv = 0$ gleichartig iſt, ſo oft iſt dieſelbe einer vollkommenen Integrirung fähig, wenigſtens kann man die damit zuſammenhängende Integral-Gleichung auf das Integral eines ſolchen Verſchwindungs-Quotienten zurück-

zurückführen, welcher ſich auf eine einzige veränderliche Gröſſe bezieht, der demnach nach der Theorie der vorhergehenden Abſchnitte ſich integriren läßt.

Man nehme nämlich $v = zu$, mithin $z = \frac{v}{u}$, und ſetze $= Z$, was $\frac{M}{N}$ für $v = zu$ giebt; nehme log u und ſuche $\int \frac{dz}{z+Z}$; ſo wird $\log u + \int \frac{dz}{z+Z} = C$ die verlangte Integral-Gleichung ſeyn.

Beyſpiele.

1. Die gleichartige Differential-Gleichung $udu + vdv - mvdu = o$ zu integriren.

Sey $v = zu$, mithin $z = \frac{v}{u}$.

Nun iſt $\frac{u - mv}{v} = \frac{u - mzu}{zu} = \frac{1 - mz}{z}$;

alſo iſt die verlangte Integral-Gleichung:

$$\log u + \int \frac{dz}{z + \frac{1-mz}{z}} = \log u + \int \frac{zdz}{z^2 - mz + 1} = C.$$

oder $\log u + \frac{1}{2}\log(z^2 - mz + 1) + \frac{1}{2}m\int \frac{dz}{z^2 - mz + 1} = C.$

(38. §. 7. Zuſ.).

Den dritten Theil findet man nun für jede Zahl m nach (35. §. und Anm.). Denn es iſt $m = 2$, oder $m < 2$, oder $m > 2$.

Für $m=2$ hat man:

$$\log u+\tfrac{1}{2}\log(1-z)^2+\int\frac{dz}{(1-z)^2}=C$$

daher $\log(u-v)+\dfrac{u}{u-v}=C.$

Für $m<2$ hat man nach (35. §. n. 2.)

$$\log u+\tfrac{1}{2}\log(z^2-mz+1)+\frac{m}{\sqrt{(4-m^2)}}\operatorname{ArcTg}\frac{2z-m}{\sqrt{(4-m^2)}}=C,$$

daher $\log\sqrt{(v^2-muv+u^2)}+\dfrac{m}{\sqrt{(4-m^2)}}\operatorname{ArcT}\dfrac{2v-mu}{u\sqrt{(4-m^2)}}=C.$

Für $m>2$ hat man nach (35. §. n. 3.)

$$C=\log u+\tfrac{1}{2}\log(z^2-mz+1)-\tfrac{1}{2}m\int\frac{dz}{-z^2+mz-1}$$

$$=\log u+\tfrac{1}{2}\log(z^2-mz+1)-\frac{m}{2\sqrt{(m^2-4)}}\lg\frac{\sqrt{(m^2-4)}+2z-m}{\sqrt{(m^2-4)}-2z+m}$$

demnach $C=\log\dfrac{\sqrt{(v^2-muv+u^2)}}{\left(\dfrac{u\sqrt{(m^2-4)}+2v-mu}{u\sqrt{(m^2-4)}-2v+mu}\right)^{\frac{m}{2\sqrt{(m^2-4)}}}}$

Da aber die Constante C noch völlig unbestimmt ist; so kann man log c statt C nehmen, und dann ist:

$$c=\frac{\sqrt{(v^2-muv+u^2)}}{\left(\dfrac{u\sqrt{(m^2-4)}+2v-mu}{u\sqrt{(m^2-4)}-2v+mu}\right)^{\frac{m}{2\sqrt{(m^2-4)}}}}.$$

II. Die gleichartige Differential-Gleichung $(\alpha u+\beta v)\,du-(\gamma u+\delta v)\,dv=0$ zu integriren.

Sey $v=uz$, daher $z=\dfrac{v}{u}$.

Nun

Nun ist $\frac{\alpha u+\beta v}{\gamma u+\delta v}=\frac{\alpha u+\beta zu}{\gamma u+\delta zu}=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma+\delta z}$.

Die verlangte Integral-Gleichung ist also:

$$\log u+\int\frac{dz}{z+\frac{\alpha+\beta z}{\gamma+\delta z}}=\log u+\int\frac{dz(\gamma+\delta z)}{\delta z^2+(\beta+\gamma)z+\alpha}=C.$$

daher

$$\log u+\tfrac{1}{2}\log(\delta z^2+(\beta+\gamma)z+\alpha)+\frac{\gamma-\beta}{2}\int\frac{dz}{\delta z^2+(\beta+\gamma)z+\alpha}=C$$

(38. §. 7. Zus.).

Und nun kann man den dritten Theil nach (35. §. und Anmerk.), wie beym vorigen Beyspiele, aufsuchen, hernach $z=\frac{v}{u}$ nehmen.

III. Die gleichartige Differential-Gleichung $udu+vdv=udv+vdu=0$ zu integriren.

Für $v=zu$, $z=\frac{v}{u}$ ist

$$\frac{u+v}{v-u}=\frac{u+zu}{zu-u}=\frac{1+z}{z-1};$$

also ist die verlangte Integral-Gleichung:

$$\log u+\int\frac{dz}{z+\frac{1+z}{z-1}}=\log u+\int\frac{(z-1)dz}{1+z^2}$$

$$=\log u+\int\frac{zdz}{1+z^2}-\int\frac{dz}{1+z^2}=\lg u+\tfrac{1}{2}\lg(1+z^2)-\operatorname{ArcTg} z$$

$$=\log\sqrt{(u^2+v^2)}-\operatorname{ArcTang}\frac{v}{u}=C.$$

IV. Die gleichartige Differential-Gleichung $vdu - dv\sqrt{(u^2+v^2)} = o$ zu integriren.

Für $u = zv$, $z = \frac{u}{v}$ iſt

$$\frac{-\sqrt{(u^2+v^2)}}{v} = \frac{-\sqrt{(z^2v^2+v^2)}}{v} = -\sqrt{(z^2+1)};$$

die verlangte Integral-Gleichung iſt alſo:

$$C = \log v + \int \frac{dz}{z-\sqrt{(z^2+1)}} = \log v + \int \frac{dz(z+\sqrt{(z^2+1)})}{z^2-(\sqrt{(z^2+1)})^2}$$

$$= \log v - \int z dz - \int dz\sqrt{(z^2+1)}, \text{ daher nach (39. §. VII. Form.)}$$

$$C = \log v - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}z\sqrt{(z^2+1)} - \tfrac{1}{2}\log(z+\sqrt{(z^2+1)})$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{(u+\sqrt{(u^2+v^2)})}} - \frac{u}{2v^2}(u+\sqrt{(u^2+v^2)}).$$

2. Zuſatz.

Weil jede gleichartige Differential-Gleichung $Mdu + Ndv = o$ von der Beſchaffenheit iſt, daß die damit verbundene Integral-Gleichung allemal auf eine vollkommen beſtimmte Art ſich angeben läßt; ſo wäre es zu wünſchen, daß man jede ungleichartige Differential-Gleichung, welche für ſich keine Integral-Gleichung giebt (61. §. 5. Zuſ.), in eine gleichartige verwandeln könnte, welches aber nicht jedesmal angeht. Der Kunſtgriff, wodurch eine ungleichartige Differential-Gleichung $Mdu + Ndv = o$ in eine gleichartige, wenn dieſes angeht, gemeiniglich verwandelt wird, beſtehet darinn, daß man ſtatt einer veränderlichen Gröſſe u oder v eine andere z, oder ſtatt beyder zwo andere z, ω einführet, wozu gewiſſe Exponenten m, n erfordert werden, daß $u = z^m$, $v = \omega^n$ ſey.

Bey-

Beyſpiel.

Sey $uv^3du+u^2v^4du---dv=o$ zu integriren.

Sey $v=z^{-1}=\frac{1}{z}$, daher $dv=-\frac{dz}{z^2}$; ſo iſt

$$\frac{udu}{z^3}+\frac{u^2du}{z^4}+\frac{dz}{z^2}=o, \text{ oder } uzdu+u^2du+z^2dz=o.$$

Und nun kann man es nach (1. Zuſ.) integriren, denn ſey $z=u\omega$, mithin $\omega=\frac{z}{u}=\frac{1}{uv}$; ſo wird ſeyn:

$$\frac{uz+u^2}{z^2}=\frac{u^2\omega+u^2}{u^2\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2};$$

alſo iſt die verlangte Integral-Gleichung

$$\log u+\int\frac{d\omega}{\omega+\frac{\omega+1}{\omega^2}}=\log u+\int\frac{\omega^2d\omega}{\omega^3+\omega+1}=C.$$

3. Zuſatz.

Doch ſieht man leicht ein, daß die Exponenten der veränderlichen Gröſſen u, v bey der ungleichartigen Differential-Gleichung $Mdu+Ndv=o$ in gewiſſen Verhältniſſen gegen einander ſeyn müſſen, wenn dieſe ſich in eine gleichartige Gleichung nach (2. Zuſ.) ſoll verwandeln laſſen, und ſo wäre es ſehr nützlich, wenn man aus denſelben Exponenten im voraus beurtheilen könnte, ob eine ſolche Verwandlung wirklich geſchehen kann. Für alle Differential-Gleichungen, welche unter der allgemeinen Form $u^av^bdu+u^cv^ddu+u^ev^fdv=o$ vorkommen mögen, findet man folgende Bedingung.

Man ſetze $v = z^n$, $dv = nz^{n-1}dz$;

ſo übergeht dafür dieſelbe Gleichung in

$$u^a z^{nb} du + u^c z^{nd} du + nu^e z^{(f+1)n-1} dz = o.$$

Da nun dieſes eine gleichartige Gleichung ſeyn ſoll; ſo iſt

$$nb + a = nd + c = n(f+1) - 1 + e.$$

Aus $nb + a = nd + c$ folgt $n = \frac{a-c}{d-b}$.

Und nun folgt aus $nd + c = n(f+1) - 1 + e$.

$$(d - f - 1)(a - c) = (e - c - 1)(d - b).$$

Das heißt: wenn eine ungleichartige Differential-Gleichung $u^a v^b du + u^c v^d du + u^e v^f dv = o$ ſich in eine gleichartige ſoll nach (2. Zuſ.) verwandeln laſſen; ſo müſſen bey ihr die Exponenten a, b, c, d, e, f von der Beſchaffenheit ſeyn, daß die Gleichung $(d-f-1)(a-c) = (e-c-1)(d-b)$ Statt finde, und dann geſchieht die Verwandlung, wenn man bey ihr $v = z^{\frac{a-c}{d-b}}$ ſetzt.

Da aber $\frac{a-c}{d-b} = o$ für $a = c$, und $\frac{a-c}{d-b} = \frac{a-c}{o}$ für $d = b$ wäre; ſo muß man ſich dieſe zweenen Fälle merken, in welchen jene Verwandlung nicht angeht: doch läßt ſich dieſelbe Gleichung in dieſen Fällen leicht integriren. Denn

für $a = c$ iſt $u^a v^b du + u^a v^d du + u^e v^f dv = o$

$$\text{daher } u^{a-e} du + \frac{v^f dv}{v^b + v^d} = o,$$

$$\text{und } \int u^{a-e} du + \int \frac{v^f dv}{v^b + v^d} = C. \text{ nach (61. §. 3. Zuſ.).}$$

Für

Für $d=b$ iſt $u^a v^b du + u^c v^b dv + u^e v^f dv = o$

daher $(u^{a-e} + u^{c-e}) du + v^{f-b} dv = o$,

mithin $\int (u^{a-e} + u^{c-e}) du + \int v^{f-b} dv = C$ nach (61. §. 3. Z.).

63. §. Aufgabe.

Die ungleichartige Differential-Gleichung $(A+Bu+Cv)du-(D+Eu+Fv)dv=o$ **zu integriren.**

Auflöſung. Vergebens würde man ſie für $u=z^n$ oder $v=z^n$ nach (62. §. 2. Zuſ.) gleichartig zu machen ſuchen: man verſuche aber die zwiſchen den Klammern befindlichen Factoren mit einzelnen Buchſtaben zu bezeichnen, daher ſetze man:

$$A+Bu+Cv=\varphi;\quad D+Eu+Fv=\mu;$$

ſo wird man finden,

$$v=\frac{B\mu-E\varphi-BD+EA}{BF-EC};\quad u=\frac{F\varphi-C\mu-AF+CD}{BF-EC};$$

und

$$dv=\frac{Bd\mu-Ed\varphi}{BF-EC};\quad du=\frac{Fd\varphi-Cd\mu}{BF-EC}.$$

Bringt man nun dieſe Werthe von v, u, dv, du in die vorgelegte Differential-Gleichung; ſo übergeht dieſelbe in folgende:

$$(F\varphi+E\mu)d\varphi-(B\mu+C\varphi)d\mu=o.$$

Da nun dieſe Gleichung gleichartig iſt; ſo wird man die damit verbundene Integral-Gleichung nach (62. §.) beſtimmen können. Für die Integral-Gleichung wird man nämlich finden:

$$\text{Für } z = \frac{\varphi}{\mu} = \frac{A+Bu+Cv}{D+Eu+Fv}.$$

$$\text{Const} = \log\mu + \int \frac{dz\,(E+Fz)}{Fz^2+(E+C)z+B}.$$

Oder nach (38. §. 7. Zuſ.)

$$\text{Const} = \log\mu + \log\sqrt{(Fz^2+(E+C)z+B)} + \tfrac{1}{2}(E-C)\int \frac{dz}{Fz^2+(E+C)z+B}.$$

Und den letzten Theil kann man allemal nach (35. §.) beſtimmen.

1. Zuſatz.

Dieſe Auflöſung findet nicht Statt, wenn B, F, E, C Coefficienten von der Beſchaffenheit ſind, daß für ſie BF=EC ſeyn muß; weil in allen ſolchen Fällen $BF - EC = 0$ wäre, mithin würden die obigen Gleichungen für u, v, du, dv nicht brauchbar ſeyn.

2. Zuſatz.

Auſſerdem iſt der Fall merkwürdig, wo nämlich E=C iſt: dafür iſt $E - C = 0$, mithin fällt der dritte Theil der oben gefundenen Integral-Gleichung weg, und man hat

Die Differential-Gleichung.

$$(A+Bu+Cv)\,du - (D+Cu+Fv)\,dv = 0.$$

Die Integral-Gleichung.

$$\text{Const} = \log\mu\sqrt{(Fz^2+2Cz+B)}$$
$$= \log\sqrt{((F+B)(D+Cu+Fv)^2+2C(A+Bu+Cv)(D+Cu+Fv))}.$$

Und wenn man ſetzt $\text{Const} = \log c$; ſo iſt

$$c = \sqrt{((F+B)(D+Cu+Fv)^2+2C(A+Bu+Cv)(D+Cu+Fv))}.$$

3. Zuſ

3. Zuſatz.

Um auch für den ausgenommenen Fall (1. Zuſ.) eine vollkommene Auflöſung zu finden, erwäge man, daß für BF = EC die bey der vorigen Aufgabe angeführte Differential-Gleichung in folgende übergeht.

$$Adu+(Bu+Cv)du-Ddv-\frac{F}{C}(Bu+Cv)dv=0.$$

Sey aber überhaupt n ſtatt $\frac{F}{C}$, mithin

1) $Adu+(Bu+Cv)du-Ddv-n(Bu+Cv)dv=0.$

Setzt man nun $Bu+Cv=\varphi$; ſo iſt $Bdu+Cdv=d\varphi$ und $dv=\frac{d\varphi-Bdu}{C}$, mithin erhält man aus 1)

2) $du-\frac{(D+n\varphi)d\varphi}{CA+BD+(C+nB)\varphi}=0.$

Und hieraus erhält man nach (61. §. 3. Zuſ.).

3) $Conſt=u-\frac{n}{(nB+C)^2}(CA+BD+(nB+C)(Bu+Cv))$
$+\frac{n(CA+BD)-D(nB+C)}{(nB+C)^2}\log(CA+BD+(nB+C)(Bu+Cv)).$

Und dieſe Integral-Gleichung hängt mit der Differential-Gleichung 1) allemal zuſammen, den einzigen Fall ausgenommen, wenn $nB+C=0$, mithin $n=-\frac{C}{B}$ iſt, in welchem Fall die Gleichung 3) unbrauchbar iſt, und die wahre Gleichung aus 2) folgt, nämlich:

4) $Conſt=u-\int\frac{(D+n\varphi)d\varphi}{CA+BD}$
$=u-\frac{(2D(Bu+Cv)+n(Bu+Cv)^2)}{2(CA+BD)}.$

Wollte

Wollte man $n=o$ in 1) setzen; so würde man folgende Differential-Gleichung 5) haben, und damit müßte die Integral-Gleichung 6) zusammenhängen, wie sie aus 2) folgt.

5) $(A+Bu+Cv)du-Ddv=o.$

6) $u-\frac{D}{C}\log(CA+BD+BCu+C^2v)=Const.$

64. §. Aufgabe.

Die Differential-Gleichung $dv+Pvdu+Qdu=o$, wobey P, Q was immer für Functionen, aber nur von der veränderlichen Grösse u, seyn mögen, zu integriren.

Auflösung. Sey $v=z\mu$, daher $dv=zd\mu+\mu dz$; so wird seyn.

1) $zd\mu+\mu dz+Pz\mu du+Qdu=o.$

In diese Gleichung übergeht demnach die zu integrirende Differential-Gleichung, wenn man bey ihr $v=z\mu$ setzt: da also z, μ ganz unbestimmte veränderliche Grössen seyn sollen; so wird gestattet seyn, anzunehmen, sie seyen von der Beschaffenheit, daß nun dieselben bey 1) von einander abgesondert werden können, in welchem Fall die Gleichung 1) sich nach (61. §.) integriren ließe, und durch diese Integration die mit der vorgelegten Differential-Gleichung zusammenhängende Integral-Gleichung erhalten werden würde. Dem zufolge sey z dergestalt beschaffen, daß dafür $\mu dz+Pz\mu du=o$ wird; so wird dafür die Gleichung 1) in folgende 2) übergehn, wobey die veränderlichen Grössen u

und

und μ, und zwar von einander abgesondert seyn werden, sobald man aus der angenommenen Gleichung $\mu dz + Pz\mu du = c$ eine Function z von u bestimmen kann, wofür sie gelten mag, und alsdann wird nach (61. §. 3. Zus.) aus 2) die Integral-Gleichung 3) folgen, welche die verlangte Gleichung ausdrückt.

2) $z d\mu + Q du = 0$ oder $d\mu + \frac{Q du}{z} = 0$.

3) $\mu + \int \frac{Q du}{z} = C$.

Da aber $\mu dz + Pz\mu du = 0$ die Gleichung $\frac{dz}{z} + P du = 0$ giebt, und z, P nur von u Functionen seyn sollen; so erhält man hieraus $\frac{dz}{z} = -P du$, daher $\log z = -\int P du$, wobey keine Constante gebraucht wird, indem hier z nur als eine blos veränderliche Function von u zu betrachten gestattet ist: also hat man, wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet, $z = e^{-\int P du}$, und für diese Function von u soll 3) die Integral-Gleichung seyn, welche mit der gegebenen Differential-Gleichung zusammenhängt. Da aber $v = z\mu$, mithin $\mu = \frac{v}{z}$ ist; so erhält man aus 3), für die gesuchte Integral-Gleichung, folgende Gleichung:

4) $\frac{v}{e^{-\int P du}} + \int \frac{Q du}{e^{-\int P du}} = C$; oder $v e^{\int P du} + \int e^{\int P du} Q du = C$.

1. Zusatz.

Zu dieser Integrirungs-Methode gehören alle Differential-Gleichungen, welche unter der allgemeinen Form

Rdv

$Rdv+Pvdu+Qdu=o$ vorkommen, wenn nur R, P, Q keine andere veränderliche Gröſſe enthalten, als u. Denn jede ſolche Gleichung übergeht, wenn man ſie durch R dividirt, in

$$dv+\frac{P}{R}vdu+\frac{Q}{R}du=o, \text{ und dafür iſt}$$

$$ve^{\int\frac{P}{R}du}+\int e^{\int\frac{P}{R}du}\cdot\frac{Q}{R}du=\text{Conſt.}$$

2. Zuſatz.

Zu derſelben Integrirungs-Methode gehören auch alle unter der Form $dv+Pvdu+Qv^n du=o$ vorkommende Differential-Gleichungen. Setzt man nämlich $\frac{1}{v^{n-1}}=z$; ſo übergeht dieſelbe Gleichung in

$$dz-(n-1)Pzdu-(n-1)Qdu=o:$$

alſo iſt die damit zuſammenhängende Integral-Gleichung

$$ze^{-(n-1)\int Pdu}-(n-1)\int e^{-(n-1)\int Pdu}Qdu=C.$$

daher $\frac{e^{-(n-1)\int Pdu}}{v^{n-1}}-(n-1)\int\frac{Qdu}{e^{(n-1)\int Pdu}}=C.$

Beyſpiele.

Man ſoll $u^2dv+vudu+du=o$ integriren.

Die Diviſion durch u^2 giebt:

$$dv+\frac{vdu}{u}+\frac{du}{u^2}=o.$$

Und nun nach der Auflöſung der Aufgabe:

$$\int\frac{du}{u}=\log u;\quad e^{\int\frac{du}{u}}=e^{\log u}=u;$$

alſo

also $vu+\int u.\frac{du}{u^2}=vu+\log u=C$,

daher $v=\frac{C-\log u}{u}$.

Man soll $(1-u^2)dv+uvdu+adu=0$ integriren.

Die Division durch $1-u^2$ giebt

$$dv+\frac{vudu}{1-u^2}+\frac{adu}{1-u^2}=0.$$

Nun ist nach der Auflösung der vorigen Aufgabe

$$\int\frac{udu}{1-u^2}=-\frac{1}{2}\log(1-u^2)=-\log\sqrt{(1-u^2)}=\lg\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)}};$$

also ist $e^{\int\frac{udu}{1-u^2}}=e^{\log\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)}}}=\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)}}$,

mithin ist die verlangte Integral-Gleichung

$$\frac{v}{\sqrt{(1-u^2)}}+a\int\frac{du}{(1-u^2)\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{v}{\sqrt{(1-u^2)}}+a\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)^3}}$$

$$=\frac{v}{\sqrt{(1-u^2)}}+\frac{au}{\sqrt{(1-u^2)}}=C,\text{ daher}$$

$$v=\left(C-\frac{au}{\sqrt{(1-u^2)}}\right)\sqrt{(1-u^2)}.$$

Man soll $dv+vdu+au^n du=0$ integriren.

Es ist $\int du=u$, daher $e^{\int du}=e^u$:

also ist die verlangte Integral-Gleichung:

$$ve^u+a\int e^u u^n du=C.$$

Nimmt man $\int e^u u^n du$ nach (55. §. 8. Zus.) für $\log e=1$;

so ist $ve^u+ae^u(u^n-nu^{n-1}+n(n-1)u^{n-2}$

$$-n(n-1)(n-2)u^{n-3}+\ldots)=C,$$

mithin

mithin $v = Ce^{-u} - a(u^n - nu^{n-1} + n(n-1)u^{n-2} - n(n-1)(n-2)u^{n-3} + \dots)$.

Und dieſe Reihe bricht allemal ab, wenn n eine ganze bejahte Zahl iſt, etwa

für $n = 1$; $v = Ce^{-u} - au + a$.

für $n = 2$; $v = Ce^{-u} - au^2 + 2au - 2a$.

für $n = 3$; $v = Ce^{-u} - au^3 + 3u^2 - 3.2au + 3.2a$.

u. ſ. f.

Man ſoll $dv + \frac{nvdu}{\sqrt{(1+u^2)}} + adu = o$ integriren.

Es iſt $\int \frac{ndu}{\sqrt{(1+u^2)}} = n \log(u+\sqrt{(1+u^2)})$

nach (34. §. III. Form.).

$= \log(u+\sqrt{(1+u)^2})^n$,

mithin $e^{\int \frac{ndu}{\sqrt{(1-u^2)}}} = (u+\sqrt{(1+u^2)})^n$:

alſo $v(u+\sqrt{(1+u^2)})^n + a\int du(u+\sqrt{(1+u^2)})^n = C$.

Demnach nach (50. §. Zuſ.)

$$v(u+\sqrt{(1+u^2)})^n \frac{+a}{2(n+1)}(u+\sqrt{(1+u^2)})^{n+1} \frac{+a}{2(n-1)}(u+\sqrt{(1+u^2)})^{n-1} = C.$$

mithin $v = \frac{C}{(u+\sqrt{(1+u^2)})} \frac{-a}{2(n+1)}(u+\sqrt{(1+u^2)}) \frac{-a}{2(n-1)(u+\sqrt{(1+u^2)})}$

oder $v = C(\sqrt{(1+u^2)}-u)^n \frac{-an}{n^2-1}\sqrt{(1+u^2)} \frac{+au}{n^2-1}$.

Man

Man ſoll $dv+\frac{nvdu}{1-u^2}+adu=0$ integriren.

Es iſt $\int\frac{ndu}{1-u^2}=\frac{n}{2}\log\frac{1+u}{1-u}=\log\sqrt{\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n}$;

alſo $v\sqrt{\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n}+a\int du\sqrt{\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n}=C$,

und hieraus für $z=\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ folgt

$$vz^n+4a\int\frac{z^{n+1}dz}{(z^2+1)^2}=C.$$

Da alſo $\int\frac{z^{n+1}dz}{(z^2+1)^2}$ für alle ganze Zahlen n ſich vollkommen integriren läßt, nämlich allemal entweder nach (33. §. 1. Zuſ.) oder nach (40. §. 1. Zuſ.); ſo wird ſich auch für alle ganze Zahlen n eine Integral-Gleichung für $dv+\frac{nvdu}{1-u^2}+adu=0$ beſtimmen laſſen.

Für $n=-1$ findet man

$$dv-\frac{vdu}{1-u^2}+adu=0$$

und $v=\left(C+\frac{a\sqrt{(1-u^2)}}{u}+a\log\frac{1-\sqrt{(1-u^2)}}{u}\right)\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$.

Für $n=1$ erhält man

$$dv+\frac{vdu}{1-u^2}+adu=0$$

und $v=\left(C+\frac{a\sqrt{(1-u^2)}}{u}-a\log\frac{1-\sqrt{(1-u^2)}}{u}\right)\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$.

Anmerkung.

Um nun noch kurz zu zeigen, wie man einen Verschwindungs-Quotienten $d^n y$ von irgend einer höheren Ordnung n (15. §.) für den Fall zu integriren hat, wenn er einer Function y von einer einzigen veränderlichen Grösse x zugehört; so will ich die Entstehung dergleichen Verschwindungs-Quotienten, wie sie nach (15. §.) geschieht, und die damit verbundenen Folgen in einem Beyspiele erläutern.

Sey $y = a + bx + cx^2 + ex^3$;

so ist $dy = (b + 2cx + 3ex^2)dx$.

$d^2y = (2c + 6ex)dx^2$.

$d^3y = 6e\,dx^3$; $d^4y = 0$ u. s. f.

Aus diesem Beyspiele lernt man nun augenscheinlich, daß eine Function y von x ausser ihrem veränderlichen, von x abhängigen Theile, noch einen unveränderlichen, von x unabhängigen, Theil a haben kann, welcher aber bey dem ihr zugehörigen ersten Verschwindungs-Quotienten dy ganz wegfällt; daß ferner einen solchen unveränderlichen Theil nicht nur der erste Verschwindungs-Quotient dy, sondern auch jeder höhere haben kann, welcher doch bey dem nächst höheren Verschwindungs-Quotienten ganz wegfallen muß: so hatte b der Verschwindungs-Quotient dy, und b fiel weg bey d^2y; nun hatte d^2y die Constante 2c, und diese fiel weg bey d^3y. Und auf diese Bemerkung gründet sich folgende Integrirungsart, wobey die unveränderlichen Theile, welche nach und nach wegfallen, mit C′, C″, C‴ u. s. f. bezeichnet sind.

65. §. Aufgabe.

Einen vorgelegten Verschwindungs-Quotienten $d^n y$ von irgend einer Ordnung n, welcher einer gewissen Function y von einer veränderlichen Grösse x zugehören mag, zu integriren, und, wo es angeht, die Function y selbst daraus zu bestimmen.

Auflösung. 1) Es mag y was immer für eine Function von x seyn; so kann man doch den ihr zugehörigen nten Verschwindungs-Quotienten allemal durch $d^n y = P dx^n$ ausdrücken, und wenn der nächst vorhergehende $(n-1)$te Verschwindungs-Quotient $d^{n-1} y = Q dx^{n-1}$ war; so ist $dQ = P dx$ (14. §. 2. Zus.).

2) Also ist $\int dQ = \int P dx$, oder $Q = \int P dx$: da aber Q bey dem Verschwindungs-Quotienten $d^{n-1} y$ ausser dem veränderlichen, von x abhängigen Theil, noch einen unveränderlichen, von x unabhängigen Theil haben kann, welcher bey $dQ = P dx$, mithin auch bey $d^n y = P dx^n$ wegfällt (vor. §. Anm.); so nenne man diesen unveränderlichen Theil überhaupt C', daher setze man $Q = \int P dx + C'$.

3) Aber aus $d^n y = P dx^n$ folgt $\frac{d^n y}{dx^{n-1}} = P dx$; also $\int \frac{d^n y}{dx^{n-1}} = \int P dx$: es ist also wegen (n. 2.) allemal $Q = \int \frac{d^n y}{dx^{n-1}} + C'$, folglich ist wegen (n. 1.) allemal:

$$d^{n-1} y = \left(\int \frac{d^n y}{dx^{n-1}} + C' \right) dx^{n-1}.$$

4) Auf diese Art läßt sich demnach aus jedem nten Verschwindungs-Quotienten $d^n y$ der $(n-1)$te nach der Theorie der vorhergehenden Abschnitte aufsuchen: also wird man auf gleiche Art $d^{n-2}y$ aus $d^{n-1}y$, hernach $d^{n-3}y$ aus $d^{n-2}y$ u. s. f. suchen können, bis man endlich auf dy kömmt, welches die Function y selbst geben soll.

Beyspiele.

Sey $d^2y = x^m dx^2$ zu integriren.

Es ist $\frac{d^2y}{dx} = x^m dx$; $\int \frac{d^2y}{dx} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C'$:

also $dy = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + C'\right) dx$, und nun

$$y = \int \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + C'\right) dx + C''$$

oder $y = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + C'x + C''$.

Sey $d^3y = \frac{-3x dx^3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ zu integriren.

Es ist $\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{-3x\,dx}{\sqrt{1+x^2)^5}}$; $\int \frac{d^3y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} + C'$:

also $d^2y = \left(\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} + C'\right) dx^2$.

Ferner $\frac{d^2y}{dx} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} + C'dx$, daher

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} + C'x + C'':$$

also $dy \left(\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} + C'x + C''\right) dx$, mithin

$y =$

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}} + \int C'x\,dx + \int C''dx + C'''$$
$$= \sqrt{(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}C'x^2 + C''x + C'''.$$

Anmerkung.

Die Anwendung der Integral-Rechnung auf die Auflösung gewisser Aufgaben in der angewandten Mathematik kann noch auf eine andere Art geschehen, wodurch dergleichen Aufgaben ungemein leichter aufgelöst werden, als es geschehen würde, wenn man sich dazu irgend einer andern Methode bedienen wollte. Wenn wir mit Hülfe der Integral-Rechnung eine gewisse Grösse F suchen wollen; so betrachten wir einen unbestimmten Theil y davon als eine solche Function von irgend einer veränderlichen Grösse x, daß $y = F$ für einen gewissen Werth von x werden mag: die Function y ist uns zwar noch unbekannt, so wie es die Grösse F seyn soll; wir suchen aber den ihr zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dy zu bestimmen, um aus ihm die Function y selbst ableiten zu können, wie dieses in (29. 30. 31. 32. §.) gezeigt wurde. Nun aber wird uns gestattet seyn, die Differenz Δy der noch unbekannten Function y, welche Differenz mit einer Differenz Δx der veränderlichen Grösse x verbunden seyn mag (6. §. 1. Zus.), vor Augen zu haben; wir können einen unbestimmten Theil von ihr z nennen, und ihn als eine Function von irgend einer veränderlichen Grösse u betrachten, welche dergestalt beschaffen seyn mag, daß $z = \Delta y$ wird, sobald u einen gewissen Werth erlanget; wir können hernach den Verschwindungs-Quotienten dz zu-

bestimmen suchen, welcher der noch unbekannten Function z von u zugehört, und wenn wir ihn werden gefunden haben; so werden wir denselben für die veränderliche Grösse u nach der Theorie der vorhergehenden Abschnitte integriren, und dadurch die Function z bestimmen können: ist aber z einmal gefunden worden; so wird z, indem z ein unbestimmter Theil von Δy seyn soll, von Δx abhängen, und weil es einen Werth $u = P$ geben soll, wofür $z = \Delta y$ wird; so wird dadurch Δy aus z erhalten: ist endlich Δy bekannt; so wird daraus dy nach (5. §.) folgen, und y aus dy sich auf die gewöhnliche Art aufsuchen lassen, welches folgende Aufgabe näher erläutern wird.

66. §. Aufgabe.

Es ist z eine solche Function von der veränderlichen Grösse u, welche für einen gewissen Werth von u, etwa für $u = P$, in die Differenz Δy einer noch unbekannten Function y von x übergeht, und der Verschwindungs-Quotient dz, welcher der Function z von u zugehört, ist bekannt; man soll daraus die Function y von x bestimmen.

Auflösung. 1) Es kann zwar seyn, und dieses geschieht auch gewöhnlich bey wirklicher Anwendung der Integral-Rechnung, daß z von der Differenz Δx der veränderlichen Grösse x, wovon y eine Function seyn soll, abhängt; doch wird hier z nur als eine Function von u betrachtet, dergestalt, daß dz nur denjenigen Verschwindungs-Quotienten aus-

ausdrückt, welcher aus z für die veränderliche Grösse u nach (3. §. 2. Zus. und 5. §.) entstehen würde: sind demnach x und Δx bey z vorhanden; so werden diese Grössen daselbst als unveränderliche angesehen.

2) Soll man also z aus dz bestimmen; so integrire man dz für die veränderliche Grösse u, ohne Rücksicht auf x und Δx, wenn vielleicht diese Grössen bey dz befindlich sind.

3) Hat man auf diese Art $z = p$ gefunden, weil z eine Function von u ist, und Δy aus z für $u = P$ entstehen soll; so setze man $u = P$ bey $z = p$, um die Differenz Δy zu bekommen.

4) Aus der einmal gefundenen Differenz Δy suche man den Verschwindungs-Quotienten dy nach (5. §.), und integrire denselben für die veränderliche Grösse x, worauf er sich bezieht; so wird das Integral die verlangte Function y von x seyn.

Beyspiele.

Es ist $dz = \Delta x u du - \Delta x u^2 du$, und für $u = a$ wird Δy aus z; man soll y bestimmen.

Es ist $z = \Delta x \int u du - \Delta x \int u^2 du$

$= \frac{1}{2} \Delta x u^2 - \frac{1}{3} \Delta x u^3$:

also ist $\Delta y = (\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} a^3) \Delta x$;

mithin $dy = \frac{1}{2} a^2 dx - \frac{1}{3} a^3 dx$,

und nun $y = \frac{1}{2} a^2 x - \frac{1}{3} a^3 x + C$.

Es ist $dz = \frac{\Delta x du}{1+3u} + u\Delta x du\sqrt{(x-u^2)}$, und für $u = a$ entstehet Δy aus z; man soll y bestimmen.

Es ist $z = \Delta x \int \frac{du}{1+3u} + \Delta x \int u du \sqrt{(x-u^2)}$

$$= \frac{\Delta x}{3} \log(1+3u) - \tfrac{1}{3}\Delta x\sqrt{(x-u^2)^3};$$

also $\Delta y = \frac{\Delta x}{3}\log(1+3a) - \tfrac{1}{3}\Delta x\sqrt{(x-a^2)^3}$,

mithin $dy = \frac{dx}{3}\log(1+3a) - \tfrac{1}{3}dx\sqrt{(x-a^2)^3}$,

folglich $y = \tfrac{1}{3}x\log(1+3a) - \frac{2}{3.5}\sqrt{(x-a^2)^5} + C$.

Es ist $dz = \frac{\Delta x u du}{\sqrt{(1+u^2)}} + \Delta x u^2 du$, und für $u = a$ wird $z = \Delta y$; man soll y bestimmen.

Es ist $z = \Delta x \int \frac{udu}{\sqrt{(1+u^2)}} + \Delta x \int u^2 du$

$$= \Delta x\sqrt{(1+u^2)} + \tfrac{1}{3}\Delta x u^3;$$

also $\Delta y = \Delta x\sqrt{(1+(ax+\Delta x)^2)} + \tfrac{1}{3}\Delta x(ax+\Delta x)^3$.

Der Differenz-Quotient ist (5. §.)

$$\sqrt{(1+(ax+\Delta x)^2)} + \tfrac{1}{3}(ax+\Delta x)^3.$$

also ist der Verschwindungs-Quotient (5. §.)

$$dy = dx\sqrt{(1+a^2x^2)} + \tfrac{1}{3}a^3x^3dx,$$

mithin $y = \int dx\sqrt{(1+a^2x^2)} + \tfrac{1}{3}a^3\int x^3dx + C$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{(1+a^2x^2)} + \frac{1}{2a}\log(ax+\sqrt{(1+a^2x^2)}) + \tfrac{1}{12}a^3x^4 + C.$$

Anmer-

Anmerkung.

In der Folge beym Unterrichte der Maschinen-Lehre werden Fälle vorkommen, wobey man sich dieser Untersuchung mit Vortheile bedient. Es kann auch geschehen, daß man keinen Werth von u weiß, wofür $z = \Delta y$ werden soll, und alsdann wird man wenigstens zween Werthe für u wissen, die dergestalt beschaffen seyn mögen, daß für einen $z > \Delta y$, und für den andern $z < \Delta y$ sey, wie immer auch Δx klein seyn mag: diese Bedingungen werden sodann hinreichen, dy daraus zu bestimmen (20. §.).

Drittes Hauptstück.

Verschiedene Anwendungen der Differential- und Integral-Rechnung.

Der I. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Erfindung der Werthe, welche gegebene Functionen alsdann erlangen, wenn die darinn vorhandene veränderliche Grösse um eine gegebene Grösse zu oder abnimmt.

67. §. Aufgabe.

Es ist eine Function y von x gegeben, wobey die veränderliche Grösse x um eine gegebene Grösse ω wachsen mag; man soll den Werth Y bestimmen, welchen die Function y dafür erlangen muß.

Auflösung. 1) Jede Function y kann durch folgende Reihe ausgedrückt werden, welche ihren Werth genau angiebt (6. §.).

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots\ldots$$

Der verlangte Werth, welchen die Function y erlangen muß, wenn x um ω wächst, muß also seyn:

$$Y = A(x+\omega)^a + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c + \ldots\ldots$$

2) Wenn man nun die hier befindlichen Potenzen nach (I. B. 77. §.) entwickelt; so findet man:

Y=

$$Y = Ax^a + \frac{Aa}{1}x^{a-1}.\omega + \frac{Aa(a-1)}{1.2}x^{a-2}.\omega^2$$
$$+ \frac{Aa(a-1)(a-2)}{1.2.3}x^{a-3}.\omega^3 + \text{------}$$
$$+ Bx^b + \frac{Bb}{1}x^{b-1}.\omega + \frac{Bb(b-1)}{1.2}x^{b-2}.\omega^2$$
$$+ \frac{Bb(b-1)(b-2)}{1.2.3}x^{b-3}.\omega^3 + \text{------}$$
$$+ Cx^c + \frac{Cc}{1}x^{c-1}.\omega + \frac{Cc(c-1)}{1.2}x^{c-2}.\omega^2$$
$$+ \frac{Cc(c-1)(c-2)}{1.2.3}x^{c-3}.\omega^3 + \text{------}$$
$$+ \text{- - - - - - - - - - - -}$$
$$\text{- - - - - - - - - - - -}$$
$$\text{- - - - - - - - - - - -}$$

Daß nun die erste verticale Reihe die Function y selbst enthält, dieses ist für sich klar: um aber den Werth jeder darauf folgenden verticalen Reihe gehörig zu beurtheilen, nenne man bey dieser Untersuchung die erste verticale Reihe, wo die erste Potenz von ω vorkömmt, und alsdann wird einleuchtend seyn, daß wenn man die Entwickelung der Potenzen $(x+\omega)^a$, $(x+\omega)^b$ u. s. f. nach (I. B. 77. §.) fortsetzte, die rte verticale Reihe folgende seyn würde,

$$\frac{Aa(a-1)(a-2)\text{----}(a-r+1)}{1.2.3.4\text{-----}r}x^{a-r}.\omega^r$$
$$\frac{Bb(b-1)(b-2)\text{----}(b-r+1)}{1.2.3.4\text{-----}r}x^{b-r}.\omega^r$$

$$\frac{Cc(c-1)(c-2)\cdots(c-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots r}x^{c-r}\cdot\omega^r$$

Man findet aber nach (15. §.)

$$\frac{d^r\cdot Ax^a}{dx^r}=Aa(a-1)(a-2)\cdots(a-r+1)x^{a-r}.$$

$$\frac{d^r\cdot Bx^b}{dx^r}=Bb(b-1)(b-2)\cdots(b-r+1)x^{b-r}.$$

$$\frac{d^r\cdot Cx^c}{dx^r}=Cc(c-1)(c-2)\cdots(c-r+1)x^{c-r}.$$

u. s. f.

Die rte verticale Reihe bey Y findet man also, wenn man die Summe $d^rAx^a+d^rBx^b+d^rCx^c+\cdots$ noch mit $\frac{\omega^r}{1.2.3.4\cdots r.dx^r}$ multiplicirt. Da also in (n. 1.) der rte Verschwindungs-Quotient $d^ry=d^rAx^a+d^rBx^b+d^rCx^c+\cdots$ seyn muß; so ist die rte verticale Reihe bey Y genau.

$$=\frac{\omega^r d^ry}{1.2.3\cdots r.dx^r}$$

Und hieraus ergeben sich die erste, zweyte, dritte, vierte verticale Reihe von Y u. s. f. für $r=1$, $r=2$, $r=3$, $r=4$ u. s. f., wodurch nun der verlangte Werth von y, wie folgt, ausgedrückt wird:

$$Y=y+\frac{\omega dy}{1.dx}+\frac{\omega^2d^2y}{1.2.dx^2}+\frac{\omega^3d^3y}{1.2.3.dx^3}+\frac{\omega^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$$
$$+\frac{\omega^5d^5y}{1.2.3.4.5.dx^5}+\cdots+\frac{\omega^rd^ry}{1.2.3\cdots r.dx^r}+\cdots$$

1. Zuſatz.

Die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. ſ. f. ſind beſtimmte von der Function y abhängige Gröſſen (14. §. 4. Zuſ.), welche ſich für jede Function y von x ganz genau angeben laſſen: nach dieſer Formul iſt alſo allemal möglich, denjenigen Werth, welchen eine Function y von x erlangen ſoll, wenn die veränderliche Gröſſe x um eine gegebene ω zunimmt, zu beſtimmen, wenigſtens durch eine Reihe auszudrücken, die alsdann abbrechen mag, wenn die Function y von der Beſchaffenheit iſt, daß für ſie ein gewiſſer Verſchwindungs-Quotient $d^r y = 0$ ſeyn muß (14. §. 3. Zuſ.): denn wenn dieſes wirklich zutrifft; ſo müſſen auch alle höhere Verſchwindungs-Quotienten gleich Null ſeyn, $d^{r+1}y = 0$, $d^{r+2}y = 0$ u. ſ. f. (14. §. 2. 3. Zuſ.), mithin müſſen alle Glieder der obigen Reihe wegfallen, welche durch die Verſchwindungs-Quotienten $d^r y$, $d^{r+1}y$, $d^{r+2}y$ u. ſ. f. beſtimmt ſind, folglich wird der verlangte Werth Y durch eine beſtimmte Anzahl von Gliedern, nämlich durch r Glieder ausgedrückt werden können.

Beyſpiele.

1. Man ſoll den Werth von $y = x^2 - x$ angeben, welchen dieſe Function erlanget, wenn bey ihr $x+1$ aus x wird.

Es ist $dy = (2x-1)dx$; $\frac{dy}{dx} = 2x-1$.

$d^2y = 2dx^2$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$.

$d^3y = 0$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

u. s. f.

Ueberdem ist hier $\omega = 1$, und man braucht nur die drey ersten Glieder der obigen Reihe, den verlangten Werth zu bestimmen: heißt er nämlich Y; so wird seyn:

$$Y = y + \frac{\omega dy}{1.dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{1.2.dx^2} + \ldots\ldots$$

$$= x^2 - x + \frac{1(2x-1)}{1} + \frac{1^2.2}{1.2} = x^2 + x.$$

Die Richtigkeit dieser Auflösung erhellet sogleich, wenn man bey der vorgelegten Function $y = x^2 - x$ statt x nun $x+1$ setzt; denn man wird dadurch erhalten $(x+1)^2 - (x+1) = x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x^2 + x$, eben das, was die obige Formul gegeben hat.

II. Man soll den Werth bestimmen, welchen die Function $y = x^3 + x^2 + x$ erlangen würde, wenn man bey ihr $x+2$ statt x setzte.

Es ist $dy = (3x^2 + 2x + 1)\,dx$; $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x + 1$.

$d^2y = (6x+2)\,dx^2$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x+2$.

$d^3y = 6dx^3$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$.

$d^4y = 0$; $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$.

u. s. f.

Da also überdem $\omega = 2$ seyn soll; so findet man den verlangten Werth Y aus der obigen Reihe, wie folgt:

$$Y = y + \frac{\omega dy}{1.dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3\,dx^3}$$

$$= x^3 + x^2 + x + \frac{2(3x^2+2x+1)}{1} + \frac{2^2(6x+2)}{1.2} + \frac{2^3.6}{1.2.3}$$

$$= x^3 + 7x^2 + 17x + 14.$$

Und dieses könnte man sonst unmittelbar aus der gegebenen Function x^3+x^2+x erhalten, wenn man bey ihr $x+2$ statt x setzte; denn sie übergienge dafür in $(x+2)^3 + (x+2)^2 + x + 2 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^2 + 4x + 4 + x + 2 = x^3 + 7x^2 + 17x + 14$.

2. Zusatz.

Hätte ω bey der vorhergehenden Untersuchung das Zeichen (—) vor sich gehabt; so würde man eben die Formul für Y gefunden haben, mit dem Unterschiede nur, daß nun alle gerade Potenzen von ω bejaht, und alle ungerade verneint wären (I. B. 70. §. 1. Zus.), daher wäre:

$$Y = y - \frac{\omega dy}{1.dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{1.2.dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$$

$$- \frac{\omega^5 d^5y}{1.2.3.4.5.dx^5} + \ldots \frac{\pm \omega^r d^r y}{1.2.3.4 \cdots r.dx^r}.$$

Und diese Formul soll denjenigen Werth Y geben, welchen eine vorgelegte Function y alsdann erlangen würde, wenn bey ihr die veränderliche Grösse x um eine gegebene ω abnähme, mithin $x - \omega$ aus x würde.

Bey-

Die erste Gleichung wird überhaupt durch jede Function y von x erfüllt, welche für $x=o$ auch gleich Null ist; die zweyte Gleichung aber wird durch jede Function y von x erfüllt, welche für $x=o$ einen gewissen Werth A erlangt.

6. Zusatz.

Setzt man bey der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe $\omega=a-x$; so verwandelt sich die dortige Formul in

$$y+\frac{(a-x)dy}{dx}+\frac{(a-x)^2d^2y}{2.dx^2}+\frac{(a-x)^3d^3y}{2.3.dx^3}+\ldots=A.$$

Da aber bey derselben Aufgabe $\omega=a-x$ setzen, soviel hieß, als annehmen, es sey $x+\omega=x+a-x=a$ aus x geworden; so ist dieses eine allgemeine Gleichung, welche durch jede Function y von x erfüllt wird, die für $x=a$ einen Werth $=A$ erlangt.

Anmerkung.

Weil die bisherige Theorie ganz allgemein denjenigen Werth zu bestimmen lehrt, welchen was immer für eine Function y von x alsdann erlangen würde, wenn die veränderliche Grösse x bey ihr um eine gegebene ω zu- oder abnähme, und dergleichen Werthe bey unzähligen wichtigsten mathematischen Untersuchungen verlangt werden; so kann hier wohl nichts einleuchtender seyn, als der Gebrauch, der sich davon machen läßt. Wir wollen dieses hier in einigen Beyspielen zeigen: wer ausser diesen und denjenigen Anwendungen, welche in den nächst folgenden Abschnitten angeführt werden sollen, andere Beweise von der Brauchbarkeit der vorhergehenden Theorie, so wie der gesammten

im ersten Hauptstücke ausgeführten Differential-Rechnung verlangt, dem soll das unschätzbarste Werk des Hrn. Euler[a] empfohlen seyn.

(a) Institut. Calculi Differentialis.

I.

Es ist der Logarithme einer Zahl x gegeben worden; man soll dadurch die Logarithmen bestimmen, welche den Zahlen $x+\omega$ und $x-\omega$ zugehören.

Sey $y=\log x$; so ist $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1.2}{x^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{-1.2.3}{x^4}$; $\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{1.2.3.4}{x^5}$; und überhaupt aus $\frac{d^ry}{dx^r}=\frac{\pm 1.2.3.4\cdots r-1}{x^r}$ erhält man $\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}=\frac{\mp 1.2.3.4\cdots(r-1)r}{x^{r+1}}$. Da nun $\log(x+\omega)$ oder $\log(x-\omega)$ nichts anders als derjenige Werth ist, welchen die Function $y=\log x$ alsdann erlangt, wenn x um ω zu- oder abnimmt; so findet man jene Logarithmen nach der Auflös. der vorig. Aufg. wie sie folgen.

1) $\mathrm{Log}(x+\omega)=\mathrm{Log}\,x+\frac{\omega}{x}-\frac{\omega^2}{2x^2}+\frac{\omega^3}{3x^3}-\frac{\omega^4}{4x^4}+\cdots$

2) $\mathrm{Log}(x-\omega)=\mathrm{Log}\,x-\frac{\omega}{x}-\frac{\omega^2}{2x^2}-\frac{\omega^3}{3x^3}-\frac{\omega^4}{4x^4}-\cdots$

Setzt man $\omega=1$, und zieht man 2) von 1) ab; so erhält man $\log(x+1)-\mathrm{Log}(x-1)=\mathrm{Log}\,\frac{x+1}{x-1}$, wie folgt in 3).

3) $\text{Log}\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \frac{1}{9x^9} + \ldots\ldots\right)$.

Der vortheilhafteste Gebrauch der Reihen 1) 2) findet alsdann Statt, wenn ω in Ansehung x sehr klein ist, wie dieses geschehen würde, wenn x eine ganze Zahl und ω einen kleinen Bruch bedeutete, da dann Log x aus den schon berechneten Tafeln genommen werden könnte. Was aber die Reihe 3) anbelangt, diese wurde in (I. B. 137. §.) aus andern Gründen gefunden, und ihr Nutzen bey der Berechnung der Logarithmen daselbst genugsam erläutert.

II.

Man soll die Reihen für den Sinus und Cosinus der Summe zweener Kreisbogen x, ω, bestimmen.

Sey $y = \text{Sin}\, x$ und $z = \text{Cos}\, x$; so wird seyn, nach (22. §. und 3. Zus.),

$\frac{dy}{dx} = \text{Cos}\, x.$	$\frac{dz}{dx} = -\text{Sin}\, x.$
$\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{Sin}\, x.$	$\frac{d^2z}{dx^2} = -\text{Cos}\, x.$
$\frac{d^3y}{dx^3} = -\text{Cos}\, x.$	$\frac{d^3z}{dx^3} = \text{Sin}\, x.$
$\frac{d^4y}{dx^4} = \text{Sin}\, x$	$\frac{d^4z}{dx^4} = \text{Cos}\, x.$
$\frac{d^5y}{dx^5} = \text{Cos}\, x.$	$\frac{d^5z}{dx^5} = -\text{Sin}\, x.$
$\frac{d^6y}{dx^6} = -\text{Sin}\, x.$	$\frac{d^6z}{dx^6} = -\text{Cos}\, x.$
u. s. f.	u. s. f.

Da

Da nun $\mathrm{Sin}(x+\omega)$, $\mathrm{Cof}(x+\omega)$ diejenigen Werthe bezeichnen, welche die Functionen $y=\mathrm{Sin}x$, $z=\mathrm{Cof}x$ erlangen würden, wenn bey ihnen die veränderliche Gröſſe x um ω zunähme; ſo findet man $\mathrm{Sin}(x+\omega)$ und $\mathrm{Cof}(x+\omega)$ aus der allgemeinen Reihe (Auflöſ. der vorigen Aufg.) auf dieſe Art.

1) $$\mathrm{Sin}(x+\omega)=\mathrm{Sin}x+\omega\,\mathrm{Cof}x-\frac{\omega^2\mathrm{Sin}x}{2}-\frac{\omega^3\mathrm{Cof}x}{2.3}+\frac{\omega^4\mathrm{Sin}x}{2.3.4}+\frac{\omega^5\mathrm{Cof}x}{2.3.4.5}-\frac{\omega^6\mathrm{Sin}x}{2.3.4.5.6}-\ldots$$

2) $$\mathrm{Cof}(x+\omega)=\mathrm{Cof}x-\omega\,\mathrm{Sin}x-\frac{\omega^2\mathrm{Cof}x}{2}+\frac{\omega^3\mathrm{Sin}x}{2.3}+\frac{\omega^4\mathrm{Cof}x}{2.3.4}-\frac{\omega^5\mathrm{Sin}x}{2.3.4.5}-\frac{\omega^6\mathrm{Cof}x}{2.3.4.5.6}+\ldots$$

Setzt man $-\omega$ ſtatt ω; ſo findet man hieraus folgende brauchbare Reihen für den Sinus und Cosinus der Differenz zweener Kreisbogen x, ω.

3) $$\mathrm{Sin}(x-\omega)=\mathrm{Sin}x-\omega\,\mathrm{Cof}x-\frac{\omega^2\mathrm{Sin}x}{2}+\frac{\omega^3\mathrm{Cof}x}{2.3}+\frac{\omega^4\mathrm{Sin}x}{2.3.4}-\frac{\omega^5\mathrm{Cof}x}{2.3.4.5}-\frac{\omega^6\mathrm{Sin}x}{2.3.4.5.6}+\ldots$$

4) $$\mathrm{Cof}(x-\omega)=\mathrm{Cof}x+\omega\,\mathrm{Sin}x-\frac{\omega^2\mathrm{Cof}x}{2}-\frac{\omega^3\mathrm{Sin}x}{2.3}+\frac{\omega^4\mathrm{Cof}x}{2.3.4}+\frac{\omega^5\mathrm{Sin}x}{2.3.4.5}-\frac{\omega^6\mathrm{Cof}x}{2.3.4.5.6}-\ldots$$

Addirt man 3) zu 1); ſo erhält man $\mathrm{Sin}(x+\omega)+\mathrm{Sin}(x-\omega)=$ u. ſ. f. Da nun jene Summe $=2\,\mathrm{Sin}x\,\mathrm{Cof}\omega$ iſt (I. B. 156. §. 1. Zuſ.); ſo wird man dieſelbe Gleichung

durch $2\,\mathrm{Sin}\,x$ dividiren können, und dann findet man folgende Reihe 5). Ziehet man aber 3) von 1) ab; so findet man $\mathrm{Sin}\,(x+\omega)-\mathrm{Sin}\,(x-\omega)=$ u. s. f.: da also jene Differenz $=2\,\mathrm{Sin}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,x$ ist (I. B. 156. §. 1. Zus.); so wird diese Gleichung durch $2\,\mathrm{Cos}\,x$ dividirt folgende Reihe 6) geben.

$$5)\ \mathrm{Cos}\,\omega=1-\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{2.3.4}-\frac{\omega^6}{2.3.4.5.6}+\frac{\omega^8}{2.3.4.5.6.7.8}-\ldots$$

$$6)\ \mathrm{Sin}\,\omega=\omega-\frac{\omega^3}{2.3}+\frac{\omega^5}{2.3.4.5}-\frac{\omega^7}{2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots$$

Sonst hätte man diese aus andern Gründen schon bekannten Reihen (I. B. 158. §.) unmittelbar aus 1) 2) für $x=0$ erhalten können, wofür $\mathrm{Sin}\,(x+\omega)=\mathrm{Sin}\,\omega$; $\mathrm{Cos}\,(x+\omega)=\mathrm{Cos}\,\omega$; $\mathrm{Sin}\,x=0$; $\mathrm{Cos}\,x=1$ wird.

Wollte man $\mathrm{Tang}\,(x+\omega)$, $\mathrm{Tang}\,(x-\omega)$, $\mathrm{Cot}\,(x+\omega)$, $\mathrm{Cot}\,(x-\omega)$ suchen; so würde man auf eine ähnliche Art zu verfahren haben; doch können nun diese Functionen nach (I. B. 131. §.) aus folgenden Gleichungen hergeleitet werden, wovon die Gründe in 1) 2) 3) 4) liegen.

$$\mathrm{Tang}\,(x+\omega)=\frac{\mathrm{Sin}\,x+\omega\,\mathrm{Cos}\,x-\frac{\omega^2\mathrm{Sin}\,x}{2}-\frac{\omega^3\mathrm{Cos}\,x}{2.3}+\ldots\ldots}{\mathrm{Cos}\,x-\omega\,\mathrm{Sin}\,x-\frac{\omega^2\mathrm{Cos}\,x}{2}+\frac{\omega^3\mathrm{Sin}\,x}{2.3}+\ldots\ldots}$$

$$\mathrm{Tang}\,(x-\omega)=\frac{\mathrm{Sin}\,x-\omega\,\mathrm{Cos}\,x-\frac{\omega^2\mathrm{Sin}\,x}{2}+\frac{\omega^3\mathrm{Cos}\,x}{2.3}+\ldots\ldots}{\mathrm{Cos}\,x+\omega\,\mathrm{Sin}\,x-\frac{\omega^2\mathrm{Cos}\,x}{2}-\frac{\omega^3\mathrm{Sin}\,x}{2.3}+\ldots\ldots}$$

Cot

$$\text{Cot}(x+\omega) = \frac{\text{Cos}\,x - \omega\,\text{Sin}\,x - \frac{\omega^2\text{Cos}\,x}{2} + \frac{\omega^3\text{Sin}\,x}{2.3} + \ldots\ldots}{\text{Sin}\,x + \omega\,\text{Cos}\,x - \frac{\omega^2\text{Sin}\,x}{2} - \frac{\omega^3\text{Cos}\,x}{2.3} + \ldots\ldots}$$

$$\text{Cot}(x-\omega) = \frac{\text{Cos}\,x + \omega\,\text{Sin}\,x - \frac{\omega^2\text{Cos}\,x}{2} - \frac{\omega^3\text{Sin}\,x}{2.3} + \ldots\ldots}{\text{Sin}\,x - \omega\,\text{Cos}\,x - \frac{\omega^2\text{Sin}\,x}{2} + \frac{\omega^3\text{Cos}\,x}{2.3} + \ldots\ldots}$$

III.

Der Kreisbogen, deſſen Sinus $= x$ ſeyn ſoll, wird als bekannt vorausgeſetzt; man ſoll den Kreisbogen beſtimmen, deſſen Sinus $= x + \omega$ ſeyn mag.

Alſo iſt Arc Sin x gegeben, und man verlangt Arc Sin $(x+\omega)$ zu wiſſen. Dem zufolge ſetze man $y = \text{Arc Sin}\,x$; ſo iſt der dieſem Kreisbogen zugehörige Cosinus $= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, und nun nach (22. §.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \text{mithin:}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}. \quad \text{u. ſ. f.}$$

Da also Arc Sin $(x+\omega)$ der Werth ist, welchen die Function $y = \text{Arc Sin } x$ erlangen muß, indem x um ω wächst; so erhält man nun diesen Werth nach der Auflösung der vorigen Aufgabe wie folgt.

$$1)\ \text{Arc Sin}(x+\omega) = \text{Arc Sin } x + \frac{\omega}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\omega^2 . x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{\omega^3(1+2x^2)}{2.3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{2.3.4.(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{2.3.4.5(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} + \cdots$$

Für $x = 0$ wäre Arc Sin $x = \text{Arc Sin } 0 = 0$, mithin.

$$2)\ \text{Arc Sin}\,\omega = \omega + \frac{\omega^3}{2.3} + \frac{3.\omega^5}{2.4.5} + \frac{3.5.\omega^7}{2.4.6.7} + \cdots$$

Nach der Reihe 1) findet man sehr bequem den Kreisbogen, dessen Sinus $= x+\omega$ ist, wenn der Kreisbogen, dessen Sinus $= x$ seyn soll, bekannt, und ω eine kleine Zahl ist: hingegen dient 2) zur Bestimmung eines jeden Kreisbogens, dessen Sinus ω gegeben seyn mag.

Setzt man ferner $-\omega$ statt ω in 1); so erhält man Arc Sin $(x-\omega)$ durch Arc Sin x.

IV.

Der Kreisbogen, dessen Cosinus $= x$ seyn mag, ist bekannt; man soll den Kreisbogen bestimmen, dessen Cosinus $= x+\omega$ ist.

Man soll nämlich Arc Cos $(x+\omega)$ aus Arc Cos x bestimmen. Dem zufolge setze man $y = \text{Arc Cos } x$: da nun der diesem Kreisbogen zugehörige Sinus $= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist; so hat man nach (22. §. 2. Zus.)

$$\frac{dy}{dx}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$; so wird seyn:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-(1+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$;

$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-(9x+6x^3)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$; $\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-(9+72x^2+24x^4)}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$;

u. s. f.

Welche Werthe mit den beym vorigen Beyspiele bestimmten vollkommen übereinkommen, und nur den Zeichen nach von ihnen unterschieden sind; weil hier $\frac{dy}{dx}$ verneint ist, da doch $\frac{dy}{dx}$ oben bejaht war. Nun ist Arc Cos$(x+\omega)$ derjenige Werth, welchen die Function $y = \text{Arc Cos } x$ erlangt, während daß x um ω zunimmt: man findet also Arc Cos$(x+\omega)$ nach der Auflös. der vor. Aufg. wie folgt.

1) $\text{Arc Cos}(x+\omega) = \text{Arc Cos } x \frac{-\omega}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-\omega^2 x}{2(1-x^2)}$

$\frac{-\omega^3(1+2x^2)}{2.3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{-\omega^4(9x+6x^3)}{2.3.4(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot \frac{-\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{2.3.4.5(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} \cdot \ldots$

Mithin ist für $x = 0$.

2) $\text{Arc Cos } \omega = \frac{1}{2}\pi - \omega - \frac{\omega^3}{2.3} - \frac{3.\omega^5}{2.4.5} - \frac{3.5.\omega^7}{2.4.6.7} \ldots$

Wobey π die halbe Kreislinie bedeuten soll.

V.

Für einen bekannten Kreisbogen, deſſen Tangente oder Cotangente $= x$ ſeyn mag, denjenigen Kreisbogen zu beſtimmen, deſſen Tangente oder Cotangente $= x+\omega$ ſeyn ſoll.

Indem x in $x+\omega$ übergeht, ſoll $y = \text{Arc Tang } x$ in $Y = \text{Arc Tang } (x+\omega)$, und $z = \text{Arc Cot } x$ in $Z = \text{Arc Cot } (x+\omega)$ übergehen, mithin iſt nach der Auflöſ. der vor. Aufgabe

$$\text{Arc Tang}(x+\omega) = \text{Arc Tang } x + \frac{\omega dy}{1.dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3}$$
$$+ - - - - - -$$

$$\text{Arc Cot}(x+\omega) = \text{Arc Cot } x + \frac{\omega dz}{1.dx} + \frac{\omega^2 d^2z}{1.2.dx^2} + \frac{\omega^3 d^3z}{1.2.3.dx^3}$$
$$+ - - - - - -$$

Nun iſt nach (22. §. 9. und 11. Zuſ.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \text{ und } \frac{dz}{dx} = \frac{-1}{1+x^2} = \frac{-dy}{dx} \cdot$$

$$\text{alſo } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-d^2y}{dx^2} \cdot$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}; \quad \frac{d^3z}{dx^3} = \frac{-d^3y}{dx^3} \cdot$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}; \quad \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{-d^4y}{dx^4} \cdot$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24-240x^2+120x^4}{(1+x^2)^5}; \quad \frac{d^5z}{dx^5} = \frac{-d^5y}{dx^5} \cdot$$

$\frac{d^6y}{dx^6}$

$$\frac{d^6y}{dx^6}=\frac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+x^2)^6};\ \frac{d^6z}{dx^6}=\frac{-d^6y}{dx^6}..$$

$$\frac{d^7y}{dx^7}=\frac{-720+15120x^2-25200x^4+5040x^6}{(1+x^2)^7};\ \frac{d^7z}{dx^7}=\frac{-d^7y}{dx^7}..$$

u. s. f.

Daher 1) $\text{ArcTang}(x+\omega)=\text{ArcTang}\,x+\frac{\omega}{1+x^2}\frac{-2x\omega^2}{2(1+x^2)^2}$

$$+\frac{(6x^2-2)\omega^3}{2.3(1+x^2)^3}+\frac{(24x-24x^3)\omega^4}{2.3.4(1+x^2)^4}+\frac{(24-240x^2+120x^4)\omega^5}{2.3.4.5(1+x^2)^5}$$

$$+\frac{(2400x^3-720x-720x^5)\omega^6}{2.3.4.5.6(1+x^2)^6}$$

$$+\frac{(5040x^6-25200x^4+15120x^2-720)\omega^7}{2.3.4.5.6.7(1+x^2)^7}$$

u. s. f.

2) $\text{ArcCot}(x+\omega)=\text{ArcCot}\,x-\frac{\omega}{1+x^2}+\frac{2x\omega^2}{2(1+x^2)^2}$

$$-\frac{(6x^2-2)\omega^3}{2.3(1+x^2)^3}\ \frac{(24x-24x^3)\omega^4}{2.3.4(1+x^2)^4}-\frac{(24-240x^2+120x^4)\omega^5}{2.3.4.5.(1+x^2)^5}$$

$$-\frac{(2400x^3-720x-720x^5)\omega^6}{2.3.4.5.6(1+x^2)^6}$$

$$-\frac{(5040x^6-25200x^4+15120x^2-720)\omega^7}{2.3.4.5.6.7(1+x^2)^7}$$

u. s. f.

Mithin ist für $x=0$.

3) $\text{ArcTang}\,\omega=\omega-\frac{\omega^3}{3}+\frac{\omega^5}{5}-\frac{\omega^7}{7}+\text{- - - - -}$

4) $\text{ArcCot}\,\omega=\frac{1}{2}\pi-\omega+\frac{\omega^3}{3}-\frac{\omega^5}{5}+\frac{\omega^7}{7}\text{- - - - -}$

Der

Der II. Abschnitt.

Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die Summirung der Reihen.

68. §. Aufgabe.

Aus dem gegebenen summatorischen Gliede einer gewissen Reihe das allgemeine Glied derselben Reihe zu bestimmen.

Auflösung. 1) Wenn x den Index des summatorischen Gliedes ST bedeutet; so müssen das summatorische Glied ST und das allgemeine T gewisse Functionen von x seyn (I. B. 129. 130. §.).

Ferner ist bekannt (a. a. O.), daß man aus jedem summatorischen Gliede ST das allgemeine T erhält, wenn man $x-1$ statt x in ST setzt, und den Werth sT, welchen ST dafür erlangen mag, vom summatorischen Gliede ST abzieht, dergestalt, daß $T=ST-sT$ sey.

2) Nun aber findet man den Werth sT aus (67. §. 2. Zus.), wenn man bey der dortigen Formul $y=ST$, und $\omega=1$ setzt; man findet nämlich:

$$sT=ST-\frac{dST}{1.dx}+\frac{d^2ST}{1.2.dx^2}-\frac{d^3ST}{1.2.3.dx^3}+\frac{d^4ST}{1.2.3.4.dx^4}$$
$$-\frac{d^5ST}{1.2.3.4.5.dx^5}+\text{- - - - - - -}$$

Daher

Daher muß man dieſes von ST abziehen, um T, wie folgt, zu erhalten:

$$T = \frac{dST}{dx} - \frac{d^2ST}{2dx^2} + \frac{d^3ST}{2.3.dx^3} - \frac{d^4ST}{2.3.4.dx^4} + \text{- - -}$$

Zuſatz.

Aus dieſer Formul kann man daher für jedes gegebene ſummatoriſche Glied ST einer Reihe, welches als eine Function des Index x betrachtet wird, das ihr zugehörige allgemeine Glied T ableiten: weil aber dieſe Formul eine ohne Ende fortlaufende Reihe für das allgemeine Glied T giebt, wenn nicht das ſummatoriſche Glied ST eine ſolche Function ſeines Indicis x iſt, wofür ein Verſchwindungs-Quotient $d^rST = 0$ iſt (14. §. 2. 3. Zuſ.); ſo ſieht man wohl ein, daß dieſe Formul in ſehr wenigen Fällen brauchbar iſt.

Beyſpiele.

Für das ſummatoriſche Glied $ST = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}bx$ das allgemeine T zu beſtimmen.

Es iſt $dST = adx + bxdx + \frac{1}{2}bdx$

$d^2ST = bdx^2$; $d^3.ST = 0$ u. ſ. f.

alſo $T = a + bx + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = a + bx$:

Für das ſummatoriſche Glied $ST = \frac{1}{2}(b-a)x^2 + \frac{1}{2}(3a-b)x$ das allgemeine T anzugeben.

Hier iſt $dST = ((b-a)x + \frac{1}{2}(3a-b))dx$;

$d^2ST = (b-a)dx^2$; $d^3.ST = 0$, u. ſ. f.

alſo $T = (b-a)x + \frac{1}{2}(3a-b) - \frac{1}{2}(b-a) = (b-a)x + 2a - b$.

69. §. Aufgabe.

Wenn das allgemeine Glied T einer Reihe bekannt ist, das summatorische Glied ST derselben Reihe zu bestimmen.

Auflösung. 1) Der natürlichste Weg, das summatorische Glied ST aus dem allgemeinen T zu bestimmen, scheint der zu seyn, daß man beym allgemeinen Gliede T seinen Index $x=1$, hierauf $x=2$, dann $x=3$, u. s. f. bis $x=x$ setzt, und die Werthe aufmerkt, welche T dafür erlangt: denn diese Werthe werden eine Reihe von x Gliedern geben, wovon T das allgemeine Glied ist, und die Summe dieser Glieder wird das verlangte summatorische Glied ST seyn.

Dem zufolge setze man in (67. §. 6. Zus.) $y=T$ allemal, und $a=1$, hernach $a=2$, sodann $a=3$ u. s. f. bis $a=x$; so wird man die erwähnten Werthe, wie sie folgen, erhalten.

$$1)^{er}=T+\frac{dT}{dx}(1-x)+\frac{d^2T}{2dx^2}(1-x)^2+\frac{d^3T}{2.3.dx^3}(1-x)^3+\cdots$$

$$2)^{ter}=T+\frac{dT}{dx}(2-x)+\frac{d^2T}{2dx^2}(2-x)^2+\frac{d^3T}{2.3.dx^3}(2-x)^3+\cdots$$

$$3)^{ter}=T+\frac{dT}{dx}(3-x)+\frac{d^2T}{2dx^2}(3-x)^2+\frac{d^3T}{2.3.dx^3}(3-x)^3+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x-1)^{ter}=T+\frac{dT}{dx}(-1)+\frac{d^2T}{2dx^2}(-1)^2+\frac{d^3T}{2.3.dx^3}(-1)^3+\cdots$$

$$x^{ter}=T.$$

Da

Da nun die Summe dieſer Werthe eigentlich die Summe der Reihe iſt, wovon T das allgemeine Glied ſeyn ſoll; ſo addire man die Glieder aller verticalen Reihen, und bringe alle einzelnen Summen in eine Summe, welche das geſuchte ſummatoriſche Glied ST ſeyn wird, nämlich:

$$ST = xT$$
$$+((1-x)+(2-x)+(3-x)+\cdots\cdots-2-1)\frac{dT}{dx}\cdot$$
$$+((1-x)^2+(2-x)^2+(3-x)^2+\cdots\cdots+(-2)^2+(-1)^2)\frac{d^2T}{2dx^2}$$
$$+((1-x)^3+(2-x)^3+(3-x)^3+\cdots+(-2)^3+(-1)^3)\frac{d^3T}{2.3.dx^3}$$
$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$\quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$+((1-x)^r+(2-x)^r+(3-x)^r+\cdots+(-2)^r+(-1)^r)\frac{d^rT}{2.3.4\cdots r dx^r}$$

oder $ST = xT$

$$-((x-1)+(x-2)+(x-3)+\cdots\cdots+2+1)\frac{dT}{dx}$$
$$+((x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+\cdots+2^2+1^2)\frac{d^2T}{2dx^2}$$
$$-((x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3+\cdots+2^3+1^3)\frac{d^3T}{2.3.dx^3}$$
$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$\quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$\pm((x-1)^r+(x-2)^r+(x-3)^r+\cdots+2^r+1^r)\frac{d^rT}{2.3.4\cdots r dx^r}$$

Und es iſt einleuchtend, daß hier das obere Zeichen (+) oder das untere (—) gelten muß, nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl iſt.

Weil

Weil ferner $S(x-1)$; $S(x-1)^2$; $S(x-1)^3$ u. s. f. nichts anders, als die summatorischen Glieder der in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgenden Potenzen-Reihen bedeuten, wovon $x-1$; $(x-1)^2$; $(x-1)^3$ u. s. f. allgemeine Glieder sind; so kann man das gefundene summatorische Glied auch so kurz ausdrücken.

$$ST = xT - \frac{dT}{dx}.S(x-1) + \frac{d^2T}{2dx^2}.S(x-1)^2 - \frac{d^3T}{2.3.dx^3}S(x-1)^3$$
$$+ \frac{d^4}{2.3.4dx^4}.S(x-1)^4 ---- \pm \frac{d^rT}{2.3.4\cdots r\,dx^r}.S(x-1)^r.$$

2) Da also die Werthe der Summen $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, $S(x-1)^3$ u. s. f. als bekannt vorausgesetzt werden können; so wird diese Formul allemal dienen, das summatorische Glied derjenigen Reihe, wovon das allgemeine Glied T gegeben ist, zu bestimmen, wenigstens durch eine ohne Ende ortlaufende Reihe auszudrücken, wenn das allgemeine Glied T eine solche Function seines Indicis x ist, daß für sie kein Verschwindungs-Quotient $d^rT = 0$ wird.

Werden die Werthe von $S(x-1)$; $S(x-1)^2$; $S(x-1)^3$ u. s. f. hier wirklich angebracht (I. B. 141. §. 1. Zus.); so wird seyn:

$$ST = xT - \frac{dT}{dx}(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x)$$
$$+ \frac{d^2T}{2dx^2}(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x)$$
$$- \frac{d^3T}{2.3.dx^3}(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2)$$
$$+ \frac{d^4T}{2.3.4.dx^4}(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x) \text{ u. s. f.}$$

Beys

Beyspiel.

Man soll das summatorische Glied ST derjenigen Reihe bestimmen, deren allgemeines Glied $T = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ ist.

Es ist $\frac{dT}{dx} = \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2}x^2$;

$\frac{d^2T}{dx^2} = -1 + x$;

$\frac{d^3T}{dx^3} = 1$; $\frac{d^4T}{dx^4} = 0$ u. s. f.

also $ST = x(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)$

$- (\frac{1}{3} - x + \frac{1}{2}x^2)(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)$

$+ \frac{(x-1)}{2}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x)$

$- \frac{1}{2.3}(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2)$;

$= \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{1.2.3.4}$;

Anmerkung.

Die hier angeführte Formul für das mit einem allgemeinen Gliede T zusammenhängende summatorische Glied ST hat Herr Euler auf eine andere Art gesucht (a), und zugleich bemerkt, daß dieselbe keinen grossen Gebrauch bey der Summirung der Reihen haben kann, indem die Coefficienten ihrer Glieder in manchen Umständen sehr groß seyn müßten. Wir müssen demnach mit Herrn Euler sehen, ob es nicht möglich ist, eine andere bequemere Formul dafür anzugeben.

(a) Instit. Calc. Differ. P. II. Cap. III. §. 59.

70. §. Aufgabe.

Das summatorische Glied ST einer Reihe aus ihrem allgemeinen Gliede T auf eine bequemere Art zu bestimmen.

Auflösung. 1) Wir wollen das allgemeine Glied, als eine Function seines Indicis x, mit y bezeichnen. Setzt man bey ihm $x-1$ statt x; so verwandelt sich y in das nächst vorhergehende Glied derselben Reihe, welches v heissen mag, und $x-1$ zum Index hat. Da also die Formul in (67. §. 2. Zus.), wofern man bey ihr $\omega=1$ setzt, den Werth von y giebt, den diese Function erlangen muß, während daß bey ihr $x-1$ aus x wird; so muß seyn:

$$v=y-\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{2dx^2}-\frac{d^3y}{2.3.dx^3}+\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}-\frac{d^5y}{2.3.4.5.dx^5}+\cdots$$

also ist nach (I. B. 140. §.).

$$Sv=Sy-S\frac{dy}{dx}+S\frac{d^2y}{2dx^2}-S\frac{d^3y}{2.3.dx^3}+\cdots\cdots$$

$$S\frac{dy}{dx}=Sy-Sv+S\frac{d^2y}{2dx^2}-S\frac{d^3y}{2.3.dx^3}+\cdots\cdots$$

Weil ferner Sy die Summe von x Gliedern einer Reihe, und Sv die Summe von $x-1$ Gliedern derselben Reihe bedeutet; so ist das allgemeine Glied eben derselben Reihe $y=Sy-Sv$ (I. B. 130. §.), mithin

$$S\frac{dy}{dx}=y+S\frac{d^2y}{2dx^2}-S\frac{d^3y}{2.3.dx^3}+S\frac{d^4y}{2.3.4.dx^4}-\cdots\cdots$$

2) Sey

2) Sey $\frac{dy}{dx} = z$; daher (15. §.) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2}$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^3}$ u. ſ. f.; ferner $dy = z\,dx$, und $y = \int z\,dx$: alſo aus (n. 1.)

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2} S\frac{dz}{dx} - \frac{1}{2.3} S\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{2.3.4} S\frac{d^3z}{dx^3}$$
$$- \frac{1}{2.3.4.5} S\frac{d^4z}{dx^4} + \ldots + \frac{1}{2.3\ldots 2r} S\frac{d^{2r-1}z}{dx^{2r-1}} - \frac{1}{2.3\ldots 2r(2r+1)}$$
$$S\frac{d^{2r}z}{dx^{2r}} + \ldots\ldots\ldots$$

3) Dieſe Formul gilt für jede Function z des Indicis x, daher wird ſie auch alsdann gelten, wenn man bey ihr nach und nach die Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ u. ſ. f. ſtatt z ſetzt, wofür dieſelbe folgende Summen giebt:

$$S\frac{dz}{dx} = z + \tfrac{1}{2} S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{2.3} S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{2.3.4} S\frac{d^4z}{dx^4} \ldots\ldots$$

$$S\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \tfrac{1}{2} S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{2.3} S\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{1}{2.3.4} S\frac{d^5z}{dx^5} \ldots\ldots$$

$$S\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2} + \tfrac{1}{2} S\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{2.3} S\frac{d^5z}{dx^5} + \frac{1}{2.3.4} S\frac{d^6z}{dx^6} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S\frac{d^nz}{dx^n} = \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \tfrac{1}{2} S\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} - \frac{1}{2.3} S\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}} + \frac{1}{2.3.4} S\frac{d^{n+3}z}{dx^{n+3}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4) Wenn man nun die Werthe von $S\frac{dz}{dx}$, $S\frac{d^2z}{dx^2}$, $S\frac{d^3z}{dx^3}$ u. s. f. aus (n. 3.) in die Formul (n. 2.) brächte; so würde dieselbe Formul gewiß folgende Gestalt bekommen, wobey φ, φ^1, φ^2 - - - - - die noch ganz unbestimmten Coefficienten von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ u. s. f. bedeuten, und nun käme noch alles auf die Bestimmung dieser Coefficienten an.

$$Sz = \int z dx + \varphi z + \varphi^1 \frac{dz}{dx} + \varphi^2 \frac{d^2z}{dx^2} + \varphi^3 \frac{d^3z}{dx^3} + - - - -$$

Die Coefficienten φ, φ^1, φ^2, φ^3 zu bestimmen, lehrt umständlich Herr Euler [a], und dasselbe auch Herr Hofr. Karsten [b]: auf einem andern Wege läßt sich das Vorzüglichste dafür so aufsuchen.

(a) Instit. Calc. Differ. P. II. Cap. V.

(b) Anfangsgr. der mathem. Analys. X. Abschn. 269. §.

5) Weil z das allgemeine Glied einer Reihe ist, deren summatorisches Glied Sz seyn soll; so folgt aus Sz nach (68. §.)

$$z = \frac{dSz}{dx} - \frac{d^2Sz}{2dx^2} + \frac{d^3Sz}{2.3.dx^3} - \frac{d^4Sz}{2.3.4.dx^4} + - - - - -$$

und $$\frac{dSz}{dx} - \frac{d^2Sz}{2dx^2} + \frac{d^3Sz}{2.3.dx^3} - \frac{d^4Sz}{2.3.4.dx^4} + - - - - - z = 0.$$

6) Es folgt ferner aus (n. 4.)

$$\frac{dSz}{dx} = z + \varphi \frac{dz}{dx} + \varphi^1 \frac{d^2z}{dx^2} + \varphi^2 \frac{d^3z}{dx^3} + \varphi^3 \frac{d^4z}{dx^4} + - - - - -$$

$$\frac{d^2Sz}{dx^2}$$

$$\frac{d^2Sz}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \varphi\frac{d^2z}{dx^2} + \varphi^1\frac{d^3z}{dx^3} + \varphi^2\frac{d^4z}{dx^4} + \varphi^3\frac{d^5z}{dx^5} + \ldots.$$

$$\frac{d^3Sz}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2} + \varphi\frac{d^3z}{dx^3} + \varphi^1\frac{d^4z}{dx^4} + \varphi^2\frac{d^5z}{dx^5} + \varphi^3\frac{d^6z}{dx^6} + \ldots.$$

u. s. f.

Bringt man nun diese Werthe in die Gleichung (a. 3.); so wird man folgende Gleichung bekommen:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\frac{dz}{dx} + \varphi^1\frac{d^2z}{dx^2} + \varphi^2\frac{d^3z}{dx^3} + \varphi^3\frac{d^4z}{dx^4} + \ldots\ldots \\ -\frac{dz}{2dx} - \frac{\varphi}{2}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{\varphi^1}{2}\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\varphi^2}{2}\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots\ldots \\ \frac{+1}{2.3}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\varphi}{2.3}\cdot\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\varphi^1}{2.3}\cdot\frac{d^4z}{dx^4} + \ldots\ldots \\ \frac{-1}{2.3.4}\cdot\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\varphi}{2.3.4}\cdot\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots\ldots \\ \frac{+1}{2.3.4.5}\cdot\frac{d^4z}{dx^4} + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

Mithin nach (1. B. 83. §.)

$$\varphi - \tfrac{1}{2} = 0.$$

$$\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2.3} = 0.$$

$$\varphi^2 - \tfrac{1}{2}\varphi^1 + \frac{\varphi}{2.3} \quad \frac{-1}{2.3.4} = 0.$$

$$\varphi^3 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{\varphi^1}{2.3} - \frac{\varphi}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} = 0$$

u. s. f.

Daher $\varphi = \tfrac{1}{2}$.

$$\varphi^1 = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{12}.$$

$$\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\varphi^1 - \frac{\varphi}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} = 0,$$

$$\varphi^3 = -\frac{\varphi^1}{6} + \frac{\varphi}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}.$$

u. s. f.

Hätten wir die Verschwindungs-Quotienten von Sz bis zum 1ten $\frac{d^r Sz}{dx^r}$ fortgesetzt, welches sehr leicht hätte geschehen können; so würden wir dafür folgende Gleichung erhalten haben.

$$\varphi^r - \frac{\varphi^{r-1}}{2} + \frac{\varphi^{r-2}}{2\cdot 3} - \frac{\varphi^{r-3}}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\varphi^{r-4}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{\varphi^{r-5}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$

$$\cdots \frac{\pm\varphi^1}{2\cdot 3\cdots(r-1)r} \frac{\mp\varphi}{2\cdots(r-1)r(r+1)} \frac{\pm 1}{2\cdots(r-1)r(r+1)(r+2)} = 0$$

Und aus dieser Gleichung kann man den Werth jedes Coefficienten φ^r bestimmen, wenn die Werthe der vorhergehenden Coefficienten φ^{r-1}, φ^{r-2} ... schon bekannt sind. So wie man aber $\varphi^2 = 0$ gefunden hat, eben so wird man auch $\varphi^4 = 0$, $\varphi^6 = 0$, $\varphi^8 = 0$, und jeden Coefficienten $\varphi^{2n} = 0$ finden, dessen Index $2n$ eine gerade Zahl ist, und aus diesem Grunde können wir annehmen, es sey r eine ungerade Zahl, und dafür

$$\varphi^r = \frac{\varphi}{2\cdots(r-1)r(r+1)} \frac{-\varphi^{r-2}}{2\cdot 3} \frac{-\varphi^{r-4}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \frac{-\varphi^{r-6}}{2\cdot 3\cdots 7}$$

$$\frac{-\varphi^{r-8}}{2\cdot 3\cdots 9} \cdots \frac{-\varphi^r}{2\cdots(r-1)r} \frac{-1}{2\cdots(r-1)r(r+1)(r+2)}$$

Hieraus

Hieraus können nun die Coefficienten $\varphi^1, \varphi^3, \varphi^5, \varphi^7$ u. s. f. durch $\varphi = \frac{1}{2}$ bestimmt werden, wie sie folgen.

$$\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi^1 = \frac{1}{2.3.2}$$

$$\varphi^3 = \frac{-1}{2.3.4.5.6}$$

$$\varphi^5 = \frac{+1}{2.3\cdots 7.6}$$

$$\varphi^7 = \frac{-3}{2.3\cdots 9.10}$$

$$\varphi^9 = \frac{+5}{2.3\cdots 11.6}$$

$$\varphi^{11} = \frac{-691}{2.3\cdots 13.210}$$

$$\varphi^{13} = \frac{+35}{2.3\cdots 15.2}$$

$$\varphi^{15} = \frac{-3617}{2.3\cdots 17.30}$$

$$\varphi^{17} = \frac{+43867}{2.3\cdots 19.42}$$

$$\varphi^{19} = \frac{-1222277}{2.3\cdots 21.110}$$

$$\varphi^{21} = \frac{+854513}{2.3\cdots 23.6}$$

u. s. f.

Und bey diesen Coefficienten wird die obige Formul (n. 4.) folgende Gestalt haben:

$$Sz = \int z dx + \varphi z + \varphi^1 \frac{dz}{dx} + \varphi^3 \frac{d^3z}{dx^3} + \varphi^5 \frac{d^5z}{dx^5}$$

$$+ \varphi^7 \frac{d^7z}{dx^7} + \text{- - -} + \varphi^r \frac{d^rz}{dx^r} + \text{- - - - - -}$$

1. Zusatz.

Auch diese Formul hat die Unbequemlichkeit, daß sie das summatorische Glied Sz einer Reihe, wovon das allgemeine Glied $= z$ ist, durch eine ohne Ende fortlaufende Reihe ausdrückt, wenn nicht z eine solche Function des Indicis x ist, wofür ein Verschwindungs-Quotient $\frac{d^rz}{dx^r}$ gleich Null wird: doch aber ist der Gebrauch dieser Formul ungemein bequemer, als der in (69. §.) gefundenen Formul ihrer seyn kann. Das erste Glied ist allemal das Integral $\int z dx$, welches nach der Theorie des zweyten Hauptstückes gesucht wird; das zweyte Glied ist durch das jedesmalige allgemeine Glied z und durch die schon bekannte Zahl φ vollkommen bestimmt; die darauf folgenden Glieder werden durch die der Function z von x zugehörigen Verschwindungs-Quotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{dz^3}{dx^3}, \frac{d^5z}{dx^5}$ - - - und die schon bekannten Zahlen $\varphi^1, \varphi^3, \varphi^5$ - - - erhalten werden.

2. Zusatz.

Indessen ist gewiß, daß das summatorische Glied Sz einer Reihe, deren allgemeines Glied $= z$ seyn soll, ausser

der

der Function des Indicis x noch eine beständige Grösse C enthalten kann, welche die obige Formul nicht giebt: weil aber das erste Glied der Reihe für $x=1$ aus Sz oder z entstehen soll (I. B. 130. §. 2. Zus.); so kann Sz für $x=0$ gar nichts geben. Mithin kann man den Werth der Constante C aus der Gleichung bestimmen, welche $Sz=0$ für $x=0$ geben soll: hat man nämlich gefunden, es sey $Sz=\psi$; so muß man eigentlich $Sz=\psi+C$ schreiben, und hiebey $x=0$ setzen, dergestalt, daß, wenn π aus ψ für $x=0$ entstünde, $\pi+C=0$, mithin $C=-\pi$, und $Sz=\psi-\pi$ seyn müßte.

Beyspiele.

I. Das summatorische Glied Sz derjenigen Reihe zu bestimmen, deren allgemeines Glied $z=(2x-1)^2$ ist.

Es ist $z=4x^2-4x+1$.

$zdx=(4x^2-4x+1)dx$.

$\int zdx=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x$.

$\frac{dz}{dx}=8x-4$; $\frac{d^2z}{dx^2}=8$; $\frac{d^3z}{dx^3}=0$, u. s. f.

Daher $S(2x-1)^2=\int zdx+\varphi z+\varphi^1.\frac{dz}{dx}+C$.

$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+\frac{1}{2}(2x-1)^2+\frac{1}{2.3.2}(8x-4)+C$.

$=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}+C$.

Für $x=0$ ist $\frac{1}{6}+C=0$, $C=-\frac{1}{6}$;

also $S(2x-1)^2=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x=\frac{x}{3}(2x+1)(2x-1)$.

II. Das summatorische Glied der Reihe, deren allgemeines Glied $z=(2x-1)^3$ ist, zu bestimmen.

Hier ist $\int z\,dx = \int dx(2x-1)^3 = \frac{1}{8}(2x-1)^4$,

$$\frac{dz}{dx}=6(2x-1)^2;\quad \frac{d^2z}{dx^2}=24(2x-1);$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=48;\quad \frac{d^4z}{dx^4}=0;\quad \frac{d^5z}{dx^5}=0 \text{ u. s. f.}$$

also $S(2x-1)^3 = \int z\,dx + \varphi z + \varphi^1 \frac{dz}{dx} + \varphi^3 \frac{d^3z}{dx^3}$

$$= \tfrac{1}{8}(2x-1)^4 + \tfrac{1}{2}(2x-1)^3 + \frac{1}{2.3.2}.6(2x-1)^2 \frac{-1}{2.3.4.5.6}.48+C$$

$$= \tfrac{1}{8}(2x-1)^4 + \tfrac{1}{2}(2x-1)^3 + \tfrac{1}{4}(2x-1)^2 - \tfrac{1}{12}+C.$$

$$= 2x^4 - x^2 + \tfrac{7}{120}+C.$$

Mithin für $x=0$ ist $\frac{7}{120}+C=0$, $C=-\frac{7}{120}$,

und $S(2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 = x^2(2x^2-1)$.

III. Das summatorische Glied der Potenzenreihe zu bestimmen, deren allgemeines Glied $z=x^n$ ist.

Es ist $\int z\,dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Ferner ist $\frac{dz}{dx}=nx^{n-1}$;

$$\frac{d^3z}{dx^3}=n(n-1)(n-2)x^{n-3};$$

$$\frac{d^5z}{dx^5}=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5};$$

$$\frac{d^rz}{dx^r}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^{n-r};$$

$$\text{also ist } Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \varphi x^n + \varphi^1 n x^{n-1}$$
$$+ \varphi^3 n(n-1)(n-2)x^{n-2}$$
$$+ \varphi^5 n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-4}$$
$$+ \varphi^7 n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)x^{n-6}$$
$$+ \text{ u. s. w. bis}$$
$$+ \varphi^r n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)x^{n-r}$$

Was aber die Zahlen φ, φ^1, φ^2, $\varphi^3 \ldots \varphi^r$ anbelangt, diese sind oben bestimmt worden.

Der III. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Lehre vom Größten und Kleinsten.

71. §. Erklärung.

Wenn y eine Function von der veränderlichen Größe x ist, und man dieser verschiedene Werthe, entweder allmählig größere, oder allmählig kleinere beylegt; so wird die Function y für jeden neuen Werth von x auch einen neuen Werth erlangen müssen (2. §. 1. Zus.). Gesetzt, die Function y erlange einen Werth V, es werde daher $y = V$, sobald die veränderliche Größe x einen Werth v erreicht, mithin $x = v$ wird: sind nun diejenigen Werthe, welche die Function y erlangen würde, wenn man bey ihr $x = v + e$

oder

oder $x = v - e$ ſetzte, mithin $x = v$ um etwas e vermehrte oder verminderte, beyde gröſſer, als der Werth V, den die Function y für $x = v$ erlangte, und dieſes allemal, es mag e eine wie immer kleine Gröſſe bedeuten; ſo heißt V ein Kleinſtes der Function y (Minimum functionis y): ſind aber die mit $x = v + e$ und $x = v - e$ verbundenen Werthe der Function y beyde kleiner, als der Werth V, den ſie für $x = v$ erlangt; ſo heißt V ein Gröſtes der Function y (Maximum functionis y).

1. Zuſatz.

Wie oft demnach $y = V$ für $x = v$, $y = V'$ für $x = v + e$, $y = V''$ für $x = v - e$ wird, ſo oft iſt V entweder ein Gröſtes oder Kleinſtes von y, wenn $V' < V$ und zugleich $V'' < V$, oder $V' > V$, und zugleich $V'' > V'$ für jede wie immer kleine Gröſſe e gefunden wird.

2. Zuſatz.

Wenn aber nicht beyde Werthe V', V'' gröſſer oder kleiner ſind, als V; ſo iſt V weder ein Gröſtes noch ein Kleinſtes von y.

72. §. Lehrſatz.

Wenn einer Function y von x der Quotient $\frac{dy}{dx}$ zugehört, und dieſer für einen gewiſſen Werth von x, etwa für $x = v$ was immer für einen endlichen bejahten oder verneinten Werth erlangt; ſo kann die Function y für eben den Werth von x, nämlich für $x = v$ weder einen gröſten noch einen kleinſten Werth haben.

Beweis.

Beweis. 1) Nehmen wir an, die Function y erlange den Werth V für $x=v$; so wird sie für $x=v+e$ folgenden Werth V', und für $x=v-e$ folgenden Werth V'' erlangen müssen, jenen nach (67. §.), und diesen nach (67. §. 2. Zus.).

$$V'=V+\frac{edy}{dx}+\frac{e^2d^2y}{2dx^2}+\ldots;\quad V''=V-\frac{edy}{dx}+\frac{e^2d^2y}{2dx^2}-\ldots$$

2) Wir können aber mit S, s die Summen aller Glieder bezeichnen, welche nach $\frac{edy}{dx}$ bey V', V'' folgen, und dann soll seyn

$$V'=V+\frac{edy}{dx}+S;\quad V''=V-\frac{edy}{dx}+s.$$

Und diese Gleichungen, so wie die vorigen in (n. 1.), müssen allemal gelten, man mag e wie immer klein nehmen (67. §. und 2. Zus.): da es also möglich ist, die Grösse e so klein zu nehmen, daß für sie die Summen aller nach $\frac{edy}{dx}$ bey V', V'' in (n. 1.) folgenden Glieder kleiner werden mögen, als das einzige Glied $\frac{edy}{dx}$ ist (19. §.); so werden wir hier voraussetzen, es sey e wirklich so klein genommen worden, daß $S<\frac{edy}{dx}$ und auch $s<\frac{edy}{dx}$ dafür ist.

3) Nun soll, vermöge der Voraussetzung $x=v$ seyn, und $\frac{dy}{dx}$ dafür einen endlichen bejahten oder verneinten Werth haben: nehmen wir also an, es habe $\frac{dy}{dx}$ einen bejahten

jahten Werth; so wird auch $\frac{edy}{dx}$ etwas bejahtes seyn müssen; wegen $S < \frac{edy}{dx}$, $s < \frac{edy}{dx}$ wird demnach $\frac{edy}{dx}$ etwas bejahtes und $-\frac{edy}{dx}+s$ etwas verneintes seyn; es mögen übrigens die Grössen S, s in sich bejaht oder verneint seyn: ist aber $\frac{edy}{dx}+S$ etwas bejahtes, und $-\frac{edy}{dx}+s$ etwas verneintes; so muß $V+\frac{edy}{dx}+S > V$ und $V-\frac{edy}{dx}+s < V$ seyn, folglich ist in (n. 2.) $V' > V$ und $V'' < V$.

Das heißt: die Function y ist von der Beschaffenheit, daß der Werth V, welchen sie für denjenigen Werth der veränderlichen Grösse x erlangt, wofür $\frac{dy}{dx}$ etwas bejahtes giebt, weder am größten noch am kleinsten seyn kann (n. 1. und 71. §. 2. Zus.).

4) Nun wollen wir annehmen, es habe $\frac{dy}{dx}$ für $x=v$ einen endlichen verneinten Werth; so wird auch $\frac{edy}{dx}$ etwas verneintes seyn: da wir also $S < \frac{edy}{dx}$, $s < \frac{edy}{dx}$ gemacht haben (n. 2.); so wird zwar $\frac{edy}{dx}+S$ allemal etwas verneintes, hingegen $-\frac{edy}{dx}+s$ allemal etwas bejahtes geben, mithin wird allemal $V+\frac{edy}{dx}+S < V$, aber $V-\frac{edy}{dx}+s > V$ seyn müssen, und so wird auch in (n. 2.) $V' < V$ und $V'' > V$ seyn.

Das

Das heißt: der Werth V, welchen die Function y für $x=v$ erlangt, wofür $\frac{dy}{dx}$ einen endlichen verneinten Werth hat, kann weder am größten noch am kleinsten seyn (n. 1. und 71. §. 2. Zus.).

73. §. Lehrsatz.

Wenn man aus den einer Function y von x zugehörigen Verschwindungs-Quotienten dy, d^2y, d^3y ... d^ry die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ..... $\frac{d^ry}{dx^r}$ ableitet, und findet, daß alle vorhergehenden bis zu gewissen rten $\frac{d^ry}{dx^r}$ gleich Null sind, der rte Quotient $\frac{d^ry}{dx^r}$ aber für $x=v$ einen endlichen bejahten oder verneinten Werth hat; so wird die Function y für $x=v$ weder einen größten noch einen kleinsten Werth haben können, wenn der Index r von $\frac{d^ry}{dx^r}$ eine ungerade Zahl war: ist aber r eine gerade Zahl; so wird die Function y für $x=v$ ein Größtes oder ein Kleinstes haben müssen, nachdem $\frac{d^ry}{dx^r}$ für $x=v$ einen verneinten oder bejahten Werth hat.

Beweis. 1) Wenn V den Werth bedeutet, welchen y für $x=v$ erlangt, und man annimmt, daß $x=v$ in $x+e$ hernach in $x-e$ bey V übergeht, wofür V in V′ im ersten Fall, und in V″ im zweyten Fall übergehen mag; so wird man haben nach (67. §. und 2. Zus.)

V′

$$V' = V + \frac{edy}{dx} + \frac{e^2d^2y}{2dx^2} + \frac{e^3d^3y}{2.3.dx^3} + \cdots + \frac{e^rd^ry}{2.\cdots r\,dx^r}$$
$$+ \frac{e^{r+1}d^{r+1}y}{2.\cdots r(r+1)\,dx^{r+1}} + \cdots\cdots\cdots$$

$$V'' = V - \frac{edy}{dx} + \frac{e^2d^2y}{2dx^2} - \frac{e^3d^3y}{2.3.dx^3} \cdots \frac{\pm e^rd^ry}{2.\cdots r\,dx^r}$$
$$\mp \frac{e^{r+1}d^{r+1}y}{2.\cdots r(r+1)\,dx^{r+1}} \pm \cdots\cdots$$

2) Da aber vermöge der Voraussetzung alle Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. f. bis zum rten $\frac{d^ry}{dx^r}$ gleich Null seyn sollen; so werden wir eigentlich haben:

$$V' = V + \frac{e^rd^ry}{2.\cdots r\,dx^r} + \frac{e^{r+1}d^{r+1}y}{2.\cdots r(r+1)\,dx^{r+1}} + \cdots$$

$$V'' = V \pm \frac{e^rd^ry}{2.\cdots r\,dx^r} \mp \frac{e^{r+1}d^{r+1}y}{2.\cdots r(r+1)\,dx^{r+1}} \pm \cdots$$

Und es wird bey V'' der Quotient $\frac{d^ry}{dx^r}$ das obere Zeichen (+) oder das untere (—) vor sich haben müssen, nachdem sein Index r eine gerade oder ungerade Zahl seyn wird.

3) Wir können diese Ausdrückungen der Werthe V', V'' noch dadurch abkürzen, wenn wir mit S, s die Summen aller Glieder bezeichnen, welche nach dem rten Quotienten $\frac{d^ry}{dx^r}$ folgen: es wird nämlich seyn

$$V' = V + \frac{e^rd^ry}{2.\cdots r\,dx^r} + S. \quad V'' = V \pm \frac{e^rd^ry}{2.\cdots dx^r} + s.$$

4) Und

4) Und weil die Gleichungen in (n. 1.) für jeden wie immer kleinen Werth von e, wegen (67. §. u. 2. Zuf.), gelten mußten; so werden auch gegenwärtige Gleichungen für jede wie immer kleine Gröſſe e, mithin für eine ſolche gelten müſſen, wobey folgende Bedingungen zugleich Statt finden mögen, wie dieſes wegen (19. §) wirklich möglich iſt.

$$S \leq \frac{e^r d^r y}{2.\ldots.r\,dx^r};\quad s < \frac{e^r d^r y}{2.\ldots.r\,dx^r}.$$

5) Nun ſey der Index r eine ungerade Zahl, und der Quotient $\frac{d^r y}{dx^r}$ habe für $x = v$ einen endlichen bejahten oder verneinten Werth; ſo ſoll der Werth V, welchen die Function y für $x = v$ erlanget, weder ein Gröſſtes, noch ein Kleinſtes ſeyn.

Denn wenn r eine ungerade Zahl iſt; ſo findet bey V'' in (n. 3.) eigentlich das Zeichen (—) Statt, mithin, wenn $\frac{d^r y}{dx^r}$ für $x = v$ einen bejahten Werth p oder einen verneinten Werth $-p$ hat, müſſen die Gleichungen (n. 3.) im erſten Fall in folgende a) b), und im zweyten Fall in folgende c) d) übergehn.

a) $V' = V + \frac{e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + S$. b) $V'' = V - \frac{e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + s$.

c) $V' = V - \frac{e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + S$. d) $V'' = V + \frac{+e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + s$.

Wegen (n. 4.) iſt daher $\frac{e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + S$ allemal etwas bejahtes, und $\frac{-e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + s$ allemal etwas verneintes,

mithin ist $V' > V$ in a) und $V'' < V$ in b), folglich ist der Werth V, welchen die Function y für $x = v$ erlangt, wofür $\frac{d^r y}{dx^r}$ einen bejahten Werth p haben soll, weder ein Größtes noch ein Kleinstes von y (71. §. 2. Zus.) Ebenfalls ist wegen (n. 4.) $\frac{-e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + S$ allemal etwas verneintes, und $\frac{+e^r}{2.\ldots.r} \cdot p + s$ allemal etwas bejahtes: also allemal $V' < V$ in c) und zugleich $V'' > V$ in d), mithin ist der Werth V, welchen die Function y für $x = v$ erlanget, wofür $\frac{d^r y}{dx^r}$ einen verneinten Werth $-p$ haben soll, weder ein Größtes, noch ein Kleinstes von y (71. §. 2. Zus.).

6) Ferner nehmen wir an, es sey r eine gerade Zahl; so wird bey dieser Zahl der Werth V von y für $x = v$ entweder ein Größtes oder ein Kleinstes seyn müssen; jenes, wenn $\frac{d^r y}{dx^r}$ für $x = v$ einen endlichen verneinten Werth hat, und dieses, wenn $\frac{d^r y}{dx^r}$ für $x = v$ einen bejahten Werth hat.

Denn bey einer geraden Zahl r muß das obere Zeichen bey V'' in (n. 3.) Statt haben, mithin müssen die Gleichungen (n. 3.), wie sie in a) und b) oder in c) und d) folgen, aussehen, nachdem man annimmt, daß $\frac{d^r y}{dx^r}$ für $x = v$ einen bejahten Werth $+p$, oder einen verneinten $-p$ haben soll.

a) V'

a) $V' = V + \frac{e^r}{2.\cdots r} \cdot p + S$. b) $V'' = V + \frac{e^r}{2.\cdots r} \cdot p + s$.

c) $V' = V - \frac{e^r}{2.\cdots r} \cdot p + S$. d) $V'' = V - \frac{e^r}{2.\cdots r} \cdot p + s$.

Und nun muß, wegen (n. 4.), sowohl $\frac{+e^r}{2.\cdots r} \cdot p + S$ als $\frac{+e^r}{2.\cdots r} \cdot p + s$ etwas bejahtes, daher sowohl $V' > V$ als $V'' > V$ in a) b) seyn, welches ein Beweis ist, daß V oder der Werth von y für $x = v$, wofür $\frac{d^r y}{dx^r}$ einen bejahten Werth $+p$ haben soll, ein Kleinstes von y ist (71. §. 1. Zus.). Hingegen muß sowohl $\frac{-e^r}{2.\cdots r} \cdot p + S$ als $\frac{-e^r}{2.\cdots r} \cdot p + s$ etwas verneintes, daher sowohl $V' < V$ als $V'' < V$ in c) d) seyn, und dieses beweiset, daß der Werth V von y für $x = v$, wofür $\frac{d^r y}{dx^r}$ einen verneinten Werth $-p$ haben soll, ein Größtes von y ist (71. §. 1. Zus.).

74. §. Aufgabe.

Es ist eine Function y von x vorgelegt worden; man soll untersuchen, ob es für sie ein Größtes oder Kleinstes giebt, und mit was für einem Werth von x dasselbe verbunden ist.

Auflösung. Man nehme den ersten Verschwindungs-Quotienten dy, und dividire ihn durch den Verschwindungs-Quotienten dx, welcher der veränderlichen Grösse x zugehört. Da es nun für denjenigen Werth von x, wofür der Quotient $\frac{dy}{dx}$ einen endlichen bejahten oder verneinten Werth haben

mag, weder ein Größtes noch ein Kleinſtes für y geben kann (72. §.); ſo ſetze man $\frac{dy}{dx} = 0$, und ſuche aus dieſer Gleichung den Werth von x: dieſer Werth ſoll derjenige ſeyn, wofür y am größten oder kleinſten wird.

Um nun zu beſtimmen, welches von beyden geſchieht, nehme man auch den zweyten Verſchwindungs-Quotienten d^2y, und ſetze beym Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ ſtatt x den aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ gefundenen Werth von x: findet man nun, daß dafür der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen endlichen bejahten oder verneinten Werth erlangt; ſo wird dieſes ein untrügliches Zeichen ſeyn, daß die Function y für den aus $\frac{dy}{dx} = 0$ erhaltenen Werth von x im erſten Fall am kleinſten, und im zweyten Fall am größten wird (73. §.).

Findet man hingegen, daß der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ für den aus $\frac{dy}{dx} = 0$ gefundenen Werth von x auch gleich Null wird; ſo kann man daraus keinen ſicheren Schluß machen; man muß vielmehr den dritten Verſchwindungs-Quotienten d^3y zu Hülfe nehmen. Giebt $\frac{d^3y}{dx^3}$ für den aus $\frac{dy}{dx} = 0$ erhaltenen Werth von x etwas bejahtes oder verneintes; ſo iſt gewiß die Function y für den aus $\frac{dy}{dx} = 0$ gefundenen Werth von x weder am größten, noch am kleinſten (73. §.): iſt aber $\frac{d^3y}{dx^3}$ für den aus $\frac{dy}{dx} = 0$ gefundenen

Werth

Werth von x ebenfalls gleich Null; so kann daraus nichts geschlossen werden, und man muß den vierten Verschwindungs-Quotienten d^4y zu Hülfe nehmen, u. s. f. soll aus jedem neuen Verschwindungs-Quotienten d^4y, d^6y, d^8y..., dessen Index eine gerade Zahl ist, weder mehr noch weniger geschlossen werden, als was man aus dem zweyten d^2y zu schließen berechtigt war; und aus jedem Verschwindungs-Quotienten d^3y, d^5y, d^7y..., dessen Index eine ungerade Zahl ist, soll nur so viel zu schließen erlaubt seyn, als man aus dem dritten d^3y schließen konnte.

1. Zusatz.

Der Grund, warum wir aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ denjenigen Werth von x zu erhalten suchen, wofür die Function y am größten oder kleinsten werden mag, liegt demnach nicht darin, weil für einen solchen Werth von x allemal $\frac{dy}{dx} = 0$ seyn muß; wir sind vielmehr dazu nur dadurch berechtigt, daß wir gewiß wissen, es sey unmöglich, daß $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten bejahten oder verneinten Werth für denjenigen Werth von x habe, für welchen y am größten oder kleinsten wird (72. §.).

2. Zusatz.

Daraus aber, daß $\frac{dy}{dx}$ für den Werth von x, wofür y am größten oder kleinsten werden mag, keinen endlichen Werth haben kann, muß man im strengsten Verstande so schließen: wenn es also für x einen solchen Werth wirklich

giebt; so muß dafür der Quotient $\frac{dy}{dx} = o$ oder $\frac{dy}{dx} = \infty$ seyn, mithin muß derselbe Werth von x aus einer von diesen beyden Gleichungen gesucht werden. Doch können beyde Gleichungen nicht zugleich vorgenommen werden, und die Fälle sind sehr selten, wobey die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \infty$, oder die umgekehrte $\frac{dx}{dy} = o$ Statt findet; rathsam ist es demnach, den verlangten Werth aus $\frac{dy}{dx} = o$ zu suchen, und nach der vorhergehenden Aufgabe zu prüfen, obgleich auch solche Fälle vorkömmen können, wo man aus einer solchen Gleichung nichts findet, sondern den verlangten Werth aus $\frac{dy}{dx} = \infty$ suchen muß.

3. Zusatz.

Ist einmal der Werth $x = v$ gefunden worden, wofür eine vorgelegte Function y von x am größten oder kleinsten wird, und verlangt man den damit verbundenen Werth von y zu wissen; so setze man den erhaltenen Werth v von x statt x in y.

4. Zusatz.

Hieraus und aus (71. §. 1. 2. Zus.) ergiebt sich eine praetische Methode zu prüfen, ob man den verlangten Werth von x wirklich getroffen hat. Hat man nämlich $x = v$ aus $\frac{dy}{dx} = o$ oder $\frac{dy}{dx} = \infty$ erhalten (2. Zus.); so setze man $x = v$ in y, und merke den Werth V, welchen dafür y erlangt: hierauf nehme man ein sehr kleines Stück von v,

etwa

etwa $\frac{1}{1000}v$, und mache erstlich $x = v + \frac{1}{n}v$ sodann $x = v - \frac{1}{n}v$ bey y; so wird y im ersten Fall einen Werth V', und im zweyten Fall einen V'' erlangen müssen. Ist nun $V > V'$ und $V > V''$; so war $y = V$ für $x = v$ ein Größtes von y; ist aber $V < V'$ und $V < V''$; so war $y = V$ ein Kleinstes von y: sind aber nicht beyde Werthe V', V'' grösser oder kleiner als V; so war $y = V$ für $x = v$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes von y. Und diese ungefähre Beurtheilung kann bey vielen practischen Fällen genügen.

Anmerkung.

Man hat Grund die Größten und Kleinsten, derer eine Function y von x fähig seyn kann, in absolute und respective einzutheilen. Ein absolutes Größte oder Kleinste ist ein solcher Werth, welcher grösser oder kleiner ist, als alle mögliche einzeln genommene Werthe, welche y erlangen kann; hingegen nennt man V ein respectives Größte oder Kleinste von y, wenn V grösser oder kleiner ist, als die nächsten Werthe, welche die Function y erlangen würde, wenn man der veränderlichen Grösse x um etwas grössere oder kleinere Werthe beylegte, als derjenige Werth ist, wofür $y = V$ wird. Hieraus erhellet nun, daß bey vorhergehenden Betrachtungen nur von respectiven Größten und Kleinsten die Rede war (72. 73. §.). Es ist ferner klar, daß eben dieselben Betrachtungen nur von einförmigen Functionen y verstanden wurden, nämlich von solchen,

welche für jeden Werth der veränderlichen Gröſſe x nur einen Werth erlangen: von vielförmigen Functionen, wie auch von ſolchen, welche aus mehreren veränderlichen Gröſſen beſtehen, handelt umſtändlich Hr. Euler (a), und erläutert die dahin gehörigen Sätze durch die zweckmäßigſten Beyſpiele, wie er es allemal zu thun gewohnt iſt. Folgende Aufgaben werden genügen, die Art deutlich zu zeigen, wie man das Vorhergehende auf einzelne Fälle anzuwenden hat: mit Vorbedacht führe ich einige allgemeine Functionen zu Beyſpielen an, weil man ſich derſelben bey vielen mechaniſchen Unterſuchungen wird bedienen können, wie es beym Unterrichte in der Maſchinen-Lehre gezeigt werden ſoll.

(a) Inſtitut. Calculi Differentialis. P. II. C. X.

75. §. Aufgabe.

Den Werth von x zu finden, wofür $y = 2x - x^2$ am gröſten oder kleinſten wird.

Auflöſung. Nach (74. §.) iſt $dy = (2 - 2x)dx$, mithin $\frac{dy}{dx} = 2 - 2x = 0$, und nun $x = 1$.

Es iſt aber $d^2y = -2dx^2$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$.

Die Function $y = 2x - x^2$ muß demnach für den aus $\frac{dy}{dx} = 0$ gefundenen Werth $x = 1$ am gröſten werden, weil $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$ einen endlichen verneinten Werth hat.

76. §.

76. §. Aufgabe.

Den Werth von x zu bestimmen, wofür die Function $y=x^2+4x$ am größten oder kleinsten wird.

Auflösung. Es ist $dy=(2x+4)dx$; $\frac{dy}{dx}=2x+4$;

also aus $\frac{dy}{dx}=0$ folgt $2x+4=0$, und $x=-2$.

Nun ist $d^2y=2dx^2$; $\frac{d^2y}{dx^2}=2$.

Die Function $y=x^2+4x$ wird demnach für den aus $\frac{dy}{dx}=0$ erhaltenen Werth $x=-2$ am kleinsten, weil $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen endlichen bejahten Werth hat (74. §.).

Anmerkung.

Offenbar ist es, daß y für keinen bejahten Werth von x am größten oder kleinsten wird, indem dieselbe ununterbrochen fortwächst oder abnimmt, wenn ein bejahter Werth von x zu oder abnimmt. Aber für $x=-2$ wird $y=4-8=-4$, und dieses ist ein Kleinstes von y, weil y allemal einen etwas grössern Werth erlangen würde, wenn man $x=-2$ um etwas grösser oder kleiner annähme. Wäre z. B. $x=-2{,}001$ oder $x=-1{,}999$; so wäre im ersten Fall $y=x^2+4x=-3{,}999999$, und im zweyten Fall $y=x^2+4x=-3{,}999999$, daher für beyde Werthe $x=-2{,}001$, $x=-1{,}999$ grösser als für $x=-2$. Hieraus erhellet, was wir schon in (74. §. Anm.)

bemerkt haben, daß nämlich hier nur von respectiven Größten oder Kleinsten die Rede ist: sodann ist einleuchtend, daß wir die größten und kleinsten Werthe überhaupt betrachten, sie mögen bejaht oder verneint seyn, wobey die Voraussetzung zum Grunde liegt, daß jede verneinte Zahl kleiner als eine bejahte, und $-a > -a-b$ ist, wovon die wahre Bedeutung aus (I. B. 7. §. Anm.) bekannt ist.

77. §. Aufgabe.

Den Werth von x zu bestimmen, wofür $y = \frac{x^2-x}{x^2+1}$ am größten oder kleinsten wird.

Auflösung. Es ist

$$dy = \frac{((2x-1)(x^2+1) - 2x(x^2-x))\,dx}{(x^2+1)^2};$$

aus $\frac{dy}{dx} = 0$ erhält man also:

$$\frac{(2x-1)(x^2+1) - 2x(x^2-x)}{(x^2+1)^2} = 0,$$

mithin $(2x-1)(x^2+1) - 2x(x^2-x) = 0$,

daher $x^2+2x-1=0$, und nun $x = -1 \pm \sqrt{2}$,

oder $x = -1 \pm 1{,}4142136 \ldots\ldots$

Ferner ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x+2-2x^3-6x^2}{(x^2+1)^3}$.

Demnach erhält man aus $\frac{dy}{dx}$ einen doppelten Werth für x; der erste ist bejaht $x = -1+1{,}4142136 \ldots\ldots = 0{,}4142136 \ldots\ldots$; und der zweyte ist verneint, $x = -1-1{,}4142136 \ldots\ldots = -2{,}4142136 \ldots\ldots$:

nimmt

nimmt man den ersten statt x in $\frac{d^2y}{dx^2}$; so erlangt dieser Quotient einen bejahten Werth: nimmt man den zweyten statt x in $\frac{d^2y}{dx^2}$; so erlangt dafür dieser Quotient einen verneinten Werth. Die gegebene Function $y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ ist also von der Beschaffenheit, daß sie für $x = -1 + \sqrt{2}$ am kleinsten, und für $x = -1 - \sqrt{2}$ am größten wird (74. §.).

Anmerkung.

Bisweilen läßt sich vorläufig aus der Form der vorgelegten Function entscheiden, ob es für die veränderliche Größe x wirklich einen solchen Werth giebt, wofür dieselbe Function am größten oder kleinsten werden soll, da dann noch alles darauf ankommen muß, denselben Werth von x zu bestimmen: folgende etwas allgemeinere Functionen sind Beyspiele davon.

78. §. Aufgabe.

Den Werth von x zu bestimmen, wofür $y = \frac{a + bx^3}{x}$ für was immer für bejahte Werthe von a, b am größten oder kleinsten wird.

Auflösung. Daß es für x einen Werth giebt, wofür y am kleinsten ist, davon kann man sich so überzeugen.

Es ist $y = \frac{a + bx^3}{x} = \frac{a}{x} + bx^2$.

Für

Für $x = o$ wird also $y = \infty$. Nimmt man aber an, daß x einen gewissen Werth μ hat; so ist allemal gestattet eine Zahl n dergestalt zu nehmen, daß $n^2 > \frac{a+b\mu^3}{b\mu^3}$ wird, daher auch

$$n^2 > \frac{a\mu+b\mu^4}{b\mu^4}, \text{ und } bn^3\mu^4 > an\mu+bn\mu^4.$$

Folglich $a\mu+bn^3\mu^4 > an\mu+bn\mu^4$

$$\text{und } \frac{a+bn^3\mu^3}{n\mu} > \frac{a+b\mu^3}{\mu}.$$

Das heißt: wenn $y = \frac{a+b\mu^3}{\mu}$ für $x = \mu$ wird; so kann dieselbe Function für einen gewissen Werth $x = n\mu$ gröſſer werden: also ist die Function y so beschaffen, daß sie von $y = \infty$ für $x = o$ an allmählig abnimmt, wenn x wächst, dieses aber nur so lang, bis x einen gewissen Werth erlangt, worauf y zu wachsen anfängt, wenn x fortwächst, mithin muß es für die veränderliche Gröſſe x einen solchen Werth geben, wobey y am kleinsten ist (71. §.). Und nun findet man ihn auf diese Art.

$$\text{Es ist } dy = \frac{3bx^3 - a - bx^6}{x^2} \cdot dx:$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = \frac{2bx^3 - a}{x^2} = o \text{ giebt } x = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}.$$

Und nun ist nach (74. §. 3. Zus.) der kleinste Werth selbst von y.

$$y = \left(a + b.\frac{a}{2b}\right) : \sqrt[3]{\frac{a}{2b}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2ba^2}.$$

Eine

Eine Anwendung hievon kann man so machen. Es soll ein cylindrisches Gefäß m Cubikschuhe in seinem Inhalte haben: welche Abmessungen muß man ihm geben, wenn es beym gegebenen Inhalte die kleinste Oberfläche haben soll?

α) Des Bodens Halbmesser sey x, und $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie; so ist πx^2 des Bodens Quadratinhalt; daher ist $\frac{m}{\pi x^2}$ des ganzen Gefäßes Höhe. Es ist ferner des Bodens Umfang $= 2\pi x$: also ist des Gefäßes Seitenfläche $= 2\pi x . \frac{m}{\pi x^2} = \frac{2m}{x}$.

β) Die gesammte Oberfläche des Gefäßes ohne Deckel ist demnach allemal $= \frac{2m}{x} + \pi x^2 = \frac{2m + \pi x^3}{x}$.

γ) Soll aber das Gefäß einen Deckel haben, den man dem Boden gleich setzen kann; so wird seine gesammte Oberfläche seyn $= \frac{2m + 2\pi x^3}{x}$.

δ) Beyde Formuln (β, γ) gehören zur allgemeinen $\frac{a + bx^3}{x}$, und man muß für (β) $a = 2m$, $b = \pi$ setzen: also ist für den Fall der kleinsten Oberfläche (β)

Des Bodens Halbmesser

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}} = \sqrt[3]{\frac{2m}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{m}{\pi}}.$$

Daher aus (α) des Gefäßes Höhe

$$\frac{m}{\pi x^2} = \sqrt[3]{\frac{m}{\pi}}.$$

Und

Und die kleinste Oberfläche (β).

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2ba^2} = 3\sqrt[3]{\pi m^2}.$$

Bey der kleinsten Oberfläche (β) ist demnach des Gefäßes Höhe dem Halbmesser seines Bodens gleich.

Aber für (γ) ist $a = 2m$, $b = 2\pi$: also ist im Fall der kleinsten Oberfläche (γ)

Des Bodens Halbmesser

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}} = \sqrt[3]{\frac{2m}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi}}.$$

Daher aus (α) des Gefäßes Höhe

$$= \frac{m}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{m}{2\pi}}.$$

Und die kleinste Oberfläche (γ)

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2a^2b} = 3\sqrt[3]{2\pi m^2}.$$

Bey der kleinsten Oberfläche (γ) muß demnach des Gefäßes Höhe dem Durchmesser des Bodens gleich seyn.

79. §. Aufgabe.

Den Werth von x zu bestimmen, wofür eine Function $y = \frac{ax - b}{cx^2 + d}$ für alle bejahte Werthe von a, b, c, d am größten wird.

Auflösung. Daß es einen solchen Werth für x wirklich geben muß, erhellet auf diese Art. Für $x = \frac{b}{a}$ wird $y = o$, aber für $x > \frac{b}{a}$ hat y einen bejahten Werth:

es

es muß also die Function y von $y=o$ an für $x=\frac{b}{a}$ zunehmen, indem $x>\frac{b}{a}$ wird, und wenn man beweisen kann, daß, im Fall x schon einen Werth $\mu>\frac{b}{a}$ erlangt hat, allemal ein anderer Werth $x=n\mu$ möglich ist, wofür y kleiner würde, als für $x=\mu$; so wird dieses zeigen, daß y von $y=o$ für $x=\frac{b}{a}$ nur so lange zunimmt, bis x einen gewissen Werth zwischen μ und $n\mu$ erlangt, worauf dieselbe Function abzunehmen anfängt, wenn x fortwächst, welcher Werth von x daher ein Größtes von y giebt. Nun kann jedes so dargethan werden. Nehme man an, es habe y von o an zugenommen, bis

$$y=\frac{a\mu-b}{c\mu^2+d} \text{ für } x=\mu.$$

Es ist möglich $n>\frac{ac\mu^2+ad}{ac\mu^2-bc\mu}$:

Daher auch $(ac\mu^2+ad)n<(ac\mu^2-bc\mu)n^2$

und um desto mehr

$$-bd+acn\mu^3+adn\mu-bc\mu^2<acn^2\mu^3-bcn^2\mu^2+ad\mu-bd$$

oder

$$(an\mu-b)(c\mu^2+d)<(a\mu-b)(cn^2\mu^3+d)$$

daher

$$\frac{an\mu-b}{cn^2\mu^2+d}<\frac{a\mu-b}{c\mu^2+d}.$$

Das

Das heißt: wenn y bis $y=\frac{a\mu-b}{c\mu^2+d}$ für $x=\mu$ zugenommen hat; so ist allemal ein anderer Werth $x=n\mu$ möglich, wofür y kleiner als für $x=\mu$ werden muß.

Und nun findet man den Werth von x, wobey $y=\frac{ax-b}{cx^2+d}$ am größten wird, so

$$dy=\frac{(a(cx^2+d)-2cx(ax-b))\,dx}{(cx^2+d)^2};$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx}=\frac{a(cx^2+d)-2cx(ax-b)}{(cx^2+d)^2}=0$$

giebt $x^2-\frac{2b}{a}x=\frac{d}{c}$, daher $x=\frac{b}{a}\left(1\pm\sqrt{\left(1+\frac{a^2d}{b^2c}\right)}\right)$.

Zusatz.

Nach (74. §. 3. Zus.) findet man nun den größten Werth von $y=\frac{ax-b}{cx^2+d}$ auf diese Art.

$$\text{Sey } \frac{b}{a}\left(1\pm\sqrt{\left(1+\frac{a^2d}{b^2c}\right)}\right)=\frac{bc\pm\sqrt{(b^2c^2+a^2cd)}}{ac};$$

$$\sqrt{(b^2c^2+a^2cd)}=R, \text{ daher } x=\frac{bc\pm R}{ac}.$$

Die erste Gleichung giebt

$$b^2c^2+a^2cd=R^2; \text{ daher } d=\frac{R^2-b^2c^2}{a^2c}: \alpha)$$

Und die zweyte Gleichung giebt:

$$x^2=\frac{b^2c^2\pm 2bcR+R^2}{a^2c^2}; cx^2=\frac{b^2c^2\pm 2bcR+R^2}{a^2c}. \quad \beta)$$

Also

Also ist $ax-b=\frac{a(bc\pm R)}{ac}-b=\frac{\pm R}{c}$;

und $cx^2+d=\frac{2R^2\pm 2bcR}{a^2c}$; aus (α,β): demnach

$$y=\frac{ax-b}{cx^2+d}=\frac{\pm a^2}{2R\pm 2bc}=\frac{\pm a^2}{2\sqrt{(b^2c^2+a^2cd)}\pm 2bc}$$

oder $$y=\frac{\pm a^2}{2bc\left(-1+\sqrt{\left(1+\frac{a^2d}{b^2c}\right)}\right)}.$$

80. §. Aufgabe.

Den Werth von x zu bestimmen, wofür $y=\frac{ax-bx^2}{cx+d}$ am größten wird.

Auflösung. Die Möglichkeit eines solchen Werthes von x erhellet so: Für $x=\frac{a}{b}$ findet man $y=0$. Nimmt man aber x nur um etwas kleiner als $\frac{a}{b}$, etwa $x=\frac{a}{b}-\frac{a}{nb}$; so wird y dafür einen bejahten Werth haben, da $y=0$ für $x=\frac{a}{b}-\frac{a}{b}=0$ seyn müßte. Die Function y ist also dergestalt beschaffen, daß sie von $y=0$ an, für $x=0$ allmählich wächst, bis sie noch einmal $=0$ wird, nämlich für $x=\frac{a}{b}$: es muß demnach zwischen $x=0$ und $x=\frac{a}{b}$ ein Werth von x liegen, wofür y am größten wird (71. §.), und ihn findet man so:

$$dy=\frac{((a-2bx)(cx+d)-c(ax-bx^2))dx}{(cx+d)^2};$$

also $\frac{dy}{dx} = \frac{(a-2bx)(cx+d)-c(ax-bx^2)}{(cx+d)^2} = 0$

giebt $x^2 + \frac{2d}{c}x = \frac{ad}{bc}$, und hieraus folgt

$$x = \frac{d}{c}\left(-1 \pm \sqrt{\left(1+\frac{ac}{bd}\right)}\right).$$

Zusatz.

Den größten Werth von $y = \frac{ax-bx^2}{cx+d}$ nach (74. §. 3. Zus.) zu bestimmen sey

$$\pm\sqrt{\left(1+\frac{ac}{bd}\right)} = R;\ 1+\frac{ac}{bd} = R^2;$$

so ist $x = \frac{d}{c}(-1+R)$, und $x^2 = \frac{d^2}{c^2}(R^2-2R+1)$,

oder $x^2 = \frac{d^2}{c^2}\left(\frac{ac}{bd}-2R+2\right) = \frac{ad}{bc} - \frac{2d^2}{c^2}(R-1)$.

Daher $ax-bx^2 = \frac{ad}{c}(R-1) - \frac{ad}{c} + \frac{2bd^2}{c^2}(R-1)$

$$= \left(\frac{ad}{c}+\frac{2bd^2}{c^2}\right)R - \frac{2(adc+bd^2)}{c^2};$$

und $cx+d = \frac{cd}{c}(R-1)+d = dR$;

also $y = \frac{ax-bx^2}{cx+d} = \left(\left(\frac{ad}{c}+\frac{2bd^2}{c^2}\right)R - \frac{2(adc+bd^2)}{c^2}\right) : dR$

$$= \frac{ac+2bd}{c^2} - \frac{2(ac+bd)R}{R^2c^2}$$

$$= \frac{ac+2bd}{c^2} - \frac{2(ac+bd)R}{c^2\left(1+\frac{a}{bd}\right)} = \frac{ac+2bd(1-R)}{c^2}$$

oder

$$\text{oder } y = \frac{ac + 2bd\left(1 \mp \sqrt{\left(1 + \frac{ac}{bd}\right)}\right)}{c^2}.$$

81. §. Aufgabe.

Den Werth von x zu bestimmen, wofür die Function $y = \frac{ax - bx^2}{cx^2 + d}$ am größten wird.

Auflösung. Die Möglichkeit hievon erhellet, wie im vor. §.; und nun findet man den verlangten Werth auf diese Art.

$$\text{Es ist } dy = \frac{((a-2bx)(cx^2+d) - 2cx(ax-bx^2))dx}{(cx^2+d)^2}$$

$$\text{Daher } \frac{dy}{dx} = \frac{(a-2bx)(cx^2+d) - 2cx(ax-bx^2)}{(cx^2+d)^2} = 0$$

$$\text{giebt } x^2 + \frac{2bd}{ac} \cdot x = \frac{d}{c}, \text{ und hieraus folgt:}$$

$$x = \frac{bd}{ac}\left(-1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{a^2c}{b^2d}\right)}\right).$$

Zusatz.

Den größten Werth von $y = \frac{ax - bx^2}{cx^2 + d}$ erhält man dadurch nach (74. §. 3. Zus.). Sey nämlich)

$$\pm\sqrt{\left(1 + \frac{a^2c}{b^2d}\right)} - 1 = R;$$

$$\text{so ist } \mp\sqrt{\left(1 + \frac{a^2c}{b^2d}\right)} + 1 = -R: \text{ also}$$

$$1 + \frac{a^2c}{b^2d} \pm 2\sqrt{\left(1 + \frac{a^2c}{b^2d}\right)} + 1 = R^2,$$

oder $2\left(1 \mp \sqrt{\left(1+\frac{a^2c}{b^2d}\right)}\right)+\frac{a^2c}{b^2d}=\frac{a^2c}{b^2d}-2R=R^2$.

Daher $x=\frac{bdR}{ac}$; $x^2=\frac{b^2d^2R^2}{a^2c^2}$;

folglich $x^2=\frac{d}{c}-\frac{2b^2d^2R}{a^2c^2}$.

Dieß giebt $ax-bx^2=\frac{bd}{c}R-\frac{b^3d^2}{a^2c^2}\cdot R^2$;

$cx^2+d=2d-\frac{2b^2d^2}{a^2c}\cdot R$:

also $y=\frac{ax-bx^2}{cx^2+d}=\frac{b}{2c}\cdot R$, oder

$y=\frac{b}{2c}\left(-1 \pm \sqrt{\left(1+\frac{a^2c}{b^2d}\right)}\right)$.

Der

Der IV. Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Bestimmung der Werthe, welche gewisse Functionen von x für diejenigen Werthe von x haben müssen, für welche sie $\frac{0}{0}$ zu geben scheinen; nebst fernerer Anwendung auf die Auflösung gebrochener Functionen in mehrere Brüche, oder in Reihen.

82. §. Lehrsatz.

Eine gebrochene Function $y=\frac{P}{Q}$ von x kann für einen gewissen Werth a von x einen völlig bestimmten Werth haben, obgleich dieselbe für $x=a$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

Beweis. Weil hier nur von der Möglichkeit die Rede ist; so wird ein einzelner Fall zum Beweise hinreichen.

Demzufolge sey $P=a^2-x^2$ und $Q=a-x$, daher sey die gegebene Function $y=\frac{a^2-x^2}{a-x}$. Nun ist $a^2-x^2=(a+x)(a-x)$: also ist $y=\frac{(a+x)(a-x)}{a-x}$ oder $y=a+x$. Dieses ist also der wahre Werth von $y=\frac{a^2-x^2}{a-x}$, und zwar allemal, man mag der veränderlichen Grösse x, was immer für einen Werth beylegen. Wenn ich nämlich $y=\frac{a^2-x^2}{a-x}$ schreibe; so gebe ich dadurch zu verstehen,

daß y nichts anders, als der Quotient ist, welcher entstehen würde, wenn man $a^2 - x^2$ durch $a - x$ wirklich dividirte, und jener Quotient ist im strengsten Verstande $a+x$. Will ich demnach wissen, was für einen Werth die Function y erlangen muß, wenn $x=a$ wird; so muß ich dieses bey $y=a+x$ thun, und dann finde ich, es sey $y=a+a=2a$. Wenn ich mich aber dazu nicht des wahren schon bestimmten Quotienten $y=a+x$, sondern seiner Bezeichnung $y=\frac{a^2-x^2}{a-x}$ bediene; so werde ich finden, daß $y=\frac{a^2-a^2}{a-a}=\frac{0}{0}$ für $x=a$ wird. Aus diesem Beyspiele lerne ich demnach, daß eine Function y von x für einen gewissen Werth der veränderlichen Grösse x unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen kann, obgleich dieselbe für eben den Werth von x einen völlig bestimmten Werth hat.

1. Zusatz.

Daß eine gebrochene Function $y=\frac{P}{Q}$ für einen gewissen Werth $x=a$ einen völlig bestimmten Werth A hat, und dennoch unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, dieses rührt daher, weil der Zähler P, oder der Nenner Q, oder sowohl jener als dieser in zweene Factoren zerlegt werden kann, so, daß ein Factor von P einem von Q gleich ist, und diese gleichen Factoren für $x=a$ gleich Null werden: alsdann ist nämlich y unter der Form $y=A.\frac{p}{p}$ begriffen, daher allemal $=A$, obgleich $p=0$ für $x=a$ ist, mithin $y=\frac{A.0}{0}=\frac{0}{0}$ zu seyn scheint.

2. Zu-

2. Zusatz.

Wenn $\frac{0}{0}$ gegeben wird; so kann man vom Werthe dieses Bruches nichts bestimmtes sagen, wenn man nicht weiß, wie sein Zähler und Nenner entstanden ist, welches $\frac{0}{0}$ weder sagt, noch sagen kann. Es kann seyn, daß der Zähler und Nenner absolute Nullen sind, wie $x=0$, und $\omega-\omega=0$, und dann ist $\frac{0}{0}=1$, wie $\frac{x}{x}=1$, es mag x was immer für einen Werth haben, es mag demnach auch $x=0$ seyn. Es kann aber auch geschehen, daß der Zähler allein oder der Nenner allein, oder sowohl jener als dieser eigentlich das Product aus einer bestimmten Grösse in die absolute Null ist, wie z. B. $y=\frac{A.0}{B.0}=\frac{0}{0}$, aus $y=\frac{A.x}{B.x}$ für $x=0$ entstehen würde, in welchem Fall $y=\frac{A}{B}$ seyn müßte. Wenn man also nach dem Werthe von $\frac{0}{0}$ bisweilen frägt; so setzt diese Frage voraus, daß man weiß, aus welcher Function $y=\frac{P}{Q}$ von x der Bruch $y=\frac{0}{0}$ für einen gewissen Werth von x entstanden ist, sonst ist die Beantwortung jener Frage unmöglich.

3. Zusatz.

Wenn man bey der Frage (2. Zus.) bestimmt weiß, daß eine Function $y=\frac{P}{Q}$ von der Beschaffenheit ist, daß sie, genau zerlegt, die Form $y=\frac{A.p}{p}$ erlangt, und hier $p=0$ für einen gewissen Werth $x=a$ werden müßte; so kann

der Werth von y für $x=a$ gar nicht mehr unbekannt seyn, indem er $=A$ ist (1. Zus.), oder $=\alpha$, wenn A selbst für $x=a$ einen bestimmten Werth $=\alpha$ erlangen soll. Die Frage (2. Zus.) kann daher nur alsdann aufgeworfen werden, wenn man bey einer gebrochenen Function $y=\frac{P}{Q}$, wobey $P=0$, $Q=0$ für $x=a$ wird, nicht sogleich übersieht, ob nicht y in Factoren von der erwähnten Beschaffenheit sich zerlegen ließ.

83. §. Aufgabe.

Eine Function $y=\frac{P}{Q}$ von x ist so beschaffen, daß für einen Werth $x=a$ sowohl $P=0$ als $Q=0$, daher $\frac{P}{Q}=\frac{0}{0}$ werden muß; man soll untersuchen, ob es nicht für die Function y einen bestimmten mit $x=a$ zusammenhängenden Werth giebt.

Auflösung. 1) Man nehme an, daß $x+e$ statt x in P und Q gesetzt wird; so erlangt dafür P den Werth I), Q den Werth II) nach (67. §.): also erlangt $y=\frac{P}{Q}$ den Werth III).

$$\text{I)}\quad P+\frac{edP}{dx}+\frac{e^2d^2P}{2.dx^2}+\frac{e^3d^3P}{2\,3.dx^3}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{II)}\quad Q+\frac{e^1Q}{dx}+\frac{e^2d^2Q}{2.dx^2}+\frac{e^3d^3Q}{2,3,dx^3}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{III)}\quad \frac{P+\frac{edP}{dx}+\frac{e^2d^2P}{2,dx^2}+\frac{e^3d^3P}{2,3,dx^3}+\cdots\cdots\cdots}{Q+\frac{edQ}{dx}+\frac{e^2d^2Q}{2,dx^2}+\frac{e^3d^3Q}{2,3,dx^3}+\cdots\cdots\cdots}$$

2) Die-

2) Dieſes iſt allemal richtig, es mag x was immer für einen Werth haben: wenn man alſo vorausſetzt, daß $x=a$ in $\frac{P}{Q}$ iſt, für welchen Fall eigentlich $P=o$, $Q=o$ ſeyn ſoll; ſo drückt III) in (n. 1.) denjenigen Werth aus, welchen $y=\frac{P}{Q}$ für $x=a+e$ erlangt, welcher daher iſt:

$$\text{IV)}\quad \frac{edP}{dx}+\frac{e^2d^2P}{2dx^2}+\frac{e^3d^3P}{2.3.dx^3}+\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{edQ}{dx}+\frac{e^2d^2Q}{2dx^2}+\frac{e^3d^3Q}{2.3.dx^3}+\cdots\cdots\cdots$$
$$=\frac{dP}{dx}+\frac{ed^2P}{2dx^2}+\frac{e^2d^3P}{2.3.dx^3}+\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{dQ}{dx}+\frac{ed^2Q}{2dx^2}+\frac{e^2d^3Q}{2.3.dx^3}+\cdots\cdots\cdots$$

3) Wenn dieſes der wahre Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x=a$ ſeyn ſoll, indem er eigentlich der Werth davon für $x=a+e$ iſt; ſo muß man $e=o$ ſetzen: der wahrhafte Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x=a$ iſt alſo $\frac{dP}{dx}:\frac{dQ}{dx}=\frac{dP}{dQ}$.

Iſt nun entweder $\frac{dP}{dx}$ oder $\frac{dQ}{dx}$ für $x=a$ gleich Null; ſo iſt im erſten Fall $\frac{dP}{dQ}=o$, und im andern Fall iſt $\frac{dP}{dQ}=\infty$ (I. B. 106. §. 5. Zuſ.), folglich hat $y=\frac{P}{Q}$ für $x=a$ keinen endlichen Werth, als welcher aus $\frac{dP}{dQ}$ entſtehen müßte.

Wenn aber sowohl $\frac{dP}{dx}$ als $\frac{dQ}{dx}$ für $x=a$ einen endlichen Werth hat; so muß einen solchen auch $\frac{dP}{dQ}$ für $x=a$ haben, und dieß ist der wahre Werth von $y=\frac{P}{Q}$ für $x=a$.

Auſſer diesen beyden Fällen giebt es noch einen Fall, wobey für $x=a$ sowohl $\frac{dP}{dx}=o$ als $\frac{dQ}{dx}=o$ wird, und alsdann ist auch $\frac{dP}{dQ}=\frac{o}{o}$ für $x=a$, welches den Werth von $y=\frac{P}{Q}$ für $x=a$ geben müßte: in diesem Fall kann man also aus $\frac{dP}{dQ}$ keinen bestimmten Werth herleiten, welchen $y=\frac{P}{Q}$ für $x=a$ haben sollte.

4) Da aber $\frac{dP}{dQ}$ eben so gut eine gebrochene Function von x ausdrückt, wie $\frac{P}{Q}$ eine solche ausdrückte; so wird nun $\frac{d^2P}{d^2Q}$ den wahren Werth von $\frac{dP}{dQ}$ für $x=a$ geben: da also $\frac{dP}{dQ}$ den Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x=a$ geben mußte; so wird $\frac{d^2P}{d^2Q}$ den Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x=a$ ausdrücken, welcher demnach entweder $=o$ oder $=\infty$ seyn muß, wenn d^2P allein $=o$, oder d^2Q allein $=o$ ist; oder es wird der Werth von $\frac{P}{Q}$ durch einen endlichen

Werth

Werth von $\frac{d^2P}{d^2Q}$ bestimmt, wenn sowohl d^2P als d^2Q für $x=a$ einem endlichen Werth hat; oder man wird aus $\frac{d^2P}{d^2Q}$ keinen Werth für $\frac{P}{Q}$ sicher bestimmen können, wenn sowohl $d^2P=0$ als $d^2Q=0$ für $x=a$ seyn sollte.

5) Nun aber gelten dieselben Schlüsse auch für $\frac{d^3P}{d^3Q}$: denn weil $\frac{d^2P}{d^2Q}$ als eine gebrochene Function betrachtet wird, welche für $x=a$ in $\frac{0}{0}$ übergehen soll; so wird $\frac{d.d^2P}{d.d^2Q}=\frac{d^3P}{d^3Q}$ der wahre Werth seyn, welchen $\frac{d^2P}{d^2Q}$ für $x=a$ hat: da also $\frac{d^2P}{d^2Q}$ den Werth ausdrücken soll, welchen $\frac{P}{Q}$ für $x=a$ erlangt; so muß denselben Werth nothwendig auch $\frac{d^3P}{d^3Q}$ ausdrücken. Findet man daher d^3P allein $=0$, oder d^3Q allein $=0$ für $x=a$; so ist für $x=a$ von $\frac{P}{Q}$ wahrer Werth $\frac{d^3P}{d^3Q}=0$ im ersten Fall, und $=\infty$ im zweyten Fall: hat aber sowohl d^3P als d^3Q für $x=a$ einen endlichen Werth; so wird einen solchen für $x=a$ auch $\frac{P}{Q}$ haben, nämlich $=\frac{d^3P}{d^3Q}$: ist aber für $x=a$ sowohl $d^3P=0$ als $d^3Q=0$; so ist $\frac{d^3P}{d^3Q}=\frac{0}{0}$ der wahre Werth von $\frac{P}{Q}$, woraus nichts bestimmtes folgt, man muß vielmehr $\frac{d^4P}{d^4Q}$ zu Hülfe nehmen u. s. f.

1. Zusatz.

Ob daher eine gebrochene Function $y = \frac{P}{Q}$ von x für denjenigen Werth von x, wofür dieselbe in $\frac{0}{0}$ übergeht, einen bestimmten endlichen Werth hat, dieses wird man so untersuchen können.

Man nehme die ersten Verschwindungs-Quotienten dP, dQ ihres Zählers und Nenners, und suche, ob nicht die Quotienten $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dQ}{dx}$ für $x = a$ beyde einen endlichen Werth haben: geschieht dieses; so wird der Quotient $\frac{dP}{dx} : \frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dQ}$, wenn man bey ihm $x = a$ machet, einen endlichen Werth haben, welcher der Werth ist, den die Function $y = \frac{P}{Q}$ für $x = a$ haben muß, obgleich dieselbe für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht. Wenn man aber findet, daß für $x = a$ entweder $\frac{dP}{dx}$ oder $\frac{dQ}{dx}$ allein gleich Null ist; so wird man versichert seyn können, daß es keinen endlichen Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x = a$ giebt; es wird vielmehr $\frac{P}{Q} = 0$ im ersten Fall, und $= \infty$ im zweyten Fall seyn: wenn endlich sowohl $\frac{dP}{dx} = 0$ als $\frac{dQ}{dx} = 0$ für $x = a$ gefunden wird; so ist der wahre Werth von $y = \frac{P}{Q}$ noch ungewiß. Dem zufolge nimmt man die zweyten Verschwindungs-Quotienten d^2P, d^2Q zu Hülfe, und beurtheilet $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\frac{d^2Q}{dx^2}$ so, wie

wie man zuvor $\frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dx}$ beurtheilt hatte: und wenn man auch $\frac{d^2P}{dx^2}=0, \frac{d^2Q}{dx^2}=0$ für $x=a$ findet; so nimmt man die dritten Verschwindungs-Quotienten d^3P, d^3Q, und verfährt mit $\frac{d^3P}{dx^3}, \frac{d^3Q}{dx^3}$ auf gleiche Art, u. s. f.

Beyspiele.

I. Den Werth von $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$ für $x=1$ zu bestimmen.

Hier ist $P=x-x^{n+1}$ und $Q=1-x$:

also $dP=dx-(n+1)x^n dx$; $dQ=-dx$,

daher $\frac{dP}{dx}=1-(n+1)x^n$; $\frac{dQ}{dx}=-1$.

Für $x=1$ ist $\frac{dP}{dx}=1-n-1=-n$; und $\frac{dQ}{dx}=-1$:

also $\frac{dP}{dx}:\frac{dQ}{dx}=\frac{-n}{-1}=n=\frac{P}{Q}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$ für $x=1$.

II. Den Werth von $y=\frac{x-(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$ für $x=1$ zu finden.

Es ist $P=x-(n+1)x^{n+1}$ und $Q=(1-x)^2$:

also $dP=dx-(n+1)^2x^n dx$; $dQ=-2dx(1-x)$;

mithin $\frac{dP}{dx}=1-(n+1)^2x^n$; $\frac{dQ}{dx}=-2(1-x)$.

Daher $\frac{dP}{dx}=1-(n+1)^2=-n^2-2n$; $\frac{dQ}{dx}=0$ für $x=1$;

folglich $\frac{dP}{dx}:\frac{dQ}{dx}=\infty=\frac{x-(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$ für $x=1$.

III. Den

III. Den Werth von $y = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ für $x = 1$ zu bestimmen.

Es ist $P = x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}$; $Q = (1-x)^2$:

also $dP = dx-(n+1)^2x^n dx+n(n+2)x^{n+1}dx$;

$dQ = -2dx(1-x)$,

daher $\frac{dP}{dx} = 1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}$; $\frac{dQ}{dx} = -2(1-x)$:

also $\frac{dP}{dx} = 0$ und $\frac{dQ}{dx} = 0$ für $x = 1$.

Demnach nehme man $d^2P = -n(n+1)^2x^{n-1}dx^2$
$+n(n+2)(n+1)x^n dx^2$;

und $d^2Q = +2dx^2$; so ist

$\frac{d^2P}{dx^2} = n^2+n$ und $\frac{d^2Q}{dx^2} = 2$ für $x = 1$:

also $\frac{d^2P}{dx^2} : \frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{n^2+n}{2}$ der Werth von y für $x = 1$.

IV. Den Werth von $y = \frac{a^n-x^n}{la-lx}$ für $x = a$ zu finden.

Es ist $P = a^n-x^n$; $Q = la-lx$; also ist

$dP = -nx^{n-1}dx$; $dQ = \frac{-dx}{x}$;

folglich $\frac{dP}{dx} = -nx^{n-1}$; $\frac{dQ}{dx} = -a^{n-1}$ für $x = a$:

also $\frac{dP}{dx} : \frac{dQ}{dx} = \frac{-na^{n-1}}{-a^{-1}} = na^n$ der Werth von y

für $x = a$.

V. Den

V. Den Werth von $y = \frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ für $x = 1$ zu bestimmen.

Es sey $P = lx$; $Q = \sqrt{(1-x)}$; so wird seyn

$$dP = \frac{dx}{x}; \quad dQ = -\frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}}: \text{ also}$$

$$\frac{dP}{dx} = 1; \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{-1}{2,0} \text{ für } x = 1,$$

$$\text{folglich } \frac{dP}{dx} : \frac{dQ}{dx} = 1 : \frac{-1}{2,0} = 0;$$

Daher auch $y = 0$ für $x = 1$.

2. Zusatz.

Wenn PQ eine solche Function von x ist, wobey der eine Factor $P = 0$, und der andere $Q = \infty$ werden mag, wenn x einen gewissen Werth erlangt, etwa $x = a$ wird; so nehme man $R = \frac{1}{Q}$, daher $PQ = \frac{P}{R}$. Da nun, für $x = a$, $P = 0$, $Q = \infty$, mithin $R = 0$ werden soll; so kann man nach (1. Zus.) den Werth suchen, welchen $\frac{P}{R}$ für $x = a$ erlangt, und dann wird er den Werth geben, welchen PQ alsdann hat, wenn $P = 0$ und $Q = \infty$ für $x = a$ wird.

3. Zusatz.

Wenn sowohl $P = \infty$ als $Q = \infty$ bey $\frac{P}{Q}$ für $x = a$ wird; so nehme man $p = \frac{1}{P}$ und $q = \frac{1}{Q}$: also $\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$. Da nun $P = \infty$; $Q = \infty$ für $x = a$ wird; so muß $p = 0$, $q = 0$ dafür seyn: da man daher den Werth von $\frac{q}{p}$ für

für $x=a$ nach (1. Zuſ.) ſuchen kann; ſo wird er den Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x=a$ geben müſſen.

Anmerkung.

Der Erfinder der Regeln (1. Z.) ſoll Joh. Bernoulli ſeyn [a]; davon handelt Hr. Euler denjenigen Gründen gemäß, worauf er ſeine Differential-Rechnung gebauet hat [b]; nur kurz erwähnt derſelbe desjenigen Weges, auf welchem man ſich von der Richtigkeit der gedachten Regeln am vollkommenſten überzeugt [c]; dieſen Weg ſetzt Hr. Hofr. Käſtner am bündigſten auseinander [d], und giebt derjenigen Behandlungsart Veranlaſſung, deren ſich Hr. Hofr. Karſten bediente [e], wie dieſes auch im Anfang der vorhergehenden Auflöſung geſchah.

(a) Oper. Ioan. Bernoulli. T. I. n. 71.
(b) Inſtit. Calc. Differ. P. II. Cap. XV.
(c) Ibid. §. 358.
(d) Anfangsgr. der Analyſ. des Unendl. 372. §.
(e) Anfangsgr. der mathem. Analyſ. X. Abſchn. 265. §.

84. §. Aufgabe.

Eine gegebene ächte gebrochene Function $\frac{M}{N}$ von x (I. B. 163. §.), deren Nenner N aus lauter ungleichen einfachen Factoren von der Form $P-qx$ beſtehet, in ſo viele Brüche zu zerlegen, als der Nenner N dergleichen Factoren hat.

Auflöſung. In der Bedeutung (I. B. 165. §.) kömmt bey der Auflöſung dieſer Aufgabe alles darauf an, den

den Zähler A eines von den verlangten Brüchen für den Nenner $p-qx$ zu bestimmen, damit $\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qx}+\frac{L}{X}$ werden möge, wo $X=N:(p-qx)$ das Product aus allen übrigen Factoren von N ausdrückt.

Daher ist $\frac{M}{N}=\frac{AX+L(p-qx)}{X(p-qx)}$; aber $N=X(p-qx)$:

also auch $M=AX+L(p-qx)$, und $L=\frac{M-AX}{p-qx}$.

Es soll aber L eine ganze Function seyn: also ist $M-AX$ theilbar durch $p-qx$, mithin ist $M-AX$ ein Product, dessen ein Factor $=p-qx$ seyn muß. Für $p-qx=0$, daher für $x=\frac{p}{q}$ soll demnach $M-AX=0$, folglich $A=\frac{M}{X}$ werden. Weil ferner $X=\frac{N}{p-qx}$ war; so ist auch $A=\frac{M(p-qx)}{N}$ für $x=\frac{p}{q}$.

Sodann wird $M(p-qx)=0$ für $x=\frac{p}{q}$, und dafür muß auch $N=X(p-qx)=0$ seyn: also ist A der Werth von $\frac{M(p-qx)}{N}$, welchen dieser Bruch für $x=\frac{p}{q}$ wirklich erlangt, obgleich derselbe dafür in $\frac{0}{0}$ übergeht: wegen (83. §. 1. Zus.) ist daher $A=\frac{d.M(p-qx)}{dN}$, oder

$$A=\frac{(p-qx)dM-Mqdx}{dN}=-\frac{Mqdx}{dN} \text{ für } x=\frac{p}{q}.$$

1. Zusatz.

Wenn $\frac{M}{N}$ Bruches Nenner N aus lauter einfachen ungleichen Factoren von der Form $p-qx$ bestehet; so findet man für jeden solchen Factor den Zähler A des zugehörigen Partialbruches, wenn man das Product aus dem Zähler M in $-q$ und dx durch den Verschwindungs-Quotienten des Nenners N dividirt, und beym erhaltenen Quotienten $x=\frac{p}{q}$ machet.

Beyspiele.

I. $\frac{M}{N}=\frac{5-4x}{3-7x-6x^2}=\frac{5-4x}{(3+2x)(1-3x)}$.

Hier ist $M=5-4x$; $N=3-7x-6x^2$.

Und sey $\frac{M}{N}=\frac{A}{3+2x}+\frac{B}{1-3x}$;

so ist $A=\frac{2(5-4x)dx}{d(3-7x-6x^2)}=\frac{(10-8x)dx}{-(7+12x)dx}$

$=\frac{10-8x}{-7-12x}=\frac{22}{11}=2$ für $x=\frac{p}{q}=-\frac{3}{2}$.

Und $B=\frac{-3(5-4x)dx}{d(3-7x-6x^2)}=\frac{-3(5-4x)}{-7-12x}$

$=\frac{-11}{-11}=1$ für $x=\frac{p}{q}=\frac{1}{3}$.

Demnach $\frac{M}{N}=\frac{2}{3+2x}+\frac{1}{1-3x}$.

II. $\frac{M}{N}=\frac{x^9}{1+x^{17}}$.

Man

Man ſoll dieſen Bruch in zween Brüche zerlegen, wovon einer $1+x$, als einen Factor von $1+x^{17}$, zum Nenner haben ſoll.

Dieſer Bruch heiße $\frac{A}{1+x}$.

Nun iſt $M=x^9$; $N=1+x^{17}$;

alſo $A=\frac{1.x^9.dx}{d(1+x^{17})}=\frac{x^9dx}{17x^{16}dx}=\frac{1}{17x^7}=-\frac{1}{17}$

für $x=\frac{p}{q}=-1$.

Der verlangte Bruch, der $1+x$ zum Nenner bekömmt, iſt alſo $\frac{A}{1+x}=\frac{-1}{17(1+x)}$.

2. Zuſatz.

Man ſieht nun leicht ein, in welchen Umſtänden dieſe Methode der in (I. B. 165. §.) vorgetragenen vorzuziehen iſt. Wenn man nämlich die dortige Methode brauchen will; ſo muß man allemal den andern Factor X des Nenners N wiſſen, wofern man den Zähler A für den Factor $p-qx$ zu beſtimmen hat, welches aber hier gar nicht nöthig iſt: wenn alſo der Nenner N nicht durch Factoren ausgedrückt iſt, woraus man X ſogleich erkennen würde, wenn man demnach erſt N durch $p-qx$ dividiren müßte, und dadurch oft einen langen Quotienten X erhalten würde; ſo wird die hier nach Hrn. Euler gelehrte Methode der dortigen vorgezogen zu werden verdienen: kann man aber X leicht abnehmen; ſo wird auch die dortige Methode bequem ſeyn.

85. §. Aufgabe.

Der Nenner N einer gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ von x hat einen Factor $=(p-qx)^n$, und der andere ist $=X$: man soll dieselbe Function, wie in (I. B. 166. §.) in nachstehende Brüche zerlegen.

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{(p-qx)^n}+\frac{B}{(p-qx)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qx)^{n-2}}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{P}{(p-qx)^{n-r}}+\frac{Q}{(p-qx)^{n-r-1}}+\cdots+\frac{Z}{p-qx}+\frac{\omega}{X}.$$

Auflösung. Man muß zeigen, auf welche Art sich die Zähler A, B, C, D, --- P, Q --- Z bestimmen lassen. Dem zufolge erhält man aus der angenommenen Gleichung die folgende:

$$\frac{M}{N}=\frac{\left(\begin{array}{l}A+B(p-qx)+C(p-qx)^2+D(p-qx)^3+\cdots\\ \cdots+P(p-qx)^r+Q(p-qx)^{r+1}+\cdots+Z(p-qx^{n-1})\end{array}\right)X+\omega(p-qx)^n}{(p-qx)^n.X}$$

Nun ist $N=(p-q)^n.X$; daher auch

$$M=\left(\begin{array}{l}A+B(p-qx)+C(p-qx)^2+D(p-qx)^3+\cdots\\ \cdots+P(p-qx)^r+Q(p-qx)^{r+1}+\cdots+Z(p-qx)^{n-1}\end{array}\right)X+\omega(p-qx)^n,$$

folglich

$$\omega=\frac{M-\left(\begin{array}{l}A+B(p-qx)+C(p-qx)^2+D(p-qx)^3+\cdots\cdots\\ \cdots+P(p-qx)^r+Q(p-qx)^{r+1}+\cdots+Z(p-qx)^{n-1}\end{array}\right)X}{(p-qx)^n}$$

Nun soll ω eine ganze Function seyn, mithin ist bey der letzten Gleichung der ganze Zähler durch den Nenner $(p-qx)^n$ theilbar: also, weil X den Factor $p-qx$ gar nicht enthalten soll, muß auch

$\mu=$

$$\mu = M - A - B(p-qx) - C(p-qx)^2 - D(p-qx)^3 - \ldots$$
$$\ldots - P(p-qx)^r - Q(p-qx)^{r+1} - \ldots - Z(p-qx)^{n-r}$$

durch $(p-qx)^n$ theilbar seyn. Man kann demnach diese Function als ein Product betrachten, dessen ein Factor $= p - qx$ ist, und so muß für $p - qx = 0$, daher für $x = \frac{p}{q}$ die ganze Function μ gleich Null werden, woraus folgt, es sey

1) $\frac{M}{X} - A = 0.$

2) $\frac{M}{X} - A - B(p - qx) = 0.$

3) $\frac{M}{X} - A - B(p-qx) - C(p-qx)^2 = 0.$

4) $\frac{M}{X} - A - B(p-qx) - C(p-qx)^2 - D(p-qx)^3 = 0.$

u. s. f.

$r-1)$ $\frac{M}{X} - A - B(p-qx) - C(p-qx)^2 \ldots - P(p-qx)^r = 0.$

Uebrigens ist klar, daß diese Gleichungen für $x = \frac{p}{q}$ gelten. Wenn aber die Functionen 1) 2) 3) $\ldots r-1)$ für $x = \frac{p}{q}$ gleich Null sind; so muß auch jeder nte Verschwindungs-Quotient davon durch dx^n dividirt gleich Null seyn, wenn man auch bey ihm $x = \frac{p}{q}$ setzt: aus 2) 3) 4) $\ldots r-1)$ findet man also folgende Gleichungen für $x = \frac{p}{q}$.

aus 2) $d\frac{M}{X} : dx + qB = 0.$

aus 3) $d^2\frac{M}{X} : dx^2 - 2q^2C = 0.$

aus 4) $d^3\frac{M}{X} : dx^3 + 2.3\,q^3D = 0.$

u. s. f.

aus r−1) $d^{r-1}\frac{M}{X} : dx^{r-1} \pm 2.3.4.\ldots.(r-1)q^{r-1}P = 0.$

Bey der letzten Gleichung muß (+) oder (—) Statt finden, nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist. Aus 1) und diesen Gleichungen erhält man endlich die verlangten Zähler A, B, C ..., wie sie folgen.

$$A = \frac{M}{X}.$$

$$B = \frac{-1}{q\,dx} \cdot d\frac{M}{X}.$$

$$C = \frac{+1}{2q^2dx^2} \cdot d^2\frac{M}{X}.$$

$$D = \frac{-1}{2.3.q^3dx^3} \cdot d^3\frac{M}{X}. \qquad \text{Für } x = \frac{p}{q}.$$

u. s. f.

$$P = \frac{\mp 1}{2.3\ldots(r-1)\,q^{r-1}dx^{r-1}} \cdot d^{r-1}\frac{M}{X}.$$

Und bey dieser letzten Gleichung findet (—) oder (+) Statt, nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Beys

Beyspiel.

Die Function $\frac{M}{N} = \frac{x^3}{(1-x)^2(1+x^4)}$ zu zerlegen.

Sey $\frac{M}{N} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{\omega}{1+x^4}$.

Daher $M = x^3$; $X = 1+x^4$; $p-qx = 1-x$; $x = \frac{p}{q} = 1$.

Mithin $d\frac{M}{X} : dx = \frac{3x^2 - x^6}{(1+x^4)^2}$.

Die Zähler A, B erhält man hieraus für $x = \frac{p}{q} = 1$, wie sie folgen.

$$A = \frac{M}{X} = \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \frac{-1}{qdx} \cdot d\frac{M}{X} = \frac{-1}{1}\left(\frac{3x^2 - x^6}{(1+x^4)^2}\right) = \frac{-1}{1} \cdot \frac{2}{4} = \frac{-1}{2}.$$

Also $\frac{M}{N} = \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2(1-x)} + \frac{\omega}{1+x^4}$

86. §. Aufgabe.

Es sind z und u zwo Functionen von x von der Form $\alpha x^a + \beta x^b + \gamma x^c + \cdots$, und m, n sind zwo ganze oder gebrochene bejahte Zahlen: man soll für die gebrochene Function $\frac{z^m}{u^n}$ eine gleichgültige Reihe der Potenzen von x bestimmen.

Auflösung. Bekanntlich setzt man die gebrochene Function $\frac{z^m}{u^n}$ einer beliebigen Reihe von der Form

$A+Bx^k+Cx^l+\cdots$ gleich, und ſucht hierauf ihre noch unbeſtimmten Coefficienten A, B, C, D ... aus der Gleichung $\frac{z^m}{u^n}=A+Bx^k+Cx^l+\cdots$ zu beſtimmen (I. B. 131. §.). Wir wollen dieſe gleichgültige Reihe indeſſen mit einem Buchſtab R bezeichnen, und ſtatt $\frac{z^m}{u^n}=R$ eine andere Gleichung aufſuchen, aus welcher ſich die unbeſtimmten Coefficienten derſelben Reihe ungemein leichter beſtimmen laſſen mögen.

Aus $\frac{z^m}{u^n}=R$ folgt $\log\frac{z^m}{u^n}=\log R$,

daher $m\log z-n\log u=\log R$, und nun

$\frac{mdz}{z}-\frac{ndu}{u}=\frac{dR}{R}$, folglich

$(mudz-nzdu)R=zudR$.

Und aus dieſer Gleichung wird es allemal möglich ſeyn, die Coefficienten der Reihe R nach (I. B. 83. §. Zuſ.) gehörig zu beſtimmen, weil dieſe Gleichung nothwendig für jeden Werth von x, auch für $x=0$, gelten muß, indem die Gleichung $\frac{z^m}{u^n}=R$, woraus dieſe entſtanden iſt, dafür gelten mußte.

1. Zuſatz.

Für $u=1$ wäre $du=0$, mithin $mdz.R=zdR$, und aus dieſer Gleichung laſſen ſich die Coefficienten einer Reihe R herleiten, welche der Potenz z^m von $z=\alpha x^a+\beta x^b+\gamma x^c+\cdots$ gleich ſeyn ſoll.

2. Zusatz.

Setzt man aber $z=1$, mithin $dz=0$; so übergeht die bey der Auflösung der vorigen Aufgabe gefundene Gleichung in $-nRdu=udR$, und hieraus findet man die Coefficienten einer Reihe R, welche der gebrochenen Function $\frac{1}{u^n}$ gleich seyn soll.

3. Zusatz.

Weil die verlangte Reihe $R=A+Bx^k+Cx^l+\text{----}$, wobey k, l---- bejahte Zahlen seyn sollen, derjenigen Function, welche in sie verwandelt wird, für jeden Werth von x, auch für $x=0$, gleich seyn muß, und $R=A$ für $x=0$ ist; so muß A demjenigen Werthe gleich gesetzt werden, welchen die in die Reihe R zu verwandelnde Function für $x=0$ erlangen mag.

Beyspiele.

Man soll $\sqrt{(4+x^4)}$ durch eine Reihe ausdrücken.

Sey $z^m=\sqrt{(4+x^4)}=(4+x^4)^{\frac{1}{2}}$, mithin $z=4+x^4$; $m=\frac{1}{2}$.

Ferner sey $z^m=\sqrt{(4+x^4)}=A+Bx^4+Cx^{4+p}+Dx^{4+2p}+Ex^{4+3p}+\text{----}=R$.

So ist $dz=4x^3dx$, mithin $\frac{mdz}{dx}=2x^3$;

Und $\frac{dR}{dx}=4Bx^3+(4+p)Cx^{3+p}+(4+2p)Dx^{3+2p}+(4+3p)Ex^{3+3p}+\text{----}$

Daher $\frac{mdz}{dx} \cdot R = 2Ax^3 + 2Bx^7 + 2Cx^{7+p} + 2Dx^{7+2p}$
$+ 2Ex^{7+3p} + \text{----}$

und $\frac{zdR}{dx} = 4.4Bx^3 + 4(4+p)Cx^{3+p} + 4(4+2p)Dx^{3+2p}$
$+ 4(4+3p)Ex^{3+3p} + \text{----}$
$+ 4Bx^7 + (4+p)Cx^{7+p} + (4+2p)Dx^{7+2p}$
$+ (4+3p)Ex^{7+3p} + \text{----}$

Nun aber sind bey $\frac{mdz}{dx}R$ die zwoen nächsten Potenzen x^3 und x^7, und die Differenz ihrer Exponenten ist $7-3=4$: nehmen wir demnach $p=4$, daher die verlangte Reihe

$$R = A + Bx^4 + Cx^8 + Dx^{12} + Ex^{16} + \text{----}$$

Und es ist nach (1. Zus.) $\frac{mdz}{dx}R = \frac{zdR}{dx}$, mithin

$2Ax^3 + 2Bx^7 + 2Cx^{11} + 2Dx^{15} + 2Ex^{19} + \text{-----} =$
$= 4.4Bx^3 + 4.8Cx^7 + 4.12Dx^{11} + 4.16Ex^{15} + 4.20Fx^{19} + \text{---}$
$+ 4Bx^7 + 8Cx^{11} + 12Dx^{15} + 16Ex^{19} + \text{----}$

Daher nach (I. B. 83. §. Zus.)

$2A = 4.4B.$
$2B = 4.8C + 4B.$
$2C = 4.12D + 8C.$ und
$2D = 4.16E + 12D.$
$2E = 4.20F + 16E.$
u. s. f.

$B = \frac{1}{8}A.$
$C = \frac{-1}{2.8.8}A.$
$D = \frac{1}{2.8.8.8}A.$
$E = \frac{-5}{2.2.8.8.8.16}A.$
$F = \frac{+5.7}{2.2.2\,8.8.8.16.20}A.$
u. s. f.

Die

Die gegebene Function wird aber $\sqrt{(4+x^4)}=\sqrt{4}=2$ für $x=0$: also ist $A=2$ nach (3. Zuf.), und dadurch sind die Coefficienten B, C, D, E, F ---- vollkommen bestimmt, mithin ist die verlangte Reihe:

$$\sqrt{(4+x^4)}=2+\tfrac{1}{4}x^4\frac{-1}{8.8}x^8+\frac{1}{8.8.8}x^{12}\frac{-5}{2.8.8.8.16.}x^{16}$$
$$\frac{+5.7}{2.2.8.8.8.16.20}x^{20}\text{ -------}$$

Man soll $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^5)}}$ in eine Reihe verwandeln.

Sey $\frac{1}{u^n}=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^5)}}=\frac{1}{(1+x^5)^{\frac{1}{3}}}$, mithin

$$u=1+x^5,\ n=\tfrac{1}{3};$$

Und $\frac{1}{u^n}=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^5)}}=A+Bx^5+Cx^{5+p}+Dx^{5+2p}$
$+Ex^{5+3p}+Fx^{5+4p}+\text{----}=R.$

So ist $du=5x^4dx$; $-ndu=\frac{-5}{3}x^4dx$, daher

$$-\frac{ndu}{dx}\cdot R=-\frac{5}{3}Ax^4-\frac{5}{3}Bx^9-\frac{5}{3}Cx^{9+p}-\frac{5}{3}Dx^{9+2p}$$
$$-\frac{5}{3}Ex^{9+3p}-\frac{5}{3}Fx^{9+4p}-\text{----}$$

$$\frac{dR}{dx}=5Bx^4+(5+p)Cx^{4+p}+(5+2p)Dx^{4+2p}$$
$$+(5+3p)Ex^{4+3p}+(5+4p)Fx^{4+4p}+\text{----}$$

$$\frac{udR}{dx}=5Bx^4+(5+p)Cx^{4+p}+(5+2p)Dx^{4+2p}$$
$$+(5+3p)Ex^{4+3p}+(5+4p)Fx^{4+4p}+\text{----}$$

+

$$+5Bx^{9}+(5+p)Cx^{9+p}+(5+2p)Dx^{9+2p}$$
$$+(5+3p)Ex^{9+3p}+(5+4p)Fx^{9+4p}+\text{----}$$

Und nun müssen wir $-\frac{ndu}{dx}\cdot R=\frac{udR}{dx}$ setzen (2. Zus.). Da aber die Exponenten bey der Reihe R noch unbestimmt sind; so erwäge man, daß schon bey $-\frac{ndu}{dx}\cdot R$ zwo nächste Potenzen x^4 und x^9 sind; die Differenz ihrer Exponenten ist 5: man setze also $p=5$, folglich die verlangte Reihe $R=A+Bx^5+Cx^{10}+Dx^{15}+Ex^{20}+Fx^{25}+\text{----}$, und, wegen $-\frac{ndu}{dx}\cdot R=\frac{udR}{dx}$,

$$-\frac{5}{3}Ax^4-\frac{5}{3}Bx^9-\frac{5}{3}Cx^{14}-\frac{5}{3}Dx^{19}-\frac{5}{3}Ex^{24}-\frac{5}{3}Fx^{29}\text{---}$$
$$=5Bx^4+10Cx^9+15Dx^{14}+20Ex^{19}+25Fx^{24}+30Gx^{29}+\text{---}$$
$$+5Bx^9+10Cx^{14}+15Dx^{19}+20Ex^{24}+25Fx^{29}\text{-----}$$

Demnach ist nach (I. B. 83. §. Zus.)

$$5B=-\frac{5}{3}A. \qquad B=-\frac{1}{3}A.$$
$$10C+5B=-\frac{5}{3}B. \qquad C=\frac{2}{3\cdot 3}A.$$
$$15D+10C=-\frac{5}{3}C. \quad \text{und} \quad D=\frac{-2\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}A.$$
$$20E+15D=-\frac{5}{3}D. \qquad E=\frac{5\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}A.$$
$$25F+20E=-\frac{5}{3}E. \qquad F=\frac{-7\cdot 13}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}A.$$
$$30G+25F=-\frac{5}{3}F. \qquad G=\frac{7\cdot 8\cdot 13}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}A.$$
u. s. f. u. s. f.

Aus

Aus $\sqrt[3]{(1+x^5)} = 1$ für $x = 0$ folgt $A = 1$; nach (3. Zuf.): alſo iſt die verlangte Reihe

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^5)}} = 1 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{3\cdot 3}x^{10} - \frac{2\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}x^{15} + \frac{5\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}x^{20}$$
$$- \frac{7\cdot 13}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}x^{25} + \frac{7\cdot 8\cdot 13}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}x^{30} - \text{----}$$

4. Zuſatz.

Wird demnach ein Verſchwindungs-Quotient $dy = \frac{z^m}{u^n}dx$ vorgelegt, wofür man das Integral y auf keine Art beſtimmen kann; ſo verwandle man $\frac{z^m}{u^n}$ in eine gleichgültige Reihe R, und ſuche hierauf das Integral $\int Rdx$ nach (26. §. 3. Zuſ.): es wird zwar dieſes Integral nie dem wahren Integral $y = \int \frac{z^m}{u^n}dx$ gleich ſeyn, doch wird man ſich dadurch demſelben nach Belieben nähern können, indem die weniger oder mehr genaue Berechnung der Reihe R in unſerer Gewalt iſt.

Beyſpiele.

Man ſoll y aus $dy = x^3dx\sqrt{(1-2x+x^3)}$ beſtimmen.

Man verwandle $\sqrt{(1-2x+x^3)}$ in eine Reihe R nach (1. Zuf.); hierauf multiplicire man dieſelbe mit x^3dx, und ſuche $\int x^3Rdx$ nach (26. §. 3. Zuf.).

Man ſoll y aus $dy = \frac{(1-x^2)dx}{\sqrt{(2+x^3)}}$ beſtimmen.

Es iſt $y = \int \frac{dx}{\sqrt{(2+x^3)}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(2+x^3)}}$: der zweyte Theil iſt $= -\frac{2}{3}\sqrt{(2+x^3)}$ nach (26. §. 1. 2. Zuf.), und den

erſten

ersten Theil findet man dadurch, wenn man $\frac{1}{\sqrt{(2+x^3)}}$ in eine Reihe R nach (2. Zus.) verwandelt, hernach $\int R dx$ nach (26. §. 3. Zus.) suchet.

Man soll y aus $dy = \frac{(1+x^2)dx}{\sqrt[4]{(2+x^5)}}$ bestimmen.

Verwandle man $\frac{1}{\sqrt[4]{(2+x^5)}}$ in eine Reihe R nach (2. Zus.), multiplicire sie mit $1+x^2$, und suche hernach $\int(1+x^2)Rdx$ nach (26. §. 3. Zus.).

Der

Der V. Abschnitt.

Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die gebräuchlichsten krummen Linien.

Die allgemeinsten Eigenschaften krummer Linien.

87. §. Erklärung.

Seyen eine krumme Linie und zwo gerade Linien VX, DE (6. Fig.) in einer Ebene verzeichnet. Die geraden Linien schneiden einander in A, und von da an nehme man auf der geraden Linie VX was immer für Stücke Ap, Aq′, Ar′, AS, Au, und ziehe von ihren Endpuncten zu DE parallele Linien pP, q′Q, r′R, Ss, uU bis zur krummen Linie. Fig. 6.

1) Jedes aus dem Puncte A abgeschnittenes Stück auf der geraden Linie VX, wie Au, heißt eine Abscisse; der Punct A ist der Anfangspunct der Abscissen; und die gerade Linie uU, welche vom Endpuncte einer Abscisse Au zu DE parallel bis zur krummen Linie gezogen wird, heißt eine Ordinate.

2) Eine Abscisse Au mit der ihr zugehörigen Ordinate uU werden Coordinaten genannt, und der Winkel AuU, welchen die Ordinate uU mit der zugehörigen Abscisse Au macht, heißt der Coordinaten-Winkel.

3) Die

3) Die Coordinaten Au, uU sind rechtwinklicht oder schiefwinklicht, nachdem der Coordinaten-Winkel AuU ein rechter oder schiefer Winkel ist.

4) Die geraden Linien DE, VX, welche am Anfangspuncte A der Abscissen einander schneiden, und auf derer einer die Abscissen genommen werden, indem die Ordinaten zu der andern parallel sind (n. 1.), heißen die Coordinatenaxen; VX, worauf die Abscissen liegen, ist die Abscissenaxe, oder die Abscissenlinie, und DE die Ordinatenaxe.

1. Zusatz.

Der Winkel DAX, unter welchem die Coordinatenaxen einander schneiden, ist allemal dem Coordinaten-Winkel gleich: bey rechtwinklichten Coordinaten stehen die Ordinatenaxe und alle Ordinaten auf der Abscissenaxe senkrecht.

2. Zusatz.

Wenn PM zu VX parallel ist; so muß PM=Ap seyn, so wie auch AM=pP. Die Coordinatenaxen DE, VX können demnach dergestalt verwechselt werden, daß die Ordinatenaxe DE zur Abscissenaxe, und die Abscissenaxe VX zur Ordinatenaxe werde, wozu nichts weiter erfordert wird, als daß man die Ordinaten und Abscissen für VX zu Abscissen und Ordinaten für DE macht.

3. Zusatz.

Sind die Coordinaten rechtwinklicht; so sind MP=Ap und Pp die Entfernungen des Puncts P von beyden Coordinatenaxen DE, VX: durch jedes Paar Coordinaten ist also die

die Lage eines Punets P der krummen Linie in Ansehung der Coordinatenaxen vollkommen bestimmt.

4. Zusatz.

Wenn man eine Linie $\alpha\beta$ von bestimmter Länge, etwa einen Schuh oder Zoll für die Einheit nimmt, und dieselbe in sehr kleine Theilchen eintheilt, etwa die ganze Linie $\alpha\beta$ in 10000 gleiche Theilchen; so wird man damit alle Abscissen und Ordinaten vergleichen, und durch eben so viele Zahlen ausdrücken können. Wenn man z. B. findet, daß die Abscisse Au der fünfte Theil von $\alpha\beta$ ist; so wird Au 2000 von den 10000 Theilchen enthalten, in welche $\alpha\beta$ eingetheilt worden ist, und man wird Au = 2000 setzen können, sobald man weiß, daß die Einheit einer solchen Zahl so viel als ein Zehntausendtel von $\alpha\beta$ giebt.

5. Zusatz.

Auf diese Art lassen sich alle Abscissen und Ordinaten bey einer krummen Linie durch eben so viele Zahlen ausdrücken. Da aber dieselben entgegengesetzte Richtungen haben können, indem die Abscissen entweder von A ür zur Rechten gegen X, oder zur linken gegen V zu, und die Ordinaten entweder oberhalb der Abscissenaxe VX, wie uU, oder unterhalb derselben, wie uU' genommen werden können; so kann man ihnen in Rücksicht auf ihre entgegengesetzte Richtungen die Benennungen bejahr und verneint dergestalt beylegen, daß, wenn diejenigen Abscissen, welche auf AX zur Rechten ihres Anfangspuncts liegen, und diejenigen Ordinaten, welche oberhalb der Abscissenaxe VX liegen,

bejaht genannt werden, die ihnen entgegengesetzten, zur Linken auf AV liegenden Abscissen, und unterhalb der Abscissenaxe VX liegenden Ordinaten verneint heißen sollen. Uebrigens sind diese Benennungen gleichgültig, so, daß man auch die ersten Abscissen und Ordinaten verneint, und die andern bejaht nennen kann.

6. Zusatz.

Bejahte und verneinte Abscissen und Ordinaten werden demnach als Mengen von einerley Art Einheiten betrachtet (4. Zus.), die sich aber auf gerad entgegengesetzte Richtungen beziehen (5. Zus.), und so stimmen diese Begriffe mit den in (I. B. 2. §.) gegebenen Begriffen von bejahten und verneinten Zahlen vollkommen überein. Wenn man z. B. sagt, eine Abscisse sey $= +300$, und eine andere $= -209$, so will man damit zu verstehen geben, daß eine Abscisse zur Rechten des Anfangspuncts A auf AX liegen, und von A an gegen X zu 300 Theilchen einer bestimmten Linie $\alpha\beta$ betragen soll (4. Zus.); eine andere Abscisse aber zur Linken des Anfangspuncts A auf AV liegen, und von A an gegen V zu 20 solche Theilchen bekommen soll. Sagt man aber eine Ordinate sey $= +40$, und eine andere $= -60$; so will man damit nichts anders sagen, als daß eine Ordinate, oberhalb der Abscissenaxe VX, etwa uU liegen und von u an bis U 40 Theilchen der Einheit $\alpha\beta$ haben muß (4. Zus.); eine andere Ordinate aber unterhalb der Abscissenaxe liegen, etwa uU', und von u an bis U' 60 Theilchen der Einheit $\alpha\beta$ bekommen soll.

88. §. Erklärung.

Der Durchmesser einer krummen Linie ist eine gerade Linie AB (1. Fig.), welche alle einander parallele Sehnen, RS, Pp, Dd, m rr, Q, C, n halbirt: geschieht dieses unter rechten Winkeln m'B, DCB, PQB, RnB; so heißt der Durchmesser AB die Axe, und der Punct A, wo sie die krumme Linie schneidet, der Scheitel oder der Scheitelpunct derselben krummen Linie. Sind zween Durchmesser AB, Dd so beschaffen, daß der eine Dd diejenigen Sehnen Rs, Mμ halbirt, welche zu dem andern AB parallel sind; so werden AB, Dd zusammengehörige Durchmesser genannt, und jeder von ihnen heißt dem andern zugeordnet. Und wenn es einen Punct C giebt, an welchem alle Sehnen der krummen Linie, die durch ihn gezogen werden mögen, einander halbiren; so heißt C der Mittelpunct derselben krummen Linie. Fig. 1.

89. §. Erklärung.

Wenn eine krumme Linie BCaFdG (7. Fig.) aus Theilen ChB, FdG besteht, welche die Beschaffenheit haben, daß sie gegen V und X ohne Ende fortgehen, ohne in diesen Gegenden irgendwo die Abscissenaxe VX zu treffen; so heißen ChB, FdG ohne Ende fortlaufende Aeste der krummen Linie: in dem besonderen Fall, wenn ein ohne Ende fortlaufender Ast FG sich der Abscissenaxe VX immer mehr und mehr nähert, je mehr derselbe gegen X zu verlängert wird, heißt FG ein asymptotischer Ast, und FX wird die Asymptote genannt. Fig. 7.

90. §. Erklärung.

Fig. 2. Eine krumme Linie sey OS (2. Fig.), und die Abscissenare PQ. Sey ferner MD die rechtwinklichte Ordinate, welche einem Puncte M der krummen Linie zugehört (87. §.); und die gerade Linie Bp, welche in B die Abscissenare treffen mag, berühre die krumme Linie in M, nämlich begegne ihr in M dergestalt, daß alle übrigen Puncte von Bp ausserhalb der krummen Linie OS liegen sollen: so heißt MB die Tangente, und der Theil BD der Abscissenare zwischen der Tangente und der Ordinate MD, heißt die Subtangente. Steht ferner eine gerade Linie MN im Berührungspuncte M auf der Tangente Bp senkrecht, und trifft dieselbe die Abscissenare in N; so heißt MN die Normallinie, und der Theil ND der Abscissenare zwischen der Normallinie und der Ordinate MD wird die Subnormallinie genannt.

91. §. Erklärung.

Eine rationale Gleichung (I. B. 91. §.) zwischen zwoen veränderlichen Grössen y, x, wovon keine im Renner irgend eines Gliedes sich befindet, auch sonst nicht mit einem verneinten Exponenten versehen ist (I. B. 30. §. 2. Zus.), heißt von der ersten, zweyten, dritten und überhaupt von der nten Ordnung, wenn die höchste Summe der Exponenten, womit die in einander multiplicirten Potenzen von x und y in irgend einem Gliede versehen seyn mögen, entweder $=1$ oder $=2$, oder $=3$, oder überhaupt $=n$ ist. So wäre z. B. $\alpha+\beta x+\gamma y=0$ eine allgemeine Gleichung von der ersten Ordnung; $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta xy+\varepsilon y+\zeta y^2=0$

eine

eine von der zweyten Ordnung; $\alpha+\beta x+\gamma x^3y^3+\delta y^6=0$ wäre eine Gleichung von der sechsten Ordnung, und $\alpha+\beta x+\gamma x^3y^2+\delta y^4=0$ wäre eine von der fünften Ordnung.

92. §. Erklärung.

Eine Gleichung für eine krumme Linie heißt eine solche Gleichung zwischen x, y und gewissen beständigen Linien, woraus jede mit y bezeichnete Ordinate derselben Linie sich dadurch bestimmen läßt, daß man bey ihr nur den Werth derjenigen mit x bezeichneten Abscisse setzen darf, welcher jene Ordinate zugehören soll (87. §.). Bekanntlich kann jede solche Gleichung rational gemacht, und unter die im (91. §.) betrachtete Form gebracht werden (I. B. 92. §. Zus.): ist alsdann die gegebene Gleichung von der ersten, zweyten, dritten, vierten Ordnung u. s. f. (91. §.); so sagt man, es sey auch die Linie, zu welcher sie gehört, von der ersten, zweyten, dritten, vierten Ordnung u. s. f.

Z. B. Wenn man die gerade durch den Mittelpunct C einer Kreislinie (1. Fig.) gezogene Linie VX für die Abscissenare, und den Punct A, wo sie die Kreislinie schneidet, für den Anfangspunct der Abscissen nimmt; so kann AQ = x jede Abscisse und QP = y die ihr zugehörige rechtwinklichte Ordinate heißen (87. §.). Nun aber ist allemal $QP^2 = AQ.QB$; wenn man also den Halbmesser AC = r setzt; so wird seyn $y^2 = x(2r-x)$ oder $y^2 = 2rx - x^2$ eine Gleichung für die Kreislinie zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten x = AQ, y = QP. Fig. 1.

Wollte man aber den Anfangspunct der Abscissen ins Mittelpunct C festsetzen; so könnte eine Abscisse $Cn' = x$, und die ihr zugehörige Ordinate $n's = y$ genommen werden. Da nun $n's^2 = An'.n'B$ ist; so ist nun $y^2 = (r+x)(r-x)$, mithin $y^2 = r^2 - x^2$ eine andere Gleichung für die Kreislinie zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten $x = Cn'$, $y = n's$.

Beyde Gleichungen sind von der zweyten Ordnung (91. §.), mithin zeigt jede von ihnen, daß die Kreislinie eine krumme Linie von der zweyten Ordnung ist.

1. Zusatz.

Es soll demnach keinen Punct bey einer krummen Linie geben, dessen Lage in Ansehung ihrer Coordinatenaxen sich aus der für sie gegebenen Gleichung nicht bestimmen ließe (87. §. 2. Zus.). Es hängt aber der Gang der ganzen krummen Linie von der gegenseitigen Lage ihrer Puncte ab, und diese ist allemal durch die Lage derselben Puncte in Ansehung der Coordinatenaxen vollkommen bestimmt: also ist eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten einer krummen Linie zur vollkommensten Beurtheilung ihrer Beschaffenheit jedesmal hinreichend.

2. Zusatz.

Wirkliche Verzeichnung einer krummen Linie, wofür die Gleichung zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten gegeben seyn möchte, könnte nach (87. §. 4. 5. Zus.) unternommen werden. Man müßte nämlich eine bestimmte

Linie

linie $\alpha\beta$ (7. Fig.) in eine gewisse Anzahl von gleichen Theilchen eintheilen, etwa in 1000 gleiche Theilchen; sodann könnte man auf einer beliebigen Abscissenaxe VX irgendwo in A den Anfangspunct der Abscissen festsetzen, und von A an sowohl gegen X als gegen V zu die allmählich wachsenden Abscissen A1, A2, A3, A4, A5 u. s. f. aufgetragen, so, daß die erste A1 nur ein von den 1000 Theilchen der linie $\alpha\beta$, die zweyte A2 zwey, die dritte A3 drey u. s. f. Theilchen betrage. Nun könnte man jede von diesen Abscissen statt x bey der gegebenen Gleichung nehmen, um dadurch die ihr zugehörige Ordinate y in Tausendtheilchen der linie $\alpha\beta$ zu erhalten: wären aber die Ordinaten bekannt, welche mit den auf VA liegenden verneinten Abscissen $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ u. s. f. und mit den auf XA liegenden bejahten $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ u. s. f. zusammenhängen; so würde man dieselben an Endpuncten der Abscissen, welchen sie zugehören, entweder oberhalb der Abscissenaxe VX, oder unterhalb derselben errichten, und durch ihre äußersten Puncte die krumme linie BbgCfeabFcdG ziehen können (87. §. 5. 6. Zus.), für welche die Gleichung gegeben wurde. Fig. 7.

3. Zusatz.

Wenn für irgend eine Abscisse $x = \pm a$ aus der gegebenen Gleichung $y = 0$ erhalten wird; so zeigt dieses an, daß die Abscissenaxe am Endpuncte einer solchen Abscisse von der krummen linie, wofür die Gleichung gelten soll, getroffen wird; z. B. für $x = -AF$ oder $x = AC$ in der 6ten

Figur. Giebt aber die Gleichung einen unmöglichen Werth für y; so wird dieses ein Beweis seyn, daß es in der Entfernung $x = \pm a$ von der Ordinatenaxe gar keinen Punct der krummen Linie giebt.

Z. B. Für eine Kreislinie (1. Fig.) ist die Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$, mithin $y = \pm\sqrt{(2rx - x^2)}$, wenn VX, durch den Mittelpunct C gezogen, die Abscissenlinie, und A der Anfangspunct der Abscissen ist. Man mag nun eine wie immer kleine oder grosse verneinte Abscisse Ab statt x nehmen; so wird für $x = -Ab$ allemal $y = \pm\sqrt{(-2r.Ab - Ab^2)}$ etwas unmögliches seyn, zum Beweis, daß kein Punct der Kreislinie zur Linken der Ordinatenaxe LN anzutreffen ist, welcher sonst durch eine solche Ordinate allemal bestimmt werden könnte. Nimmt man $x = Aa$ eine bejahte Abscisse, die doch grösser ist als der Durchmesser $= 2r$; so wird $y = \pm\sqrt{(2r.Aa - Aa^2)}$, wegen $Aa^2 > 2r.Aa$, abermal ein unmöglicher Werth seyn, zum Beweis, daß es auch zur Rechten der Ordinatenaxe LN gar keinen Punct der Kreislinie giebt, welcher in einer solchen Entfernung von LN läge, die grösser ist, als der Durchmesser 2r.

Setzt man die Abscisse $x = o$ oder $x = 2r$; so wird seyn $y = \pm\sqrt{(2r.o - o^2)} = o$ im ersten Fall, und $y = \pm\sqrt{(4r^2 - 4r^2)} = o$ im zweyten Fall, zum Beweis, daß die Abscissenaxe VX von der Kreislinie in zweenen Puncten getroffen wird, einmal im Anfangspuncte A der Abscissen, wo $x = o$ ist, hernach in der Entfernung des Durchmessers 2r in B.

4. Zu-

4. Zusatz.

Doch kann man nicht überhaupt behaupten, daß die Abscissenaxe VX (6. Fig.) am Endpuncte G derjenigen Abscisse AG, für welche die Gleichung $y = o$ giebt, von der krummen Linie geschnitten wird: denn wenn dieses geschehen soll; so muß die krumme Linie einen wie immer kleinen Theil RG oberhalb, und einen andern gG unterhalb der Abscissenaxe haben, da es doch möglich ist, daß auch dieser andere Theil auf eben der Seite liege, etwa in GR', auf welcher der vorige liegt, in welchem Fall der Punct G, wo $y = o$ seyn soll, ein Berührungspunct, aber kein Durchschnittspunct seyn würde.

5. Zusatz.

Es kann geschehen, daß eine höhere Gleichung für irgend eine Abscisse x mehrere Werthe für y gebe, die durch eben so viele mögliche Zahlen ausgedrückt seyn mögen, und dieses wird anzeigen, daß am Endpuncte derselben Abscisse x eben so viele Ordinaten stehen müssen, daß daher die an demselben Puncte senkrecht auf der Abscissenaxe errichtete gerade Linie in eben so vielen Puncten von der krummen Linie geschnitten wird. Wenn z. B. für eine verneinte Abscisse $x = -Au$ die Gleichung $y = +A$ und $y = -B$ gäbe; so müßte am Endpuncte der Abscisse $x = -Au$ eine bejahte Ordinate $= A$, und eine verneinte $= B$ stehen, etwa uU und uU' in der 6ten Figur. Für eben diese krumme Linie müßte die ihr zugehörige Gleichung für die Abscisse $x = Ap$ zween verneinte Werthe und einen bejahten mög-

lichen Werth für y geben, wodurch die drey Ordinaten pp′, pp″, pP bestimmt werden: für die Abscisse x = Aq′ müßte sie zween bejahte mögliche Werthe, und zween verneinte mögliche und gleiche Werthe für y geben; jene würden die bejahten Ordinaten q′q, q′Q, und diese die gleichen verneinten Ordinaten q′q″, q′q‴, bestimmen, indem der Punct q″ zweymal von der krummen Linie getroffen wird: für die Abscisse Ar′ = x würde die Gleichung vier mögliche Werthe, zween bejahte, und zween verneinte für y geben, wodurch die vier Ordinaten r′R, r′r, r′r″, r′r‴ bestimmt werden müßten: und für die Abscisse x = AS müßte die Gleichung nur zween mögliche, und zwar verneinte gleiche Werthe für y geben, zum Beweis, daß es am Endpuncte S derselben Abscisse nur eine verneinte Ordinate Ss giebt, die aber von der krummen Linie zweymal getroffen wird.

Ein Beyspiel hievon ist die Kreislinie (1. Fig.), für welche die oben gefundene Gleichung $y = \pm\sqrt{(2rx - x^2)}$ gilt. Wir haben durch den Mittelpunct C die Abscissenaxe VX gezogen, und in A den Anfangspunct der Abscissen festgesetzt. Nimmt man nun was immer für eine Abscisse Ar statt x bey ihr, wenn sie nur kleiner ist, als der Durchmesser 2r; so wird diese Gleichung zween mögliche gleiche Werthe für y geben, wovon doch einer bejaht, und der andere verneint seyn wird, zum Beweise, daß am Endpuncte jeder solchen Abscisse zwo gleiche Ordinaten bey einer Kreislinie anzutreffen sind, und eine davon oberhalb, die andere aber unterhalb der Abscissenaxe VX liegt.

6. Zu-

6. Zusatz.

Bey der Voraussetzung $y = o$ kann die Gleichung mehrere mögliche Werthe für x geben: z. B. die Gleichung $x^3 - 4,9ax + 30axy - 50ay^3 + 120a = o$ für $y = o$ übergeht in $x^3 - 4,9ax + 120a = o$, und hieraus erhält man drey mögliche Werthe für x, nämlich $x = -o,08a$; $x = o,05a$; $x = o,03a$. Jeder mögliche Werth von x giebt eine Abscisse, an deren Endpuncte die Abscissenaxe von der krummen Linie getroffen wird (3. Zus.), welches daher in so vielen Puncten geschieht, als mögliche Werthe für x die Gleichung gegeben hat, ausgenommen, wenn einige unter ihnen einander gleich sind, und eben dieselben entweder alle bejaht, oder alle verneint, in welchem Fall die Abscissenaxe in einem und eben demselben Puncte mehrmal von der krummen Linie getroffen wird.

93. §. Aufgabe.

Aus der gegebenen Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten einer krummen Linie eine andere Gleichung zwischen ihren schiefwinklichten Coordinaten, oder umgekehrt jene aus dieser zu bestimmen.

Auflösung. 1) Sey M ein unbestimmter Punct in der krummen Linie OS (2. Fig.), die Abscissenaxe sey PQ, und der Anfangspunct der Abscissen in C; ferner sey MD auf PQ senkrecht, und MN gegen PQ unter einem gegebenen Winkel $MNP = \varphi$ geneigt; so sind $CD = x$, $MD = y$ rechtwinklichte, und $CN = u$, $MN = z$ schiefwinklichte Coordi-

Fig. 2.

Coordinaten (87. §. n. 3.). Es ist aber $CN = CD + DN$, und $DN = MD.\mathrm{Cot}\,\varphi = z\,\mathrm{Cos}\,\varphi$; $MN = MD.\mathrm{Cosec}\,\varphi$; $MD = MN.\mathrm{Sin}\,\varphi$; also hat man

I) $y = z\,\mathrm{Sin}\,\varphi$. II) $x = u - z\,\mathrm{Cos}\,\varphi$.

III) $z = y\,\mathrm{Cosec}\,\varphi$. IV) $u = x + y\,\mathrm{Cot}\,\varphi$.

2) Ist demnach die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x, y einer krummen Linie gegeben worden; so wird man sie in eine andere zwischen schiefwinklichten Coordinaten u, z verwandeln, wenn man die Werthe I) II) statt y, x bey ihr nimmt: wenn aber die vorgelegte Gleichung schiefwinklichte Coordinaten u, z enthält; so setze man bey ihr die Werthe III) IV) statt z, u, um sie in die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten x, y zu verwandeln.

1. Zusatz.

Es ist einleuchtend, daß die neue Gleichung zwischen schiefwinklichten Coordinaten eben das geben muß, was die vorgelegte Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten geben würde, nämlich alle Puncte M der krummen Linie (92. §.), in eben denselben Entfernungen von den Coordinatenaxen (87. §. 3. Zus.). Sodann ist klar, daß durch diese Verwandlung die Ordnung, zu welcher die vorgelegte Gleichung gehören mag, gar nicht geändert wird, sondern die neue Gleichung von eben der Ordnung seyn muß, von welcher die vorgelegte war. Denn wenn z. B. die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten von einer Ordnung n ist; so sind bey ihr drey Glieder möglich, wovon das eine y^n allein, das andere x^n allein, und das dritte

y^p

$y^p x^q$ enthalten mag, daß $p+q=n$ ist (91. §.), und höhere Exponenten, als n, oder höhere Summen als $p+q=n$ können bey ihr nicht vorkommen: wenn man also diese Gleichung in eine andere zwischen schiefwinklichten Coordinaten u, z verwandelt; so wird die neue Gleichung $z^n \operatorname{Sin}\varphi^n$ statt y^n, $(u-z\operatorname{Cos}\varphi)^n$ statt x^n, und das Product $z^p \operatorname{Sin}\varphi^p (u-z\operatorname{Cos}\varphi)^q$ statt $y^p x^q$ enthalten, mithin ebenfalls zur Ordnung $n=p+q$ gehören (91. §.).

2. Zusatz.

Statt der krummen Linie OS kann die gerade Linie Bp da stehen, deren Puncte M die rechtwinklichten Coordinaten $CD=x$, $MD=y$, nebst den schiefwinklichten $CN=u$, $MN=z$ zugehören mögen; für die einer geraden Linie Bp zugehörige Gleichung gilt also das Vorhergehende eben so gut, wie für die Gleichung zu einer krummen Linie.

3. Zusatz.

Was also die Beurtheilung der Lage einer krummen Linie, und ihrer Puncte in Ansehung gegebener Coordinatenaxen anbelangt (92. §. 1. Zus.), so ist es einerley, welche Gleichung man dazu brauchen will, die zwischen rechtwinklichten, oder die andere zwischen schiefwinklichten Coordinaten, wenn nur diese Coordinaten dergestalt von einander abhängen, wie es bey der Auflösung der vorigen Aufgabe vorausgesetzt wurde. Aus dieser Ursache soll auch in der Folge fast überall von rechtwinklichten Coordinaten die Rede seyn, welche schlechtweg Ordinaten heißen, und die schiefwinklichten, wo sie in Betrachtung kommen mögen, ausdrücklich genannt werden sollen.

94. §.

94. §. Aufgabe.

Für die Abscissenaxe VX ist die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten AP = x, MP = y einer krummen Linie RS (8. Fig.) bekannt; eine andere Abscissenaxe Uu soll gegen die vorige unter einem Winkel XHu = α geneigt seyn, und darauf ist der Anfangspunct N der Abscissen dergestalt bestimmt, daß seine Entfernungen von der vorigen Abscissenaxe NL = b, und von der vorigen Ordinatenaxe DE, Nn = LA = a seyn mögen. Man soll aus der zwischen x = AP und y = MP gegebenen Gleichung eine gleichgültige für die neue Abscissenaxe Uu zwischen den ebenfalls rechtwinklichten Coordinaten NQ = u, MQ = z bestimmen. Fig. 8.

Auflösung. Sey Pq auf MQ und Pr auf Uu senkrecht; so sind MqP, HPr, HLN an q, r, L rechtwinklichte Dreyecke. Es ist ferner MPF an P rechtwinklicht: wegen des Winkels MFP = HFQ ist daher FMP = PHQ = α.

Demnach ist $Pq = MP.\text{Sin}\,qMP$; $Mq = MP.\text{Cos}\,qMP$,

mithin 1) $Pq = y\,\text{Sin}\,\alpha$. 2) $Mq = y\,\text{Cos}\,\alpha$.

Sodann ist $HL = LN.\frac{\text{Cos}\,LHN}{\text{Sin}\,LHN}$ u. $HN = LN.\frac{1}{\text{Sin}\,LHN}$;

also 3) $HL = \frac{b\,\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\alpha}$. 4) $HN = \frac{b}{\text{Sin}\,\alpha}$.

Ferner ist $Pr = HP.\text{Sin}\,PHr = (HL + LA + AP)\,\text{Sin}\,\alpha$;

für LA = a, AP = x, und HL in 3) ist daher

$Pr = b\,\text{Cos}\,\alpha + a\,\text{Sin}\,\alpha + x\,\text{Sin}\,\alpha$.

Und

Und wegen $Hr = HP \cdot \mathrm{Cos} PHr$ findet man auf gleiche Art

6) $Hr = \frac{b \mathrm{Cos}\alpha^2}{\mathrm{Sin}\alpha} + a \mathrm{Cos}\alpha + x \mathrm{Cos}\alpha.$

Nun ſoll ſeyn $u = NQ = Hr - Pq - HN$

$z = MQ = Mq + Pr;$

alſo iſt wegen 1) 2) 4) 5) 6)

7) $u = a \mathrm{Cos}\alpha + x \mathrm{Cos}\alpha - y \mathrm{Sin}\alpha - b \mathrm{Sin}\alpha.$

8) $z = y \mathrm{Cos}\alpha + b \mathrm{Cos}\alpha + a \mathrm{Sin}\alpha + x \mathrm{Sin}\alpha.$

Multiplicirt man aber 7) mit $\mathrm{Sin}\alpha$ und 8) mit $\mathrm{Cos}\alpha$; ſo erhält man folgende Gleichungen 9) 10): multiplicirt man ferner 8) mit $\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha}$; ſo findet man folgende Gleichung 11); und nun erhält man 12) aus 9) 10), und 13) aus 7) 11).

9) $u \mathrm{Sin}\alpha = a \mathrm{Cos}\alpha \mathrm{Sin}\alpha + x \mathrm{Cos}\alpha \mathrm{Sin}\alpha - y \mathrm{Sin}\alpha^2 - b \mathrm{Sin}\alpha^2,$

10) $z \mathrm{Cos}\alpha = y \mathrm{Cos}\alpha^2 + b \mathrm{Cos}\alpha^2 + a \mathrm{Sin}\alpha \mathrm{Cos}\alpha + x \mathrm{Sin}\alpha \mathrm{Cos}\alpha.$

11) $\frac{z \mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha} = y \mathrm{Sin}\alpha + b \mathrm{Sin}\alpha + \frac{a \mathrm{Sin}\alpha^2}{\mathrm{Cos}\alpha} + \frac{x \mathrm{Sin}\alpha^2}{\mathrm{Cos}\alpha}.$

12) $z \mathrm{Cos}\alpha - u \mathrm{Sin}\alpha = y(\mathrm{Cos}\alpha^2 + \mathrm{Sin}\alpha^2) + b(\mathrm{Cos}\alpha^2 + \mathrm{Sin}\alpha^2)$

$= y + b.$

13) $u + \frac{z \mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha} = \frac{a(\mathrm{Cos}\alpha^2 + \mathrm{Sin}\alpha^2)}{\mathrm{Cos}\alpha} + \frac{x(\mathrm{Cos}\alpha^2 + \mathrm{Sin}\alpha^2)}{\mathrm{Cos}\alpha}$

$= \frac{a + x}{\mathrm{Cos}\alpha}.$

Alſo iſt wegen 12) 13)

14) $y = z \mathrm{Cos}\alpha - u \mathrm{Sin}\alpha - b.$

15) $x = z \mathrm{Sin}\alpha + u \mathrm{Cos}\alpha - a.$

Setzt man diese Werthe statt x und y in der gegebenen Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, MP für die Abscissenaxe VX; so wird man dadurch eine gleichgültige Gleichung für die neue Abscissenaxe Uu zwischen den Coordinaten NQ = u, MQ = z erhalten, welche nämlich alle Puncte M der krummen Linie RS (92 §.) in eben den Entfernungen von den Coordinatenaxen VX, DE geben wird, die sie vermöge der Gleichung zwischen y, x haben müssen.

1. Zusatz.

Es ist die neue Abscissenaxe Uu unter der vorigen VX dargestellt worden; doch mag dieselbe was immer für eine andere Lage bekommen, so wird die Auflösung der vorigen Aufgabe zur Bestimmung der gleichgültigen Gleichung zwischen den Coordinaten u, z für die neue Abscissenaxe aus der gegebenen Gleichung zwischen den Coordinaten x, y für eine gegebene Abscissenaxe VX allemal hinreichen, wenn nur bey den Werthen 14) 15), welche statt y, x genommen werden müssen, dasjenige verneint genommen wird, was bey der veränderten Lage der neuen Abscissenaxe Uu eine Lage bekommen mag, die der bey der Auflösung der Aufgabe vorausgesetzten entgegengesetzt ist.

2. Zusatz.

Soll die neue Abscissenaxe Uu zur vorigen VX parallel seyn (9. Fig.); so muß man den Neigungswinkel = o setzen, mithin Sin α = o, Col α = 1, und dafür hat man

Fig. 9.

x = AP, y = MP, u = NQ, z = MQ, LN = b, AL = a = Nq

y = z — b; x = u — a.

Wenn

Wenn aber die neue parallele Abſciſſenaxe auf der entgegengeſetzten Seite in U′u′ liegen ſoll; ſo muß δ verneint genommen werden, und dann iſt

$$y = z + b,\quad x = u - a$$ für

$$x = AP, y = MP, u = N'Q', z = MQ', b = LN', AL = a = pN'.$$

3. Zuſatz.

Wollte man $a = AL = AH$ ſetzen (8. Fig.); ſo wäre Fig. 8.
$b = LN = o$, und wenn man auch $AH = a = o$ ſetzte; ſo würde die neue Abſciſſenaxe Uu durch den Anfangspunct A der Abſciſſen $x = AP$ gehen, und eben der Punct A wäre zugleich der Anfangspunct der auf der neuen Abſciſſenaxe Uu (Fig. 10.) zunehmenden Abſciſſen $u = AQ$, mithin hätte man für dieſe neue Abſciſſenaxe

$$y = MP, x = AP, u = AQ, z = MQ, \alpha = XAu, a = o, b = o,$$

und $y = z\,\mathrm{Cof}\,\alpha - u\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; $x = z\,\mathrm{Sin}\,\alpha + u\,\mathrm{Cof}\,\alpha$.

4. Zuſatz.

Es erhellt ferner auf gleiche Art, wie in (93. §. 1. Zuſ.), daß die durch eine ſolche Verwechslung der Abſciſſenaxen erhaltene neue Gleichung allemal von eben der Ordnung ſeyn muß, zu welcher die gegebene Gleichung gehört.

5. Zuſatz.

Die Auflöſung der vorigen Aufgabe war ſo allgemein, Fig. 8.
daß ſie auch für eine gerade Linie RS gelten muß. Nimmt man aber an, daß die gerade Linie RS die Abſciſſenaxe VX irgendwo in T unter einem Winkel $STX = \varphi$, und die Ordinatenaxe DE in n in der Entfernung $An = e$ ſchneidet; ſo iſt $mn = AP = y$; und $MP = y$; $Mm = x\,\mathrm{Tang}\,\varphi$,

mithin $y = e + x \operatorname{Tang} \varphi$ eine Gleichung für die gerade Linie RS zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$, $MP = y$: sie ist von der ersten Ordnung (91. §.), und jede andere, die sich daraus für irgend eine andere Abscissenaxe Us allemal bestimmen läßt, muß daher von der ersten Ordnung seyn (4. Zus.), selbst alsdann, wenn sie zwischen schiefwinklichten Coordinaten verlangt wird (93. §. 1. 2. Zus.). Einer geraden Linie kann also keine andere Gleichung als von der ersten Ordnung gehören.

6. Zusatz.

Jede Gleichung von der ersten Ordnung drückt $\alpha + \beta x + \gamma y = o$ aus, und dieses giebt $y = -\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} x$. Nimmt man die Ordinatenaxen DE, VX, und macht man $An = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $AT = \frac{\alpha}{\beta}$; so wird die gerade durch n und T gezogene Linie RS diejenige seyn, welcher die Gleichung $y = -\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} x$ zugehört (92. §.): denn es ist für jeden ihren Punct M allemal $Mm = \frac{nm.An}{AT} = \frac{AP.An}{AT}$, folglich für $AP = x$, $MP = y$ ist $Mm = x.-\frac{\alpha}{\gamma} : -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\gamma} x$, und $y = An + Mm = -\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} x$. So wie demnach einer geraden Linie keine andere Gleichung als von der ersten Ordnung zugehören kann (5. Zus.), eben so muß jede Gleichung von der ersten Ordnung einer geraden Linie zugehören. Mithin gehört einer Gleichung von irgend einer höheren Ordnung allemal eine krumme Linie zu, und jeder krummen

Linie

Linie muß eine Gleichung von irgend einer höhern Ordnung zugehören.

7. Zusatz.

Wenn $Z = X + Y = 0$ eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x, y einer krummen Linie von der Ordnung n ist, und Y die Summe derjenigen Glieder bedeutet, worin was immer für Potenzen von y stecken, X aber die Summe aller übrigen Glieder ausdrückt (91. §.); so muß $Y = 0$ für $y = 0$, mithin $X = 0$ werden; diese Gleichung kann höchstens von der Ordnung n seyn, weil sonst $Z = 0$ von einer höheren Ordnung seyn würde; daher kann $X = 0$ höchstens n mögliche Werthe für x geben (I. B. 96. §.), wohl aber wenigere, wenn sie nämlich einige Paare unmöglicher Wurzeln hat (I. B. 115. §.). Die krumme Linie, zu welcher eine Gleichung $Z = 0$ von der Ordnung n gehört, kann also die Abscissenaxe nie in mehreren Puncten treffen, als in n Puncten, wohl aber in wenigeren (92. §. 6. Zus.). Da aber jede gerade Linie, sie mag was immer für eine Lage in Ansehung gewisser Abscissenaxen haben, für eine neue Abscissenaxe genommen werden kann, für welche eine Gleichung für die krumme Linie von eben der Ordnung gefunden wird, von welcher die Gleichung bey der vorigen Abscissenaxe seyn mag (4. Zus.); so kann keine gerade Linie eine krumme Linie in mehreren Puncten treffen, als wie viel Einheiten der Exponent der Ordnung hat, zu welcher die Gleichung für die krumme Linie in Ansehung was immer für einer Abscissenaxe gehört: es kann aber wohl geschehen, daß die

Anzahl dergleichen Puncte kleiner ausfällt, als der Exponent der Ordnung ist, zu welcher die krumme Linie gehört, oder daß es gar keinen Punkt giebt, wofern nämlich die Gleichung zwischen den Coordinaten u, z bey der zur Abscissenaxe genommenen geraden Linie entweder einige, oder lauter unmögliche Wurzeln u für $z=o$ hat.

Haupteigenschaften der Parabel, Ellipse und Hyperbel.

95. §. Erklärung.

Die Parabel heißt diejenige krumme Linie, zu welcher die Gleichung $y^2=px$ zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten y, x gehört; und die unveränderliche Linie p heißt ihr Parameter.

1. Zusatz.

Für eine andere Abscisse X und Ordinate Y wäre also $Y^2=pX$: daher ist allemal $p:y=y:x$, und $y^2:Y^2=x:X$. Das heißt: jede Ordinate bey der Parabel ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Parameter und der Abscisse; die Quadrate der Ordinaten verhalten sich aber gegen einander, wie die ihnen zugehörigen Abscissen.

2. Zusatz.

Für einen verneinten Werth von x ist $y=\pm\sqrt{px}$ unmöglich; für $x=o$ ist $y=o$; und für jeden bejahten Werth von x hat $y=\pm\sqrt{px}$ zween gleich grosse aber entgegengesetzte Werthe, welche ohne Ende fortwachsen, wenn x

ohne

ohne Ende zunimmt. Iſt alſo VX die Abſciſſenaxe, und A der Anfangspunct der Abſciſſen (11. Fig.), und nennt man verneinte Abſciſſen, welche, wie As, zur Linken des Puncts A liegen; ſo giebt es zur Linken des Puncts A gar keinen Punct für die Parabel (92. §. 3. Zuſ.); zur Rechten des Puncts A müſſen aber auf jedem Puncte P zwo einander gleiche Ordinaten MP = Pm ſtehen (12. §. 5. Zuſ.), und zwar zwo deſto gröſſere, je gröſſer die Abſciſſe AP genommen wird; überdem liegt ein Punct der Parabel im Anfangspuncte A der Abſciſſen (92. §. 3. Z.), und da wird von ihr die Abſciſſenlinie VX wirklich geſchnitten (daſ. 4. Z.). Fig. 11.

3. Zuſatz.

Die Abſciſſenlinie VX halbirt demnach alle Sehnen der Parabel, die darauf ſenkrecht ſtehen, wie ac, Qq, Mm, mithin hat die Parabel eine Axe AX, und einen Scheitel A (88. §.); überdem beſteht ſie aus zweenen Aeſten AR, AS, welche gegen X ohne Ende fortlaufen, und ſich von der Axe AX immer mehr und mehr entfernen, je mehr ſie verlängert werden (89. §.).

4. Zuſatz.

Jeder parabolische Raum MAmPM zwiſchen einer auf der Axe AX ſenkrecht ſtehenden Sehne Mm und dem Bogen MAm wird von der Axe AX in zwo gleiche und ähnliche Hälften MAP, APm getheilt, nämlich in ſolche, welche gehörig auf einander gelegt einander decken würden.

5. Zuſatz.

Weil $AM^2 = MP^2 + AP^2$ und $MP^2 = p.AP$ iſt; ſo iſt auch $AM^2 = (p + AP).AP$, mithin $p + AP : AM = AM : AP$,

oder, die gerade Linie zwischen dem Scheitel der Parabel und irgend einem Puncte derselben ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Abscisse und der Summe der Abscisse und des Parameters.

96. §. Erklärung.

Die Ellipse ist eine krumme Linie von der zweyten Ordnung, zu welcher die Gleichung $y^2 = \frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}$ gehört.

1. Zusatz.

Die Abscissenaxe sey VX und A der Anfangspunct der Abscissen (12. Fig.). Da nun die Gleichung für die Ellipse $y = o$ für $x = o$ und für $x = a$ giebt; so ist gewiß, daß die Abscissenlinie VX von der Ellipse zweymal getroffen wird, nämlich im Anfangspuncte A der Abscissen, und im Puncte B in der Entfernung $AB = a$ (92. §. 3. Zus.).

Fig. 12.

2. Zusatz.

Für jeden verneinten Werth von x, und jeden bejahten $> a$ giebt die Gleichung für die Ellipse einen unmöglichen Werth $\sqrt{\left(\frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)}$ für y: für die Ellipse giebt es also gar keinen Punct zur linken des Puncts A, und auch keinen zur Rechten des Puncts A, dessen Entfernung von der Ordinatenaxe dy grösser als $AB = a$ wäre (92. §. 3. Zus.).

3. Zusatz.

Wird $AB = a$ in C gleich getheilt, daß $AC = CB = \frac{1}{2}a$ ist; nimmt man ferner $CF = Cf = e$, mithin eine Abscisse

AF

$AF = \frac{1}{2}a - e$, und eine andere $Af = \frac{1}{2}a + e$; so giebt die obige Gleichung die Ordinaten y, welche diesen Abscissen zugehören, nämlich

$$y = \pm \frac{b}{2a}\sqrt{(a^2 - 4e^2)}$$ sowohl für $x = \frac{1}{2}a - e$. als für $x = \frac{1}{2}a + e$.

An jedem Puncte F zwischen A und B stehen also bey der Ellipse zwo gleich grosse, aber entgegengesetzte Ordinaten $QF = Fq = \frac{b}{2a}\sqrt{(a^2 - 4e^2)}$ nach (92. §. 5. Zus.); und in gleichen Entfernungen FC, fC vom mittleren Puncte C der geraden Linie $AB = a$ befinden sich gleiche Ordinaten $QF = Q'f$, $Fq = fq'$.

4. Zusatz.

Weil $QF = Fq = \frac{b}{2a}\sqrt{(a^2 - 4e^2)}$ allmählich zunimmt, wenn $AF = AC - FC = \frac{1}{2}a - e$ wächst, und $\frac{b}{2a}\sqrt{(a^2 - 4e^2)} = \frac{1}{2}b$ für $FC = e = o$, mithin für $AF = AC = \frac{1}{2}a$ wird; so müssen die Ordinaten $QF = Fq$ bey der Ellipse allmählich zunehmen, wenn sie von A an (1. Zus.) gegen C zu allmählich näher rücken, und in C stehet allemal eine völlig bestimmte Ordinate $DC = CE = \frac{1}{2}b$.

5. Zusatz.

Sey qq' zu AB parallel; so sind an C, n rechte Winkel: werden aber die Ordinaten Fq, fq' gezogen; so sind auch an F, f rechte Winkel. Also ist $Fq = Cn = fq'$ und $FC = qn$, $fC = nq'$. Es muß aber $Cf = CF$ seyn, weil sonst $Cf = CP$ oder Ce genommen werden könnte, in welchem Fall $fq' = Pm$ oder $fq' = eg$ (3. Zus.); mithin auch

Fq = Pm oder Fq = eg seyn müßte, da doch dieses unmöglich ist (4. Zus.): also ist auch qn = nq'. Das heißt: DE im mittleren Puncte C von AB senkrecht auf AB halbirt jede zu AB parallele Sehne qq' unter einem rechten Winkel Cnq' = DCB.

6. Zusatz.

Die Ellipse ist also ganz zwischen den Puncten A, B in der Entfernung AB = a eingeschlossen (1. Zus.): ihre auf AB senkrechte Sehnen dy, Qq, Mm, DE, Qq', werden von AB = a alle unter rechten Winkeln halbirt (3. Zus.): sie nehmen von A an bis DE = b allmählich zu (4. Zus.), hierauf nehmen sie von da an bis B allmählich ab, dergestalt, daß es für jede Sehne Qq zwischen A und C eine gleich grosse Q'q' zwischen C und B geben muß (3. Z.): demnach ist DE = b die größte Sehne und diese halbirt alle zu AB = a parallelen Sehnen, ebenfalls unter rechten Winkeln (5. Zus.). Man kann demnach sagen, die Ellipse habe vier Scheitelpuncte A, B, D, E, und zwo Axen AB = a, DE = b (88. §.), welche einander in C halbiren.

7. Zusatz.

Man nennt AB = a die Zwergaxe und DE = b die ihr zugeordnete Axe (88. §.): jede von ihnen theilt die ganze Ellipse in zwo gleiche und ähnliche Hälften, mithin wird sie von beyden Axen in vier gleiche und ähnliche Theile DAC, DCB, BCE, ECA getheilt (6. Zus.).

8. Zu-

8. Zuſatz.

Es iſt $CQ' : Cq = Cf : CF$. Man kann nun nicht ſagen, daß nicht $Cf = CF$ iſt; denn ſonſt könnte man $C\beta = CF$ machen, und dann wäre auch $\alpha\beta = \beta e = Fq$ (3. Zuſ.), mithin der Winkel $\alpha C\beta = FCq = Q'Cf$, welches doch nicht ſeyn ſollte, weil ſonſt αC auf $Q'C$ liegen, mithin α mit Q einerley Punct ſeyn, oder $Q'q$ die Ellipſe in drey Puncten α, Q', q treffen müßte, welches nicht angeht (Erklär. und 94. §. 7a. Zuſ.). Iſt aber $Cf = CF$; ſo iſt auch $CQ' = Cq$, das heißt: jede Sehne $Q'q$, welche durch den mittleren Punct C der Zwergaxe AB gezogen ſeyn mag, wird in C halbirt, mithin iſt C der Mittelpunct der Ellipſe (88. §.).

9. Zuſatz.

Setzt man $PC = u$; ſo iſt $x - AP = AC - PC = \frac{1}{2}a - u$: da alſo die obige Gleichung für die Ellipſe die Ordinate $MP = y$ geben muß, welche der Abſciſſe $x = AP$ zugehört; ſo wird nun ſeyn

$$y^2 = \frac{b^2}{a}(\tfrac{1}{2}a - u) - \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}a - u)^2 \text{ oder } y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2.$$

Dieſe Gleichung giebt alſo jede Ordinate $MP = y$ der Ellipſe, wenn die Abſciſſe $u = CP$, vom Mittelpuncte C gerechnet, gegeben wird.

97. §. Erklärung.

Die Hyperbel iſt eine krumme Linie von der zweyten Ordnung, welcher die Gleichung $y^2 = \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$ zugehört.

1. Zuſatz.

Sey VX die Abſciſſenlinie und A der Anfangspunct der Abſciſſen (13. Fig.). Da nun die gegebene Gleichung $y=o$ für $x=o$ und für $x=-a$ giebt; ſo iſt gewiß, daß die Hyperbel dieſelbe Abſciſſenlinie im Anfangspuncte A der Abſciſſen, und noch in einem Puncte B treffen muß, deſſen Entfernung von A, $BA=a$ iſt (92. §. 3. Zuſ.). 13.

2. Zuſatz.

Nimmt man irgend eine verneinte Abſciſſe $x=-Av$, daß doch $Av<AB=a$ ſey; ſo wird die gegebene Gleichung für ſie allemal eine unmögliche Ordinate y geben: denn wenn $Av<a$ iſt; ſo muß auch $Av^2<a.Av$, mithin $a.Av-Av^2$ etwas verneintes, und $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(-a.Av+Av^2)}$ für $x=-Av$ etwas unmögliches ſeyn. Zwiſchen den Puncten A, B giebt es alſo für die Hyperbel gar keinen Punct, weder auf der Abſciſſenlinie VX, noch oberhalb oder unterhalb derſelben (92. §. 3. Zuſ.).

3. Zuſatz.

Setzt man aber $AP=BP'=e$, und theilet man AB=a in C, daß $BC=CA=\frac{1}{2}a$ ſey; ſo wird $AP'=e$ eine bejahte Abſciſſe ſeyn, nämlich $x=+e$, und für dieſe giebt die obige Gleichung die Ordinate $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(ae+e^2)}$: es wird ferner $AP'=AB+BP'=a+e$ eine verneinte Abſciſſe ſeyn, nämlich $x=-(a+e)$, und dafür giebt die obige Gleichung die Ordinate

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(-a(a+e)+(-(a+e))^2)}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(ae+e^2)}.$$

Da

Da nun die Endpuncte P, P' der Abscissen AP, AP' sowohl von den nächsten Puncten A und B, als vom mittleren Puncte C in gleichen Entfernungen PA, P'B, und CP, CP' stehen; so erhellt hieraus, daß erstens in allen Puncten P von A an gegen X zu, und in allen P' von B an gegen V zu zwo gleich grosse, aber entgegengesetzte Ordinaten MP = mP, M'P' = m'P' stehen müssen (92. §. 5. Zus.), und diese ohne Ende zunehmen, wenn die Puncte P, P' sich gegen X und V von A und B ohne Ende entfernen; und zweytens, daß an Puncten P, P', welche von A, B oder vom mittleren Puncte C in gleichen Entfernungen AP, BP' oder CP, CP' stehen, auch gleiche Ordinaten MP = M'P' sich befinden müssen.

4. Zusatz.

Sey q'q zu AB parallel, DE = a DC = a CE = b auf AB senkrecht, und man ziehe die Ordinaten q'f = fQ', qF = FQ. Da nun an f, C, F, n rechte Winkel sind; so muß fq' = Cn = Fq und fC = q'n, FC = nq seyn: es kann aber nicht fq' = Fq seyn, wenn nicht auch fC = FC, mithin q'n = nq ist (3. Zus.); die zu AB parallele Sehne q'q wird also von DE unter rechten Winkeln in n halbirt.

5. Zusatz.

Die Hyperbel bestehet also aus vier Aesten AR, AS, Br, Bs, welche von A und B an gegen X und V zu ohne Ende fortlaufen, und sich von der Abscissenlinie VX immer mehr und mehr entfernen (89. §.), je mehr sie verlängert werden (2. Zus.): alle zu DE parallelen Sehnen Mm, M'm' werden von BA in P, P', und alle zu AB parallelen Sehnen

q'q werden von DE in n unter rechten Winkeln halbirt (3. 4. Zuſ.); mithin hat die Hyperbel zween Scheitelpuncte A, B_A und zwo Axen AB, DE (88. §. 2. die einander in C ſenkrecht halbiren. Die Axe AB = a wird die Zwergaxe, und DE = b die ihr zugeordnete Axe genannt.

6. Zuſatz.

Jeder hyperboliſche Raum MAm zwiſchen einer ſenkrechten Sehne Mm und dem Bogen MAm iſt einem entgegengeſetzten BM'm' gleich und ähnlich, nämlich dem, deſſen Sehne M'm' vom Scheitelpuncte B ſo weit entfernt iſt, als Mm von A; und dieſe beyden Räume werden von der Zwergaxe BA in vier gleiche und ähnliche Theile MAP, APm, Bm'P', BP'M' getheilt (3. Zuſ.).

7. Zuſatz.

Sey q'Q durch C gezogen; ſo iſt fq' : FQ = q'C : QC: nun ſoll fq' = FQ mithin auch q'C = QC ſeyn. Denn wäre nicht fq' = Fq = FQ; ſo könnte auch nicht fC = FC ſeyn (3. Zuſ.), mithin könnte man eine andere Abſciſſe Cβ = Cf nehmen, und alsdann wäre αβ = fq' (3. Zuſ.), folglich wäre auch der Winkel αCβ = q Cf = QCF, und ſo läge αC auf QC, welches nicht ſeyn kann, ſonſt würde die gerade Linie qα die Hyperbel in drey Puncten q', Q, α treffen, da doch dieſes höchſtens in zweenen geſchehen kann (Erklärung und 94. §. 7. Zuſ.). Alle Sehnen alſo, welche bey der Hyperbel durch den mittleren Punct C ihrer Axen gezogen werden, werden auch in C halbirt, und ſo iſt C der Mittelpunkt der Hyperbel (88. §.).

8. Zu-

8. Zusatz.

Es war bisher AP = x, MP = y: man nehme nun an, es sey CP = a; so ist $x = CP - CA = u - \frac{1}{2}a$, und für diesen Werth von x übergeht die obige Gleichung (Erklär.) in folgende:

$$y^2 = \frac{b^2}{a}(u - \tfrac{1}{2}a) + \frac{b^2}{a^2}(u - \tfrac{1}{2}a)^2 \text{ oder } y^2 = \frac{b^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}b^2.$$

Dieses ist daher eine neue Gleichung für die Hyperbel, woraus sich jede Ordinate MP oder M'P bestimmen läßt, welche einer bejahten CP oder verneinten CP' vom Mittelpuncte C an gerechneten Abscisse zugehört.

9. Zusatz.

Setzt man de auf AB senkrecht, daß $dA = Ae = DC = \frac{1}{2}b$ ist, und zieht man hierauf durch d und e die geraden Linien CR, Cn; so wird seyn CP = u,

$$MP^2 = \frac{b^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}b^2 \text{ nach (8. Zus.)}$$

und $CA : Ad = CP : NP = \frac{CP \cdot Ad}{CA} = \frac{u \cdot \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a} = \frac{bu}{a}$;

daher $NP^2 = \frac{b^2u^2}{a^2}$: also $NP^2 - MP^2 = \frac{1}{4}b^2 = (\frac{1}{2}b)^2 = Ad^2$.

Das heißt: wenn man aus was immer für einem Puncte N der geraden Linie CR die senkrechte Linie NP auf die Zwergaxe BA der Hyperbel fallen läßt; so ist die Differenz der Quadrate der Senkstriche NP, MP allemal dem vierten Theile des Quadrats der ganzen zugeordneten Axe, oder dem Quadrat der halben zugeordneten Axe gleich.

10. Zu-

10. Zusatz.

Es ist aber $NP^2 - MP^2 = (NP + MP)(NP - MP) = (NP + MP)MN$: also ist $(NP + MP)MN = \frac{1}{4}b^2$, folglich $MN = \frac{\frac{1}{4}b^2}{NP + MP}$. Das Stück NM des Senkstriches NP zwischen dem hyperbolischen Ast AQ und der geraden Linie CR nimmt also ohne Ende ab, wenn die Senkstriche NP, MP ohne Ende zunehmen, welches geschieht, wenn die Abscisse CP ohne Ende gröſſer genommen wird (5. Zus.). Der hyperbolische Ast AQ nähert sich also der geraden Linie CR immer mehr und mehr, je mehr er verlängert wird; doch kann er sie in keiner Entfernung von C treffen, weil da N, M Puncte zusammenfallen müßten, mithin $NP = MP$, und $NP^2 - MP^2 = 0$, folglich auch $\frac{1}{4}b^2 = 0$ seyn würde (9. Zus.), welches doch unmöglich ist.

11. Zusatz.

Werden die geraden Linien RC, nC durch C nach n', N' verlängert, und wird $CP' = CP$ genommen, hierauf N'n' durch P' senkrecht auf AB gelegt; so werden die Dreyecke N'P'C, n'P'C, NPC, nPC alle einander gleich seyn, mithin $N'P' = P'n' = NP = nP$: es ist aber auch $M'P' = m'P' = MP = mP$ (3. Zus.): also auch $N'M' = n'm' = NM = nm$. Der Satz (10. Zus.) gilt daher auch für die geraden Linien CN', Cn', Cn, in Ansehung deren die hyperbolischen Aeste BM', Bn', Am eben die Lage haben, welche der Ast AQ in Ansehung der Linie CR hat.

12. Zusatz.

Die Hyperbel besteht demnach aus vier asymptotischen Aesten AQ, Am, BM′, Bm′ und ihre Asymptoten sind die vier geraden Linien CR, Cn, CN′, Cn′ (10. 11. Zus. und 89. §.), welche vom Mittelpuncte C durch die äussersten Puncte der an Endpuncten A, B der Zwergaxe errichteten Senkstriche de, de gezogen werden, wenn nur diese, in A, B halbirt, jede für sich, der zugeordneten Axe DE=b gleich sind.

13. Zusatz.

Setzt man CN=v, NM=z; so erhält man aus (9. Z.), wegen z=NM=NP−MP.

$$z=\frac{bu}{a}-\frac{b}{2a}\sqrt{(4u^2-a^2)}=\frac{b}{2a}(2u-\sqrt{(4u^2-a^2)}).$$

Es ist aber $Cd^2=CA^2+Ad^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$; man setze demnach Cd=e, mithin $e=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$. Nun ist Cd:CN=CA:CP, daher $e:v=\frac{1}{2}a:u=\frac{av}{2e}$: also ist

$$z=\frac{b}{2a}\left(\frac{av}{e}-\sqrt{\left(\frac{a^2v^2}{e^2}-a^2\right)}\right)$$

oder $z=\frac{b}{2e}(v-\sqrt{(v^2-e^2)})$.

Dieses wäre demnach eine Gleichung für die Hyperbel zwischen den Abscissen CN=v, welche auf der Asymptote CR vom Mittelpuncte C an gerechnet werden, und den ihnen zugehörigen Ordinaten NM=z, welche zur zugeordneten Axe DE parallel wären.

98. §. Aufgabe.

Die Asymptote CR wird, wie zuvor, für die Abscissenlinie genommen, es sollen aber die Ordinaten zur Nebenasymptote Cn parallel seyn: man soll eine Gleichung für dergleichen Coordinaten angeben.

Auflösung. Sey Aα und Mμ zu Cn parallel; so ist Mμ die neue Ordinate, welche der Abscisse Cμ zugehört. Man setze demnach Cμ=u, μM=t, indem CN=v, NM=z bisher war; so ist μN=v−u.

Es sind aber NμM:αdA ähnliche Dreyecke: also muß seyn μN:αd=μM:Aα=NM:Ad oder v−u:αd=t:Aα =z:½b. Ferner ist αA:Ce=dA:de, mithin, wegen dA=½de, ist auch αA=½Ce=½Cd; und weil auch αd:dC=dA:de seyn muß; so ist auch αd=½dC, folglich αA=αd=½dC. Behält man daher die Bezeichnung e=dC=½√(a²+b²) wie in (97. §. 13. Zus.); so wird seyn αA=αd=½e, und nun v−u:½e=t:½e=z:½b, woraus folgt.

$$v-u=t \text{ und } v=t+u.$$

$$\tfrac{1}{2}bt=\tfrac{1}{2}ez \text{ und } z=\frac{bt}{e}.$$

Für diese Werthe von v und z erhält man demnach aus (97. §. 13. Zus.) die verlangte Gleichung, wie folgt:

$$\frac{bt}{e}=\frac{b}{2e}(t+u-\sqrt{((t+u)^2-e^2)});$$

$$\text{daher } t=\frac{e^2}{4u}=\frac{a^2+b^2}{16u}.$$

1. Zu-

1. Zuſatz.

Es iſt alſo für alle Coordinaten $u = C\mu$, $t = NM$, das Product $tu = \frac{1}{16}(a^2 + b^2)$, nämlich das Rechteck, welches dieſelben Coordinaten zu ſeinen Seiten hat, iſt, ſeinem Quadratinhalte nach, unveränderlich, nämlich allemal der ſechszehnte Theil der Summe der Quadrate beyder Axen der Hyperbel.

2. Zuſatz.

Da aber $A\alpha = \frac{1}{2}e = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2)}$ war, mithin $A\alpha^2 = \frac{1}{16}(a^2+b^2)$ iſt; ſo iſt auch $tu = A\alpha^2$, oder bey allen Coordinaten $u = C\mu$, $t = \mu M$ iſt das Rechteck $C\mu.\mu M$ allemal ſo groß, als das Quadrat der zur Aſymptote Cn parallelen Linie $A\alpha$, und aus dieſer Urſache pflegt man das Quadrat $A\alpha^2$ die Potenz der Hyperbel zu nennen, wovon die Wurzel $A\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2)}$ einen vollkommen beſtimmten Werth hat.

3. Zuſatz.

Der Aſymptotenwinkel ſey $RCn = 2\varphi$, mithin $\alpha CA = \alpha AC = \varphi$, und $C\alpha A = 180° - 2\varphi$; ſo iſt in CAD rechtwinklichtem Dreyecke $\text{Sin}\,\varphi = \frac{Ad}{Cd} = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, mithin iſt nach (I. B. 156. §. 4. Zuſ.) $\frac{1-\text{Cof}\,2\varphi}{2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$, folglich iſt

$$\text{Cof}\,2\varphi = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad \text{Sin}\,2\varphi = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

Für gegebene Axen AB=a, DE=b der Hyperbel ist also der Asymptoten-Winkel 2φ=RCn allemal von bestimmter Grösse.

4. Zusatz.

Für den bekannten Asymptotenwinkel $\alpha Cn = 2\varphi$ sey $A\beta$ parallel zu $C\alpha$; so ist die Höhe der Raute $\alpha C\beta A$, allemal $= C\alpha.\sin 2\varphi = A\alpha.\sin 2\varphi$: also der Quadratinhalt derselben $C\alpha A\beta = A\alpha^2.\sin 2\varphi$, das Product aus der Potenz der Hyperbel in den Sinus des Asymptotenwinkels (2. Zus.).

5. Zusatz.

Zieht man Mr zur Asymptote CR parallel; so ist des Parallelogramms μMrC Höhe $= C\mu.\sin 2\varphi$: also der Quadratinhalt $C\mu Mr = C\mu.\mu M \sin 2\varphi = A\alpha^2.\sin 2\varphi$ (2. Zus.) $= C\alpha A\beta$ (4. Zus.). Alle Parallelogrammen also, welche die zu den Asymptoten Cn, CR parallelen Linien μM, Mr zu ihren Seiten haben, sind, dem Quadratinhalte nach, einander gleich, und jedes Parallelogramm für sich ist so groß, als die Raute $C\alpha A\beta$.

6. Zusatz.

Die Hyperbel heißt gleichseitig, wenn ihre Axen DE=b, AB=a einander gleich sind: bey ihr muß also a=b, mithin $\sin 2\varphi = 1$ (3. Zus.), folglich der Asymptotenwinkel RCn=90°, die Raute $C\alpha A\beta$ ein Quadrat, und jedes Parallelogramm μMrC (4. Zus.) ein Rechteck seyn. Die Potenz ist hier $A\alpha^2 = \frac{1}{2}a^2$ (2. Zus.), welches zugleich den

Quadrat-

Quadratinhalt des Quadrats $C\alpha A\beta$, und jedes Rechtecks μMrC giebt (4. Zuſ.).

7. Zuſatz.

Wegen $a=b$ iſt ferner $t=\frac{a^2}{8u}$ (Auflöſ. der vorigen Aufg.); und (97. §. 13. Zuſ.) $z=\frac{1}{2}(v\sqrt{2}-\sqrt{(2v^2-a^2)})$. Es ſind Gleichungen für eine gleichſeitige Hyperbel; die erſte gilt für jede Abſciſſe $u=C\mu$ und die ihr zugehörige zur Aſymptote Cn parallele Ordinate $t=\mu M$; die zweyte aber gilt für jede Abſciſſe $CN=v$ und die ihr zugehörige zur zugeordneten Axe DE parallele Ordinate $NM=z$.

8. Zuſatz.

Und aus (97. §. nebſt 8. Zuſ.) erhält man für $a=b$ folgende Gleichungen:

1) $y^2=ax+x^2$; 2) $y^2=u^2-\frac{1}{4}a^2$.

Sie gelten daher für jede gleichſeitige Hyperbel; die erſte wird durch die vom Scheitel A gerechneten Abſciſſen $x=AP$, und die auf der Zwergaxe ſenkrecht ſtehenden Ordinaten $MP=y$ gegeben: die zweyte aber enthält eben dieſelben Ordinaten, aber die Abſciſſen ſollen bey ihr $CP=u$ ſeyn, mithin vom Mittelpuncte C gerechnet werden.

9. Zuſatz.

Demnach wäre $MP^2=CP^2-\frac{1}{4}BA^2=(CP+BC)(CP-BC)=BP.AP$; und eben ſo wäre $QS^2=BS.AS$. Bey einer gleichſeitigen Hyperbel iſt alſo das Quadrat jeder Ordinate auf der Zwergaxe ſo groß, als das Rechteck, welches die Entfernungen derſelben Ordi-

nate von beyden Scheitelpunkten zu seinen Seiten hat: und $CP^2 : QS^2 = BP \cdot AP : BS \cdot AS$, oder die Quadrate zwoer Ordinaten verhalten sich gegen einander wie die Rechtecke aus ihren Entfernungen von Scheitelpuncten.

Von Brennpuncten.

99. §. Erklärung.

Bey der Parabel bedeutet der Parameter p eine bestimmte gerade Linie, wodurch die Gleichung für sie gegeben wird (95. §.). Die Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel sind bisher durch zwo Axen a, b gegeben worden, nämlich durch die Zwergaxe a, worauf man die Abscissen genommen hatte, und durch die ihr zugeordnete Axe b (96. §. 9. Zus. und 97. §. 8. Zus.). Suchet man nun die dritte geometrische Proportionallinie nach a, b aus $a:b=b:p$; so wird $p = \frac{b^2}{a}$ der Parameter für die Zwergaxe a der Ellipse oder Hyperbel heissen.

Zusatz.

Dafür erhält man aus (96. §.) folgende Gleichung 1); aus (96. §. 9. Zus.) die Gleichung 2); aus (97. §.) die Gleichung 3) und aus (97. §. 8. Zus.) die Gleichung 4).

Für die Ellipse

1) $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$.

2) $y^2) = \frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}u^2$.

Für

$$3)\ y^2 = px + \frac{px^2}{a}.$$

Für die Hyperbel

$$4)\ y^2 = \frac{p}{a}u^2 - \tfrac{1}{4}ap.$$

Die erste und dritte Gleichung gilt für die auf der Zwergaxe AB = a vom Scheitel A gerechneten Abscissen AP = x; die zweyte und vierte aber gilt für die Abscissen u = CP, welche vom Mittelpuncte C an genommen werden. Fig. 12. 13.

100. §. Erklärung.

Der Brennpunct bey der Parabel, Ellipse, und Hyperbel soll hier denjenigen Punct der Abscissenaxe bedeuten, an welchem die Ordinate dem halben Parameter (99. §.) p gleich ist. Giebt es für die Ellipse oder Hyperbel wirklich einen Brennpunct auf der Zwergaxe AB (12. 13. Fig.); so wird sein Abstand vom Mittelpuncte C die Excentricität genannt.

1. Zusatz.

Aus der Gleichung für die Parabel (11. Fig.) erhielte man $\frac{1}{4}p^2 = px$ (95. §.) mithin $x = \frac{1}{4}p$ für $y = \frac{1}{2}p$ (100. §.): für die Parabel giebt es also wirklich einen Brennpunct F auf ihrer Axe AX, und seine Entfernung AF vom Scheitel A, die E heissen mag, ist der vierte Theil des Parameters, oder $E = \frac{1}{4}p$. Fig. 11.

2. Zusatz.

Daher ist $p = 4E$ und $y^2 = 4Ex$ (95. §.), das heißt: das Quadrat jeder Ordinate bey der Parabel ist viermal so groß, als das Rechteck, dessen Seiten die

Abſciſſe und die Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel ſind.

3. Zuſatz.

Zieht man vom Brennpuncte F zu irgend einem Puncte M der Parabel die gerade Linie FM; ſo wird ſeyn $FM^2 = MP^2 + FP^2$: es iſt aber $MP^2 = 4Ex$ (2. Zuſ.), und $FP^2 = (AP - AF)^2 = (x-E)^2$: alſo $FM^2 = 4Ex + (x-E)^2 = (x+E)^2$, daher $FM = x + E = AP + AF$.

101. §. Aufgabe.

Fig. 12. Für gegebene Axen $AB = a$, $DE = b$ der Ellipſe (12. Fig.) zu unterſuchen, ob es auf ihrer Zwergaxe AB einen Brennpunct giebt.

Auflöſung. Der Parameter für die Zwergaxe iſt $p = \frac{b^2}{a}$ (99. §.), daher, wenn es darauf irgendwo in F einen Brennpunct giebt, muß die Ordinate $FQ = \frac{b^2}{2a}$ möglich ſeyn, welches ſo entſchieden wird. Für $CQ = u$ ſetze man $y = FQ = \frac{b^2}{2a}$ (100. §.) in (96. §. 9. Zuſ.); ſo wird ſeyn

$$\frac{b^4}{4a^2} = \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2: \text{ alſo } u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Da nun dieſes allemal eine mögliche Gröſſe giebt, wenn $b < a$ iſt; ſo iſt offenbar, daß es auf dem Abſciſſen-Durchmeſſer AB der Ellipſe zween entgegengeſetzte Brennpuncte F, f geben muß, wenn die Abſciſſenaxe AB gröſſer iſt,

ist, als die ihr zugeordnete DE, und alsdann liegen dieselben Brennpuncte in gleichen Entfernungen FC=fC $= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$ vom Mittelpuncte C.

1. Zusatz.

Heißt c die Excentricität FC=fC (100. §); so ist allemal $c = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$, mithin $c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, oder das Quadrat der Excentricität ist bey der Ellipse allemal so groß, als der vierte Theil der Differenz der Quadrate ihrer Axen.

Ferner ist $4c^2 = a^2 - b^2$, oder $Ff^2 = AB^2 - DE^2$, das heißt: das Quadrat der Entfernung beyder Brennpuncte von einander ist bey der Ellipse so groß, als die Differenz der Quadrate ihrer Axen.

2. Zusatz.

Wegen AC=CB=$\frac{1}{2}$a müssen auch die Entfernungen AF, Bf der Brennpuncte F, f von nächsten Scheitelpuncten der Abscissenaxe AB, worauf sie liegen, einander gleich seyn; setzt man AF=Bf=E; so ist nach (1. Zus.).

$$E = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)} = \frac{1}{2}a - c.$$

3. Zusatz.

Man kann c und E durch den Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ (99. §) ausdrücken; denn es ist $b^2 = ap$; daher in (1. 2. Zus.),

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}; \quad E = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)},$$

Und nun auch

$$p = a - \frac{4c^2}{a}; \quad p = 4\left(E - \frac{E^2}{a}\right).$$

4. Zusatz.

Für die Zwergäxe AB = a und die zugeordnete Axe DE = b (12. Fig.) werden in (1. 2. Zus.) die Entfernungen zweener Brennpuncte F, f vom Mittelpuncte C und den Scheiteln A, B seyn, wenn nur AB > DE ist (Auflös. der vor. Aufg.). Zieht man zu irgend einem Punct M die geraden Linien FM, fM; so wird seyn $FM = \sqrt{(MP^2 + FP^2)}$, $fM = \sqrt{(MP^2 + fP^2)}$; für CP = u ist aber FP = FC − u und fP = fC + u; daher nehme man MP^2 nach (96. §. 9. Zus.) und FC = fC = c nach (1. Zus.), wodurch entstehen die Gleichungen,

Fig. 12.

$$FM = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2 - b^2)} + \frac{(a^2 - b^2)u^2}{a^2}\right)}$$

$$= \pm\frac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$

$$fM = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2 - b^2)} + \frac{(a^2 - b^2)u^2}{a^2}\right)}$$

$$= \pm\frac{1}{2}a \pm \frac{u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}.$$

Da aber für $u = \frac{1}{2}a = CA$ gewiß $FM = FA = E = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$ entstehen soll (2. Zus.), und bey eben der Bedingung $fM = fA = fF + FA = 2c + E = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)}$ wird (1. 2. Zus.); so ist gewiß, daß man bey FM, fM die obern Zeichen brauchen muß, mithin setzen

$$FM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}; \quad fM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$

Daher

Daher ist FM+fM=a, oder die Summe der geraden Linien, welche von beyden Brennpuncten f, F der Zwergaxe AB zu irgend einem Punct M der Ellipse gezogen werden, ist allemal so groß, als die Zwergaxe selbst.

5. Zusatz.

Mithin ist auch FD+fD=a; aber FD=fD wegen fC=FC; also ist FD=fD=½a, das heißt: die gerade Linie zwischen einem Brennpuncte der Zwergaxe und einem Endpuncte der zugeordneten Axe ist der halben Zwergaxe gleich.

102. §. Aufgabe.

Zu untersuchen, ob es nicht auf der gegebenen Abscissenaxe AB=a der Hyperbel (15. Fig.) einen Brennpunct giebt. Fig. 15.

Auflösung. Wenn die zugeordnete Axe DE=b ist; so ist der Parameter $p=\frac{b^2}{a}$ (99. §.), und nun sollte $\frac{b^2}{2a}$ die Ordinate am Brennpuncte seyn (100. §.): also wäre nach (97. §. 8. Zus.)

$$\frac{b^4}{4a^2}=\frac{b^2}{a^2}u^2-\frac{1}{4}b^2, \text{ mithin } u=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

Da also $\sqrt{(a^2+b^2)}$ allemal eine mögliche Grösse ist; so giebt es auch auf der Zwergaxe AB wirklich zween entgegengesetzte Brennpuncte, etwa F, f in gleichen Entfernungen $CF=Cf=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$ vom Mittelpuncte C, mithin

auch in gleichen Entfernungen AF, Bf von nächsten Scheitelpuncten der Zwergare.

1. Zusatz.

Die Excentricität sey CF=Cf=c, und die Entfernung jedes Brennpuncts vom nächsten Scheitelpuncte AF=Bf=E; so ist

$$c=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)};\quad c^2=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2);\quad E=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}-\tfrac{1}{2}a.$$

Bey der Hyperbel ist also das Quadrat der Excentricität (100. §.) so groß, als der vierte Theil der Summe der Quadrate ihrer Axen; und $4c^2=(2c)^2=fF^2$ oder das Quadrat der Entfernung beyder Brennpuncte von einander ist so groß als die Summe der Quadrate beyder Axen.

2. Zusatz.

Für c, E und den Parameter p findet man Gleichungen aus (1. Zus.), wenn man daselbst $p=\frac{b^2}{a}$, mithin $ap=b^2$ setzt; es wird nämlich seyn:

$$c=\tfrac{1}{2}\sqrt{(ap+a^2)};\quad E=\tfrac{1}{2}\sqrt{(ap+a^2)}-\tfrac{1}{2}a,$$

daher

$$p=\frac{4c^2}{a}-a;\quad p=\frac{4E}{a}(E+a).$$

3. Zusatz.

Fig. 13. Die Brennpuncte auf der Zwergare AB=a (13. Fig.) seyen in f, F, und man ziehe zu irgend einem Punct M die geraden Linien fM, FM; so wird seyn $FM=\sqrt{(MP^2+FP^2)}$, $fM=\sqrt{(MP^2+fP^2)}$. Nun ist die zugeordnete Axe DE=b,

FP

$FP=u-CF$ und $fP=u+Cf=u+CF$ für $CP=u$: wenn man also $MP^2=y^2$ nach (97. §. 8. Zuſ.), und $CF=e$ nach (1. Zuſ.) nimmt; ſo erhält man:

$$FM=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-u\sqrt{(b^2+a^2)}+\frac{(b^2+a^2)u^2}{a^2}\right)}$$

$$=\mp\frac{1}{2}a\pm\frac{u\sqrt{(b^2+a^2)}}{a}.$$

$$fM=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+u\sqrt{(b^2+a^2)}+\frac{(b^2+a^2)u^2}{a^2}\right)}$$

$$=\pm\frac{1}{2}a\pm\frac{u\sqrt{(b^2+a^2)}}{a}.$$

Da aber für $u=CP=CA=\frac{1}{2}a$ gewiß $FM=FA=E=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+a^2)}-\frac{1}{2}a$ und $fM=fA=fB+BA=a+AF=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+a^2)}$ wird (1. Zuſ.); ſo müſſen bey FM, fM die obern Zeichen beybehalten werden, und ſo iſt:

$$FM=-\frac{1}{2}a+\frac{u\sqrt{(b^2+a^2)}}{a};\quad fM=\frac{1}{2}a+\frac{u\sqrt{(b^2+a^2)}}{a}$$

Demnach iſt $fM-FM=\frac{2a}{2}=a$ das heißt: die Differenz der geraden Linien zwiſchen den Brennpuncten der Zwergaxe und irgend einem Puncte M der Hyperbel iſt allemal der ganzen Zwergaxe gleich.

Von Tangenten, Subtangenten, Normallinien, und Subnormallinien.

103. §. Aufgabe.

Für gegebene rechtwinklichte Coordinaten $Cd=x$, $MD=y$ (2. Fig.) einer krummen Linie OS die Formeln Fig. 2.

muln zu finden, welche die Tangente BM, Subtangente BD, Normallinie MN und Subnormallinie ND (90. §.) ausdrücken mögen.

Auflösung. Weil die Tangente $MB = \sqrt{(MD^2 + BD^2)}$, die Normallinie $MN = \frac{MD}{BD}\sqrt{(MD^2 + BD^2)}$, und die Subnormallinie $ND = \frac{MD^2}{BD}$ ist; so kömmt alles darauf an, daß man die Subtangente BD bestimme.

Dem zufolge bilde man sich ein, die Abscisse $CD = x$ wachse um $DE = \Delta x$, und die ihr zugehörige Ordinate $MD = y$ um $mq = \Delta y$. Wird nun durch die Puncte M, m die Secante Rs geführt; so wird seyn $mq : Mq = MD : RD$, mithin $\Delta y : \Delta x = y : RD$, daher ist allemal $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{RD} = \frac{y}{RB + BD}$. Es mag demnach die Ordinate $y = MD$ was immer für eine Function von der Abscisse $x = CD$ seyn; so ist doch der ihr zukommende Differenzquotient allemal $= \frac{y}{RB + BD}$ (5. §.): da also dieser in $\frac{y}{BD}$ übergeht, sobald $\Delta x = o$ gesetzt wird; so ist $\frac{y}{BD}$ der Verschwindungs-Quotient von y (5. §.), nämlich $dy = \frac{ydx}{BD}$ (5. §. und 3. Zus.) und hiedurch erhält man

Die Subtangente $BD = \frac{ydx}{dy}$.

Die Tangente $MB = \frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

Die

Die Normallinie $MN = \frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2+dx^2)}$.

Die Subnormallinie $ND = \frac{ydy}{dx}$.

Zusatz.

Beym wirklichen Gebrauch dieser Formuln muß man $(-dy)$ statt dy nehmen, wenn die krumme Linie von der Beschaffenheit ist, daß bey ihr den zunehmenden Abscissen x abnehmende Ordinaten y zugehören (5. §. 8. Zus.); übrigens wird die Anwendung davon so gemacht: Die Gleichung für die krumme Linie zwischen y und x soll bekannt seyn, und alsdann sucht man aus ihr y und dy durch x und dx oder umgekehrt dx durch y und dy auszudrücken; die gefundenen Werthe setzt man hierauf statt y und dy, oder statt x und dx in diejenige Formul, welche bey der Auflösung der vorigen Aufgabe die verlangte Linie geben soll.

Beyspiel.

Sey OS eine Kreislinie, und N ihr Mittelpunct, der Anfangspunct der Abscissen aber in v: so ist für $vN=r$, $vD=x$, $MD=y$ nach (92. §.).

$$y^2 = 2rx - x^2; \text{ also } dy = \frac{(r-x)dx}{y}$$

Setzt man den hier aus der Gleichung für die Kreislinie gefundenen Werth von dy in die obigen Formuln; so findet man folgende Linien, wie sie sonst aus der Elementar-Geometrie bekannt sind.

Die

Die Subtangente $BD = \frac{y^2}{r-x} = \frac{2rx-x^2}{r-x}$.

Die Tangente $MB = \frac{y^2}{(r-x)dx}\sqrt{\left(\frac{(r-x)^2dx^2}{y^2}+dx^2\right)} = \frac{ry}{r-x}$.

Die Normallinie $MN = \frac{y}{dx}\sqrt{\left(\frac{(r-x)^2dx^2}{y^2}+dx^2\right)} = r$.

Die Subnormallinie $ND = r-x$.

104. §. Aufgabe.

Fig. 11. Für den gegebenen Punct M der Parabel (11. Fig.) die Tangente MT, Subtangente TP, Normallinie MN, und Subnormallinie NP zu finden.

Auflösung. Wenn am Berührungspuncte M die rechtwinklichte Ordinate $MP = y$ stehet, welche der Abscisse $AP = x$ zugehört; so ist nach (95. §.)

$$y^2 = px: \text{ also } dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}},$$

und nun nach (103. §.)

Die Subtangente $TP = \frac{ydx}{dy} = 2x$.

Die Tangente $MT = \frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2+dx^2)} = \sqrt{(px+4x^2)}$.

Die Normallinie $MN = \frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2+dx^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}p^2+px)}$.

Die Subnormallinie $NP = \frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p$.

1. Zusatz.

Die Subtangente TP ist also bey jeder Parabel doppelt so groß, als die Abscisse AP; und die Subnormallinie NP halb so groß als der Parameter p, mithin zweymal so groß, als die Entfernung des Brennpuncts F vom Scheitel A (100. §. 1. Zus.).

2. Zusatz.

Weil TP = 2 AP ist (1. Zus.); so ist TA = AP, nämlich die Entfernung des Durchschnittspuncts T zwischen der Tangente und der Axe der Parabel von ihrem Scheitel A ist allemal der Abscisse AP gleich.

3. Zusatz.

Weil auch FM = AF + AP ist (100. §. 3. Zus.); so muß FT = FM seyn (2. Zus.), mithin sind MTF und FMT gleiche Winkel. Ist also Md zur Axe AX parallel, folglich dMT = FTM; so muß auch dMT = TMF seyn. Die Tangente TM halbirt daher den Winkel dMF, welchen am Berührungspuncte M die zur Axe parallele Md und die vom Brennpuncte F gezogene Linie FM einschließen.

4. Zusatz.

Soll man demnach an einen gegebenen Punct M die Tangente ziehen; so ziehe man FM aus dem Brennpuncte F, und Md zur Axe AX parallel, hernach halbire man den Winkel dMF; oder mache man FT = FM, und ziehe TM, 3. Zus.).

105. §. Aufgabe.

Fig. 15. Für einen gegebenen Punct M der Ellipse (15. Fig.) die Tangente MT, Subtangente TP, Normallinie MN und Subnormallinie NP (90. §.) zu bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung (96. §. 9. Zus.) für die Ellipse erhält man:

$$y = \frac{b}{2a}\sqrt{(a^2 - 4u^2)};\quad dy = \frac{2b\,du}{a\sqrt{(a^2 - 4u^2)}}.$$

Der Verschwindungs-Quotient ist hier mit entgegengesetzten Zeichen genommen worden, wegen (103. §. Zus.), weil $y = MP$ abnimmt, wenn $x = CP$ zunimmt. Und für diese Werthe von y, dy findet man nun nach (103. §.)

$$MT = \frac{(a^2 - 4u^2)}{4u}\sqrt{\left(\frac{4b^2u^2}{a^2(a^2 - 4u^2)} + 1\right)}$$

$$= \frac{y}{2bu}\sqrt{(a^4 - 4u^2(a^2 - b^2))},$$

$$TP = \frac{a^2 - 4u^2}{4u};\quad NP = \frac{ub^2}{a^2}.$$

$$MN = \frac{b}{2a}\sqrt{\left(\frac{4b^2u^2}{a^2} + a^2 - 4u^2\right)}$$

$$= \frac{b}{2a^2}\sqrt{(a^4 - 4u^2(a^2 - b^2))}.$$

1. Zusatz.

Die Entfernung des Durchschnittspuncts T zwischen der Tangente und der Zwergaxe vom Scheitel A ist $AT = TP - AP = TP + u - \frac{1}{2}a$, mithin ist seine Entfernung vom

vom nächsten Brennpuncte $TF = TP + u - \frac{1}{2}a + AF$; folglich vom andern Brennpuncte $Tf = TF + 2CF$: nimmt man also den obigen Werth von TP, und die Werthe von $AF = E$, $2CF = 2c$ nach (101. §. 1. 2. Zus.); so wird man haben:

$$AT = \frac{a^2 - 2au}{4u}; \quad TF = \frac{a^2 - 2u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{4u};$$

$$Tf = \frac{a^2 + 2u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{4u}..$$

2. Zusatz.

Zieht man Fm zu fM parallel; so ist TF:Tf = Fm:fM, oder TF:Fm = Tf:fM; es ist aber Tf in (1. Zus.) zu fM in (101. §. 4. Zus.), wie a zu 2u: also ist auch TF:Fm = a:2u, mithin $Fm = \frac{2u}{a}.TF = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$ (1. Zus.) = FM (101. §. 4. Zus.). Daher ist der Winkel FmM = FMm, mithin auch FMT = fMt. Weil ferner MN die Normallinie ist; so muß NMT = NMt seyn, folglich ist auch FMN = fMN. Das heißt: die Tangente macht bey der Ellipse am Berührungspuncte M mit den von beyden Brennpuncten gezogenen Linien gleiche Winkel TMF, tMf; und die Normallinie MN halbirt den Winkel fMF, welchen die von Brennpuncten gezogenen Linien am Berührungspuncte M einschließen.

3. Zusatz.

Soll man also an einen Punct M die Tangente ziehen; so ziehe man von beyden Brennpuncten F, f, die geraden

Linien FM, fM, halbire den Winkel fMF durch MN, und ziehe Tt an M senkrecht auf NM; oder man ziehe Fm zu fM parallel, mache Fm=FM, und ziehe Tt durch M und m.

4. Zusatz.

Die gerade Linie, welche die Ellipse am Endpuncte D der zugeordneten Axe DE berührte, wäre daher zur Zwergaxe AB parallel: wird aber die Ellipse am Endpuncte A der Zwergaxe von einer geraden Linie berührt; so steht diese auf der Zwergaxe senkrecht.

5. Zusatz.

Durch die Entfernungen Tf, TF der Brennpuncte F, f vom Durchschnittspuncte T zwischen der Tangente und der Zwergaxe nebst der Ordinate MP am Berührungspuncte M und der zugeordneten Axe DE ist die Tangente MT vollkommen bestimmt, nämlich allemal $MT = \frac{2MP}{DE}\sqrt{Tf.TF}$ (1. Zus. und Aufl. der vorig. Aufg.).

106. §. Aufgabe.

Für einen gegebenen Punct M der Hyperbel (16. Fig.) die Tangente MT, Subtangente TP, Normallinie MN, und Subnormallinie NP zu bestimmen.

Fig. 16.

Auflösung. Für MP=y und CP=u ist nach (97. §. 8. Zus.)

$$y = \frac{b}{2a}\sqrt{(4u^2 - a^2)}; \quad dy = \frac{2budu}{a\sqrt{(4u^2 - a^2)}}:$$

also

also ist nach (103. §.)

$$MT=\frac{y}{2bu}\sqrt{(4u^2(b^2+a^2)-a^4)}.\quad PT=\frac{4u^2-a^2}{4u}\,.$$

$$MN=\frac{b}{2a^2}\sqrt{(4u^2(b^2+a^2)-a^4)}.\quad NP=\frac{ub^2}{a^2}\,.$$

1. Zusatz.

Die Entfernungen des Durchschnittspuncts T zwischen der Tangente und der Zwergaxe der Hyperbel vom Scheitelpuncte A und beyden Brennpuncten F, f, sind $TA=TP+\frac{1}{2}a-u$; $TF=TP+\frac{1}{2}a-u+AF$; $Tf=fF-TF$: wenn man also TP nach der vorig. Auflös. und AF, fF nach (102. §. 1. Zus.) nimmt; so wird man finden

$$TA=\frac{2au-a^2}{4u};\quad TF=\frac{2u\sqrt{(a^2+b^2)}-a^2}{4u};$$

$$Tf=\frac{2u\sqrt{(a^2+b^2)}+a^2}{4u}\,.$$

2. Zusatz.

Wäre Fm parallel zu fM; so würde seyn, fT:fM = FT:Fm. Es ist aber fT in (1. Zus.) zu fM in (102. §. 3. Zus.), wie a zu 2u: also ist auch FT:Fm = a:2u, mithin $Fm=\frac{2u}{a}.FT$. Wenn man aber FT mit $\frac{2u}{a}$ in (1. Zus.) multiplicirt; so erhält man FM in (102. §. 3. Zus.): daher ist Fm = FM, folglich der Winkel FmM = FMm, und nun auch FMT = fMT, das heißt: Die Tangente TM schließt am Berührungspuncte M mit den von beyden Brennpuncten F, f gezogenen

geraden Linien FM, fM gleiche Winkel fMT, FMT ein.

3. Zusatz.

Will man demnach an einen gegebenen Punct M der Hyperbel die Tangente ziehen; so ziehe man von ihren Brennpuncten F, f, die geraden Linien FM, fM, und halbire den Winkel fMF: oder man ziehe Fm zu fM parallel, mache Fm = FM, und ziehe die gerade Linie Tt durch M und m.

4. Zusatz.

Die Tangente MT an jedem Punete M der Hyperbel ist durch die Ordinate MP, die zugeordnete Axe ED, und die Entfernungen fT, FT beyder Brennpuncte vom Durchschnittspuncte T zwischen ihr und der Zwergaxe völlig bestimmt: denn es ist allemal $MT = \frac{2MP}{DE}\sqrt{fT.FT}$ (1. Zus. und Auflös. der vor. Aufg.).

Von Durchmessern der Parabel, Ellipse und Hyperbel.

107. §. Erklärung.

Sowohl die Ellipse als die Hyperbel hat einen Mittelpunct, wo alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt werden (96. §. 8. Zus. 97. §. 7. Zus.); dergleichen Sehnen können Hauptsehnen genannt werden, zum Unterschiede von andern Sehnen, welche nicht durch den Mittelpunct gehen. Was aber dazu erfordert wird, wenn eine gerade Linie ein Durchmesser einer krummen Linie seyn soll, und was zusammengehörige Durchmesser heißen, erhellet aus (88. §.).

Wenn

Wenn z. B. bey der Ellipse (17. Fig.) durch den Mittel- Fig. 17.
punct C und durch den mittlern Punct a der Sehne Nn die Hauptsehne cd gezogen wird; so wird cd ein Durchmesser der Ellipse seyn, wofern cd nicht nur Nn, sondern auch alle mögliche zu Nn parallele Sehnen halbirt: und soll alsdann die Hauptsehne ab ein mit cd zusammengehöriger Durchmesser seyn; so muß ab zu denjenigen parallelen Sehnen parallel seyn, welche von cd halbirt werden. Daß die Axen AB, DE zusammengehörige Durchmesser sowohl bey der Ellipse als bey der Hyperbel sind, ist aus (96. §. 6. Zus. 97. 5. Zus.) bekannt; ob es aber ausserdem noch andere zusammengehörige Durchmesser giebt, dieses soll erst entschieden werden: indessen kann man die Axen AB, DE die Hauptdurchmesser nennen, wodurch sie von andern unterschieden werden sollen. Und unter zweenen zusammengehörigen Durchmessern, etwa ab, cd soll derjenige cd, welcher die dem andern ab parallelen Sehnen Nn halbirt, der Zwergdurchmesser, und der andere ab der ihm zugeordnete Durchmesser heissen. Die Winkel aCA, dCA, welche zween zusammengehörige Durchmesser mit der Zwergaxe AB einschliessen, sind ihre Neigungswinkel gegen die Zwergaxe, und der Winkel aCd, welchen zween zusammengehörige Durchmesser einschließen, wird der Conjugationswinkel genannt.

108. §. Aufgabe.

Die Hauptsehne cd der Ellipse oder Hyperbel Fig. 17. 18.
(17. 18. Fig.) wird zur Abscissenlinie genommen und

die Ordinaten Nm sollen zur Tangente dT parallel seyn, welche am Endpuncte d derselben Sehne gezogen werden kann: man soll eine Gleichung zwischen den Coordinaten Cm = v, Nm = z finden.

Auflösung. 1) Die Ordinate Nm mag die Zwergaxe AB unter einem Winkel Cvm = NvA = μ, und die Abscissenlinie cd mag sie unter einem Winkel ACd = α schneiden.

2) Setzt man nun NP auf AB senkrecht, und NP = y, CP = x; so findet man aus den Dreyecken Cvm, vNP die Linien Cv, vm, vP, Nv, wie sie folgen.

$$Nv = \frac{y}{\operatorname{Sin}\mu}; \quad vP = \frac{y \operatorname{Cof}\mu}{\operatorname{Sin}\mu}; \quad vm = \frac{v \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\mu};$$

$$Cv = \frac{v \operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}{\operatorname{Sin}\mu};$$

also ist $Nm = mv + Nv = \frac{v \operatorname{Sin}\alpha + y}{\operatorname{Sin}\mu}$,

oder $z = \frac{v \operatorname{Sin}\alpha + y}{\operatorname{Sin}\mu}$, mithin $y = z \operatorname{Sin}\mu - v \operatorname{Sin}\alpha$.

Ferner ist $CP = Cv + vP = \frac{v \operatorname{Sin}(\alpha+\mu) + y \operatorname{Cof}\mu}{\operatorname{Sin}\mu}$,

daher $x = \frac{v \operatorname{Sin}(\alpha+\mu) + z \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Cof}\mu - v \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cof}\mu}{\operatorname{Sin}\mu}$.

Wenn man aber $\operatorname{Sin}(\alpha+\mu)$ nach (I. B. 156. §. I. Form.) nimmt; so erhält man folgenden Werth für x, wo das obere Zeichen für die Ellipse, und das untere für die Hyperbel gilt,

gilt, indem bey dieser der Winkel Avn $= \mu$ stumpf ist, mithin sein Cosinus verneint seyn muß:

$$x = \frac{v \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Cos}\alpha \pm z \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Cos}\mu}{\operatorname{Sin}\mu} = v \operatorname{Cos}\alpha \pm z \operatorname{Cos}\mu.$$

3) Nun ist $y^2 = \frac{a^2b^2 - 4b^2x^2}{4a^2}$ bey der Ellipse (96. §. 9. Zus.), und $y^2 = \frac{4b^2x^2 - a^2b^2}{4a^2}$ bey der Hyperbel (97. §. 8. Zus.): wenn man also die in (n. 2.) gefundenen Werthe von y, x in diese Gleichungen bringet; so findet man:

Für die Ellipse.

$$(z \operatorname{Sin}\mu - v \operatorname{Sin}\alpha)^2 = \frac{a^2b^2 - 4b^2(v \operatorname{Cos}\alpha \pm z \operatorname{Cos}\mu)^2}{4a^2}.$$

Für die Hyperbel.

$$(z \operatorname{Sin}\mu - v \operatorname{Sin}\alpha)^2 = \frac{4b^2(v \operatorname{Cos}\alpha - z \operatorname{Cos}\mu)^2 - a^2b^2}{4a^2}.$$

4) Wenn man endlich diese Gleichungen reducirt, und auf Null bringet; so ergiebt sich daraus folgende Gleichung, welche beym obern Zeichen für die Ellipse, und beym untern für die Hyperbel gilt.

$$z^2 - z, \frac{2(a^2 \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Sin}\alpha - b^2 \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos}\alpha)v}{a^2 \operatorname{Sin}\mu^2 \pm b^2 \operatorname{Cos}\mu^2}$$

$$+ \frac{4(a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 \pm b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2)v^2 \mp a^2b^2}{4(a^2 \operatorname{Sin}\mu^2 \pm b^2 \operatorname{Cos}\mu^2)} = 0.$$

Offenbar gilt diese Gleichung für jeden Winkel $\mu = Cvm$, mithin auch für jeden Coordinatenwinkel NmC, durch welchen und den Winkel ACd $= \alpha$ der Winkel $\mu = Cvm$

vollkommen bestimmt ist, nämlich allemal $\mu = 180° - (\alpha + NmC)$: da aber die Aufgabe haben will, daß die Ordinate $Nm = z$ zur Tangente Td parallel, mithin der Winkel $Cvm = \mu = CTd$ sey; so müssen wir sehen, ob nicht die gefundene Gleichung bey dieser Voraussetzung eine Aenderung leidet.

5) Dem zufolge sey de auf AB senkrecht; so ist $\frac{de}{Te} = \frac{\text{Sin}\,\mu}{\text{Col}\,\mu}$; $\frac{de}{Ce} = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Col}\,\alpha}$; mithin $\frac{de^2}{Ce.Te} = \frac{\text{Sin}\,\mu\,\text{Sin}\,\alpha}{\text{Col}\,\mu\,\text{Col}\,\alpha}$. Nun ist bey der Ellipse und Hyperbel de die Ordinate, Ce die Abscisse, und Te die Subtangente: also ist

Für die Ellipse nach (96. §. 9. Zus. 105. §. TP.)

$$\frac{de^2}{Ce.Te} = \frac{\frac{b^2}{4a^2}(a^2 - 4Ce^2)}{Ce.\frac{a^2 - 4Ce^2}{4.Ce}} = \frac{b^2}{a^2};$$

Für die Hyperbel nach (97. §. 8. Zus. 106. §. TP.)

$$\frac{de^2}{Ce.Te} = \frac{\frac{b^2}{4a^2}(4Ce^2 - a^2)}{Ce.\frac{4Ce^2 - a^2}{4.Ce}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Also ist für die Ellipse und Hyperbel

$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\text{Sin}\,\mu\,\text{Sin}\,\alpha}{\text{Col}\,\mu\,\text{Col}\,\alpha}$ oder $b^2\,\text{Col}\,\mu\,\text{Col}\,\alpha = a^2\,\text{Sin}\,\mu\,\text{Sin}\,\alpha$.

6) Sobald man also voraussetzt, daß die Ordinaten $z = Nm$ zur Tangente Td parallel seyn sollen, sogleich ist gewiß, daß der Zähler des zweyten Gliedes bey der allgemeinen

meinen Gleichung (n. 4.) gleich Null seyn muß (n. 5.); daß demnach dieselbe Gleichung in folgende übergeht:

$$z^2 + \frac{4(a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 \pm b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2)v^2 \mp a^2b^2}{4(a^2 \operatorname{Sin}\mu^2 \pm b^2 \operatorname{Cos}\mu^2)} = 0.$$

1. Zusatz.

Was ausser z^2 da ist, heiße $-\psi$; so ist $z^2 - \psi = 0$ eine Gleichung zwischen den Abscissen $v = Cm$, und den zur Tangente Td parallelen Ordinaten $z = Nm$: da also z in ψ nicht vorkömmt; so giebt dieselbe Gleichung für jede Abscisse $v = Cm$ zwo gleich grosse entgegengesetzte Ordinaten $z = \pm\sqrt{\psi}$, nämlich $Nm = +\sqrt{\psi}$ und $mn = -\sqrt{\psi}$ (92. §. 5. Zus.). Die Hauptsehne cd der Ellipse und Hyperbel halbirt also alle Sehnen Nn, welche zur Tangente Td, die an ihren Endpunct d gezogen werden kann, parallel sind, und so ist cd ein Durchmesser der Ellipse und Hyperbel (88. §.).

2. Zusatz.

Da es nun gar keinen Punct an der Ellipse oder Hyperbel geben kann, an den sich eine Tangente nicht ziehen liesse (105. §. 3. Zus. 106. §. 3. Zus.), und es für jeden Berührungspunct d eine Hauptsehne cd giebt; so ist offenbar, daß jede Hauptsehne cd der Ellipse und Hyperbel ein Durchmesser derselben ist (1. Zus.).

109. §. Aufgabe.

Für gegebene Axen oder Hauptdurchmesser a, b der Ellipse oder Hyperbel, nebst dem Neigungs-

winkel $\alpha = ACd$ des Zwergdurchmessers cd (108. §. 2. Zus.), den Neigungswinkel des ihm zugeordneten Durchmessers und dadurch den Conjugationswinkel (107. §.) zu bestimmen.

Auflösung. Die dem Zwergdurchmesser cd zugeordneten Sehnen sind zur Tangente Td parallel, mithin muß auch der ihm zugeordnete Durchmesser ab zu Td parallel seyn (107. §.): der Neigungswinkel des zugeordneten Durchmessers ab ist also $aCT = Cvm = \mu$, und der Conjugationswinkel $aCd = \mu + \alpha$ (daselbst). Nun ist nach (108. §. n. 5.), $b^2 \operatorname{Cof}\mu \operatorname{Cof}\alpha = a^2 \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Sin}\alpha$: also ist

$$\frac{\operatorname{Sin}\mu}{\operatorname{Cof}\mu} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{Cof}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} \quad \text{oder} \quad \operatorname{Tang}\mu = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{Cot}\alpha.$$

Durch a, b, α findet man demnach den Neigungswinkel $\mu = aCA$, und dadurch den Conjugationswinkel $aCd = \mu + \alpha$.

Zusatz.

Will man den verlangten Winkel μ durch seinen Sinus, oder Cosinus bestimmen; so findet man beyde aus $\operatorname{Tang}\mu = \frac{b^2 \operatorname{Cof}\alpha}{a^2 \operatorname{Sin}\alpha}$ nach (I. B. 154. §. III. 13. 14.), nämlich

$$\operatorname{Sin}\mu = \frac{b^2 \operatorname{Cof}\alpha}{\sqrt{(a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^4 \operatorname{Cof}\alpha^2}}.$$

$$\operatorname{Cof}\mu = \frac{a^2 \operatorname{Sin}\alpha}{\sqrt{(a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^4 \operatorname{Cof}\alpha^2)}}.$$

110. §. Aufgabe.

Für gegebene Hauptdurchmesser $a = AB$, $b = DE$ der Ellipse oder Hyperbel (17. 18. Fig.) nebst den Neigungswinkeln $\alpha = ACd$, $\mu = aCA$ zweener zusammengehörigen Durchmesser $n = cd$, $m = ab$, die zusammengehörigen Durchmesser selbst zu bestimmen. Fig. 17. 18.

Auflösung. 1) Die Gleichung für die Ellipse zwischen den Abscissen $v = Cm$ und Ordinaten $z = Nm$ ist nach (108. §. n. 6.)

$$z^2 = \frac{a^2 b^2}{4(a^2 \mathrm{Sin}\mu^2 + b^2 \mathrm{Col}\mu^2)} - \frac{(a^2 \mathrm{Sin}\alpha^2 + b^2 \mathrm{Col}\alpha^2)v^2}{a^2 \mathrm{Sin}\mu^2 + b^2 \mathrm{Col}\mu^2}.$$

2) Und die Gleichung für die Hyperbel zwischen solchen Coordinaten ist ebenfalls nach (108. §. n. 6.)

$$z^2 = \frac{(b^2 \mathrm{Col}\alpha^2 - a^2 \mathrm{Sin}\alpha^2)v^2}{a^2 \mathrm{Sin}\mu^2 - b^2 \mathrm{Col}\mu^2} - \frac{a^2 b^2}{4(a^2 \mathrm{Sin}\mu^2 - b^2 \mathrm{Col}\mu^2)}.$$

3) Nun aber ist klar genug, daß es bey der Ellipse (17. Fig.) wirklich zween zusammengehörige Durchmesser $n = cd$, $m = ab$ giebt, deren jeder eine Hauptsehne der Ellipse ist: den ersten $\frac{n}{2} = \frac{cd}{2}$ erreicht die Abscisse $v = Cm$, wenn die Ordinate $z = Nm = o$ wird; und den zweyten $\frac{m}{2} = \frac{ab}{2}$ erlangt die Ordinate $z = Nm$, wenn die Abscisse $v = Cm = o$ wird: man setze also $z = o$ in (n. 1.), und $v = \frac{n}{2}$; so wird man n finden, wie folgt: ferner setze man $v = o$ und $z = \frac{1}{2}m$ in (n. 1.); so erhält man m, wie folgt:

$$n = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \mathrm{Sin}\alpha^2 + b^2 \mathrm{Col}\alpha^2)}}. \quad m = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \mathrm{Sin}\mu^2 + b^2 \mathrm{Col}\mu^2)}}.$$

4) Was

4) Was nun die Hyperbel betrifft, auch bey ihr findet ein Zwergdurchmesser, als eine Hauptsehne von ihr, Statt, wie $n = cd$ (108. §. 1. 2. Zus.), und die Hälfte davon $\frac{1}{2}n = Cd$ erreicht gewiß die Abscisse $v = Cm$, sobald die Ordinate $z = Nm = o$ wird; mithin setze man $v = \frac{1}{2}n$ und $z = o$ in (n. 2.), wofür die dortige Gleichung folgenden Werth für den Zwergdurchmesser $n = cd$ als eine wahre Hauptsehne der Hyperbel geben wird. Was aber den zugeordneten Durchmesser anbelangt, dieser sollte, wie ab, durch den Mittelpunct C zu den Ordinaten Nm und zur Tangente Td parallel laufen: also kann er die Hyperbel in gar keinem Puncte treffen, mithin auch keine Hauptsehne der Hyperbel seyn (107. §.): indessen soll er eine gerade Linie $m = ab$ von bestimmter Länge seyn, wie die zugeordnete Axe $DE = b$, und die Hälfte dieser Länge sollte die Ordinate $z = Nm$ erlangen, wenn die Abscisse $v = Cm = o$ würde: also sey $v = o$ und $z = \frac{1}{2}m$ in (n. 2.); so findet man

$$m = \frac{ab\sqrt{-1}}{\sqrt{(a^2 \operatorname{Sin}\mu^2 - b^2 \operatorname{Cof}\mu^2)}},$$

nämlich $z = \frac{1}{2}m$ als eine Ordinate ist unmöglich, weil an C keine Ordinate stehen kann, welche zur Tangente Td parallel wäre; aber $z = \frac{1}{2}m = aC$ als eine gerade Linie von bestimmter Länge, welche nebst $n = cd$ zur Bestimmung jeder andern Ordinate $z = Nm$ nach (n. 2.) dient, ist

$$= \frac{ab}{2\sqrt{(a^2 \operatorname{Sin}\mu^2 - b^2 \operatorname{Cof}\mu^2)}},$$

und

und so kann man folgenden Werth m für die Länge des zugeordneten Durchmessers ab der Hyperbel annehmen. Ein gleiches geschieht bey der Gleichung (97. §. 8. Zus.) zwischen rechtwinklichten Coordinaten u=CP, y=NP: setzt man bey jener Gleichung u=0; so erhält man $y=\frac{1}{2}b\sqrt{-1}$, welches bedeutet, daß die halbe Zwergaxe $\frac{1}{2}b=DC$, obgleich dieselbe eine bestimmte Länge hat, kein Ordinate ist (92. §. 3. Zus.).

$$n=\frac{ab}{\sqrt{(b^2\mathrm{Cos}\alpha^2-a^2\mathrm{Sin}\alpha^2)}}\cdot m=\frac{ab}{\sqrt{(a^2\mathrm{Sin}\mu^2-b^2\mathrm{Cos}\mu^2)}}.$$

5) Und hieraus erhellt, daß es bey der Hyperbel allemal zween zusammengehörige Durchmesser n=cd, m=ab giebt, deren bestimmte Längen zur Bestimmung jeder Ordinate z=Nm, die einer gegebenen Abscisse v=Cm zugehören mag, dienen (n. 2.), wenn nur für den Neigungswinkel $\alpha=ACd$ des Zwergdurchmessers n=cd, $b^2\mathrm{Cos}\alpha^2 > a^2\mathrm{Sin}\alpha^2$ ist. Denn dafür hat n eine mögliche Länge, und weil alsdann auch $\frac{b^2\mathrm{Cos}\alpha^2}{a^2\mathrm{Sin}\alpha^2} > 1$ seyn muß; so ist auch $\frac{a^2\mathrm{Sin}\mu^2}{b^2\mathrm{Cos}\mu^2} > 1$ (109. §.), mithin auch $a^2\mathrm{Sin}\mu^2 > b^2\mathrm{Cos}\mu^2$, folglich auch m eine mögliche Länge.

6) Aus diesen Formuln (n. 3. 4.) lassen sich mit Zuziehung der Tangente von μ (109. §) andere herleiten, die man aber sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel auch so findet. Es ist nämlich im Dreyecke CdT (17. 18. Fig.)

Cd

Cd oder $\frac{1}{2}n = \frac{CT.\text{Sin}\,CTd}{\text{Sin}\,CdT} = \frac{CT.\text{Sin}\,\mu}{\text{Sin}\,(180^\circ-(\alpha+\mu))} =$

$= \frac{CT.\text{Sin}\,\mu}{\text{Sin}\,(\alpha+\mu)}$. Wenn aber de auf CT senkrecht steht; so ist bey der Ellipse $CT = Ce + eT = Ce + \frac{a^2-4Ce^2}{4Ce}$ (105. §. PT) $= \frac{a^2}{4Ce} = \frac{a^2}{4Cd.\text{Cos}\,\alpha} = \frac{a^2}{2n\,\text{Cos}\,\alpha}$; und bey der Hyperbel ist $CT = Ce - Te = Ce - \frac{(4Ce^2 - a^2)}{4Ce}$ (106. §. PT) $= \frac{a^2}{4Ce} = \frac{a^2}{4Cd.\text{Cos}\,\alpha} = \frac{a^2}{2n\,\text{Cos}\,\alpha}$: also ist für beyde $\frac{1}{2}n = \frac{a^2\,\text{Sin}\,\mu}{2n\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,(\alpha+\mu)}$, woraus man $n = cd$ findet, sodann $m = ab$ durch Verwechslung der Winkel α, μ, nämlich:

$$n = a\sqrt{\frac{\text{Sin}\,\mu}{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,(\alpha+\mu)}}. \quad m = a\sqrt{\frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\mu\,\text{Sin}\,(\alpha+\mu)}}.$$

Ferner ist $\text{Sin}\,\mu = \frac{b^2\text{Cos}\,\alpha\text{Cos}\,\mu}{a^2\,\text{Sin}\,\alpha}$; $\text{Sin}\,\alpha = \frac{b^2\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\mu}{a^2\,\text{Sin}\,\mu}$ (109. §.):

also ist auch

$$n = b\sqrt{\frac{\text{Cos}\,\mu}{\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,(\alpha+\mu)}}. \quad m = b\sqrt{\frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\mu\,\text{Sin}\,(\alpha+\mu)}}.$$

1. Zusatz.

Man kann also die zusammengehörigen Durchmesser $m = ab$, $n = cd$ der Ellipse oder Hyperbel vollkommen bestim-

bestimmen, wenn entweder ihre Neigungswinkel $\alpha = ACd$, $\mu = aCA$ nebst beyden Hauptdurchmessern a und b, oder nebst nur einem Hauptdurchmesser a oder b gegeben werden (n. 3. 4. 6.).

2. Zusatz.

Aus (n. 6.) erhält man $m^2n^2 = \frac{a^4 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\mu}{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}(\alpha+\mu)^2}$

$= \frac{a^2b^2}{\operatorname{Sin}(\alpha+\mu)^2}$ (109. §.): also ist $mn = \frac{ab}{\operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}$, und $ab = mn \operatorname{Sin}(\alpha+\mu)$, das heißt: wenn man bey der Ellipse oder Hyperbel das Product aus beyden Hauptdurchmessern durch den Sinus des Conjugationswinkels (107. §.) dividirt, so giebt der Quotient das Product aus zweenen zusammengehörigen Durchmessern, welchen derselbe Conjugationswinkel zugehört; und wenn man das Product aus zweenen zusammengehörigen Durchmessern mit dem Sinus ihres Conjugationswinkels multiplicirt; so erhält man das Product aus den beyden Hauptdurchmessern.

3. Zusatz.

Nimmt man $\operatorname{Sin}\mu^2$, $\operatorname{Cos}\mu^2$ aus (109. §. Zus.) in (n. 3. 4. der vor. Aufg.); so findet man

Für die Ellipse.

$$m^2 = \frac{a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^4 \operatorname{Cos}\alpha^2}{b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 + a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2}; \quad n^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 + a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2};$$

$$\text{also } m^2+n^2 = \frac{a^4\operatorname{Sin}\alpha^2+b^4\operatorname{Cos}\alpha^2+a^2b^2}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2+a^2\operatorname{Sin}\alpha^2}$$

$$= \frac{a^4\operatorname{Sin}\alpha^2+b^4\operatorname{Cos}\alpha^2+a^2b^2(\operatorname{Sin}\alpha^2+\operatorname{Cos}\alpha^2)}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2+a^2\operatorname{Sin}\alpha^2}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(b^2\operatorname{Cos}\alpha^2+a^2\operatorname{Sin}\alpha^2)}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2+a^2\operatorname{Sin}\alpha^2},$$

daher $m^2+n^2 = a^2+b^2$.

Für die Hyperbel.

$$m^2 = \frac{a^4\operatorname{Sin}\alpha^2+b^4\operatorname{Cos}\alpha^2}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2-a^2\operatorname{Sin}\alpha^2};\quad n^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2-a^2\operatorname{Sin}\alpha^2};$$

$$\text{also } n^2-m^2 = \frac{a^2b^2-a^4\operatorname{Sin}\alpha^2-b^4\operatorname{Cos}\alpha^2}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2-a^2\operatorname{Sin}\alpha^2}$$

$$= \frac{a^2b^2(\operatorname{Sin}\alpha^2+\operatorname{Cos}\alpha^2)-a^4\operatorname{Sin}\alpha^2-b^4\operatorname{Cos}\alpha^2}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2-a^2\operatorname{Sin}\alpha^2}$$

$$= \frac{-(b^2-a^2)(b^2\operatorname{Cos}\alpha^2-a^2\operatorname{Sin}\alpha^2)}{b^2\operatorname{Cos}\alpha^2-a^2\operatorname{Sin}\alpha^2},$$

mithin $n^2-m^2 = a^2-b^2$.

Das heißt: Die Summe der Quadrate zweener zusammengehörigen Durchmesser der Ellipse ist allemal so groß, als die Summe der Quadrate ihrer Hauptdurchmesser; und die Differenz der Quadrate zweener zusammengehörigen Durchmesser der Hyperbel ist allemal so groß, als die Differenz der Quadrate ihrer Hauptdurchmesser.

4. Zusatz.

Wegen $mn\operatorname{Sin}(\alpha+\mu) = ab$ bey der Ellipse und Hyperbel (2. Zus.), und $n^2+m^2 = a^2+b^2$ bey der Ellipse,

hingegen

hingegen $n^2 - m^2 = a^2 - b^2$ bey der Hyperbel (3. Zuf.) ist einleuchtend, daß, wenn beyde Hauptdurchmesser a, b nebst dem Conjugationswinkel $= \alpha + \mu$, oder zween zusammengehörige Durchmesser n, m nebst ihrem Conjugationswinkel $= \alpha + \mu$ gegeben werden, man im ersten Fall beyde zusammengehörigen Durchmesser, und im zweyten Fall beyde Hauptdurchmesser finden kann, gewiß nach (I. B. 88. §.), nämlich:

Bey der Ellipse für gegebene a, b, und $\alpha + \mu = \beta$.

$$n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2+\frac{2ab}{\sin\beta}\right)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2-\frac{2ab}{\sin\beta}\right)}$$

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2+\frac{2ab}{\sin\beta}\right)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2-\frac{2ab}{\sin\beta}\right)}$$

Und für gegebene m, n, nebst $\alpha + \mu = \beta$

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2+2mn\sin\beta)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2-2mn\sin\beta)};$$

$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2+2mn\sin\beta)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2-2mn\sin\beta)}.$$

Bey der Hyperbel für gegebene a, b, und $\alpha + \mu = \beta$

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2-a^2+\sqrt{\left(\frac{4a^2b^2}{\sin\beta^2}+(a^2-b^2)^2\right)}\right)}.$$

$$n = \frac{ab}{\sin\beta\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2-a^2+\sqrt{\left(\frac{4a^2b^2}{\sin\beta^2}+(a^2-b^2)^2\right)}\right)}}.$$

Und für gegebene n, m, nebst $\alpha + \mu = \beta$.

$$b = \sqrt{\tfrac{1}{2}(m^2-n^2+\sqrt{(4m^2n^2\sin\beta^2+(n^2-m^2)^2)})}$$

$$a = \frac{mn\sin\beta}{\sqrt{\tfrac{1}{2}(m^2-n^2+\sqrt{(4m^2n^2\sin\beta^2+(n^2-m^2)^2)})}}.$$

5. Zusatz.

Aus den bisherigen Formuln lassen sich andere, vorzüglich bey der Ellipse, brauchbare Formuln herleiten, nämlich folgende 1) 2) 3) 4) unmittelbar aus (n. 6. der vor. Aufg.). Denn es war daselbst $m^2 = \frac{a^2 \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cof}\mu \operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}$: also ist

$$a^2 - m^2 = \frac{a^2(\operatorname{Cof}\mu \operatorname{Sin}(\alpha+\mu) - \operatorname{Sin}\alpha)}{\operatorname{Cof}\mu \operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}$$

$$= \frac{a^2(\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cof}\mu^2 + \operatorname{Cof}\mu \operatorname{Cof}\alpha \operatorname{Sin}\mu - \operatorname{Sin}\alpha)}{\operatorname{Cof}\mu \operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}$$

(I. B. 156. §. I. Form.)

$$= \frac{a^2(-\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\mu^2 + \operatorname{Cof}\mu \operatorname{Cof}\alpha \operatorname{Sin}\mu)}{\operatorname{Cof}\mu \operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}$$

(I. B. 154. §. IV. n. 1.)

$$= \frac{a^2 \operatorname{Sin}\mu}{\operatorname{Cof}\mu} \cdot \frac{\operatorname{Cof}\mu \operatorname{Cof}\alpha - \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}$$

$$= \frac{a^2 \operatorname{Sin}\mu}{\operatorname{Cof}\mu} \cdot \frac{\operatorname{Cof}(\alpha+\mu)}{\operatorname{Sin}(\alpha+\mu)}$$

(I. B. 156. §. II. Form.).

Und dieses giebt folgende Formul 1). Auf gleiche Art folgen aber die übrigen Formuln 2) 3) 4) aus den übrigen Werthen von m, n in (n. 6. der vor. Aufg.); übrigens ist aus dem vorhergehenden bekannt, daß $\alpha+\mu$ den Conjugationswinkel der zusammengehörigen Durchmesser m, n bedeutet. Ferner findet man aus den Formuln 1) 2) die Formul 5); und 6) aus 3) 4); sodann 7) 8) durch die Multiplication der Gleichungen 1) 2) und 3) 4).

1) $\text{Tang}\,\mu = \frac{(a^2-m^2)\,\text{Tang}(\alpha+\mu)}{a^2}$.

2) $\text{Tang}\,\mu = \frac{b^2}{(m^2-b^2)\,\text{Tang}(\alpha+\mu)}$.

3) $\text{Tang}\,\alpha = \frac{(a^2-n^2)\,\text{Tang}(\alpha+\mu)}{a^2}$.

4) $\text{Tang}\,\alpha = \frac{b^2}{(n^2-b^2)\,\text{Tang}(\alpha+\mu)}$.

5) $\text{Tang}(\alpha+\mu)^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2-m^2)(m^2-b^2)}$

$= \frac{a^2b^2}{(a+m)(m+b)(a-m)(m-b)}$.

6) $\text{Tang}(\alpha+\mu)^2 = \frac{a^2b^2}{(n^2-b^2)(a^2-n^2)}$

$= \frac{a^2b^2}{(n+b)(a+n)(n-b)(a-n)}$.

7) $\text{Tang}\,\mu^2 = \frac{b^2(a^2-m^2)}{a^2(m^2-b^2)} = \frac{b^2(a+m)(a-m)}{a^2(m+b)(m-b)}$.

8) $\text{Tang}\,\alpha^2 = \frac{b^2(a^2-n^2)}{a^2(n^2-b^2)} = \frac{b^2(a+n)(a-n)}{a^2(n+b)(n-b)}$.

6. Zusatz.

Weil die Tangente des Conjugationswinkels von beyden Hauptdurchmessern a, b als unveränderlichen Grössen, und von einem der zusammengehörigen Durchmesser m, n als von einer veränderlichen Grösse abhängt (5. Zus.); so nehme man aus (5. Zus. 5. Form.)

d. $\text{Tang}(\alpha+\mu)^2 = \frac{2\,ma^2b^2((m^2-b^2)-(a^2-m^2))dm}{((a^2-m^2)(m^2-b^2))^2}$.

Setzt man nun $d.\mathrm{Tang}(\alpha+\mu)^2=0$; so findet man $m^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, und wenn man dieses bey $\frac{d^2.\mathrm{Tang}(\alpha+\mu)^2}{dm^2}$ braucht; so erlangt dieser Quotient dafür einen bejahten Werth: also ist für $m^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ die Tangente des Conjugationswinkels, mithin auch der Conjugationswinkel $\alpha+\mu$ am kleinsten (74. §.). Nun aber ist allemal $m^2+n^2=a^2+b^2$ bey der Ellipse (3. Zus.), welches $m=n$ für jenen Werth von m^2 giebt: der Conjugationswinkel $\alpha+\mu$ zweener zusammengehörigen Durchmesser der Ellipse ist also alsdann am kleinsten, wenn dieselben Durchmesser einander gleich sind, $m=n$, und alsdann sind auch ihre Neigungswinkel μ, α einander gleich (5. Zus. 7. 8. Form.), daher $\mathrm{Tang}\mu=\mathrm{Tang}\alpha=\frac{b}{a}$ (109. §.).

7. Zusatz.

Zwischen den Scheitelpuncten A, E der Hauptdurchmesser der Ellipse sey die Sehne AE gezogen; so ist $\mathrm{Tang\,CAE}=\frac{CE}{AC}=\frac{b}{a}$: im Fall des kleinsten Conjugationswinkels aCd ist also $\mathrm{Tang\,CAE}=\mathrm{Tang}\mu=\mathrm{Tang\,aCA}$ (6. Zus.), mithin ist die Sehne AE zwischen den Scheitelpuncten der Hauptdurchmesser BA, DE parallel zu ab, folglich dem Zwergdurchmesser cd zugeordnet (107. §.).

8. Zusatz.

Was aber die Hyperbel betrifft, weil bey ihr $n^2-m^2=a^2-b^2$ allemal seyn muß (3. Zus.); so können bey ihr zween zusammengehörige Durchmesser n, m nicht einander gleich

gleich seyn, wenn nicht die Hauptdurchmesser a, b gleich sind, welches nur bey der gleichseitigen Hyperbel Statt findet (98. §. 6. Zus.).

9. Zusatz.

Wenn man bey der Auflösung der vorigen Aufgabe m^2 und n^2 aus (n. 3. 4.) in die dortigen Gleichungen (n. 1. 2.) bringet; so erhält man:

Für die Ellipse.	Für die Hyperbel.
1) $z^2 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{m^2}{n^2}v^2$.	2) $z^2 = \frac{m^2}{n^2}v^2 - \frac{1}{4}m^2$.

Da aber $v = Cm$ die vom Mittelpuncte C gerechnete Abscisse bedeutet; so setze man $dm = t$, mithin $v = Cd \pm t = \frac{1}{2}n \pm t$, (das obere Zeichen für die Hyperbel und das untere für die Ellipse), wofür man aus 1) 2) folgende Gleichungen für die vom Scheitelpuncte d eines Zwergdurchmessers $n = cd$ gerechneten Abscissen $t = dm$ erhält.

Für die Ellipse.	Für die Hyperbel.
3) $z^2 = \frac{m^2}{n}t - \frac{m^2}{n^2}t^2$.	4) $z^2 = \frac{m^2}{n}t + \frac{m^2}{n^2}t^2$.

Man kann diese Gleichungen als allgemeine Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel betrachten, dergestalt, daß n, m zween zusammengehörige Durchmesser cd, ab überhaupt bedeuten, auf derer einem $n = cd$ die Abscissen $v = Cm$ vom Mittelpuncte oder $t = dm$ vom Scheitelpuncte d gerechnet, und die Ordinaten $z = Nm$ zu dem andern Durchmesser $m = ab$ parallel gezogen werden: darinn stecken die

schon bekannten Gleichungen (96. §. und 9. Zus. 97. §. und 8. Zus.), nämlich für $\alpha = ACd = 0$ und $\mu = aCA = 90°$, wofür $m = b$, $n = a$ wird (vor. Aufg. n. 3. 4.).

10. Zusatz.

Nennt man $P = \frac{m^2}{n}$ den Parameter des Zwergdurchmessers $n = cd$, wie $p = \frac{b^2}{a}$ der Zwergaxe $a = AB$ ihrer war (99. §); so ist $m^2 = nP$, und dafür erhält man aus (9. Zus.) folgende Gleichungen, welche die schon bekannten (99. §. Zus.) für $\alpha = 0$, $\mu = 90°$ enthalten.

Für die Ellipse.	Für die Hyperbel.
1) $z^2 = \frac{1}{4}nP - \frac{Pv^2}{n}$	2) $z^2 = \frac{Pv^2}{n} - \frac{1}{4}nP$.
3) $z^2 = Pt - \frac{Pt^2}{n}$	4) $z^2 = Pt + \frac{Pt^2}{n}$.

11. Zusatz.

Setzt man nun eine Abscisse $v = Cq$, und die Ordinate $z = rq = \frac{1}{2}P$; so findet man aus (10. Zus. 1. 2. Form.):

Für die Ellipse. $\frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}nP - \frac{P}{n}.v^2$,

mithin $v = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(n^2 - nP)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(n^2 - m^2)}$.

Für die Hyperbel. $\frac{1}{4}P^2 = \frac{Pv}{n} - \frac{1}{4}nP$,

mithin $v = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(n^2 + nP)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(n^2 + m^2)}$.

Wenn also der Punct q auf einem Zwergdurchmesser $n = cd$ der Ellipse oder Hyperbel, wo die Ordinate rq dem halben

halben Parameter $\frac{1}{2}$P (10. Zuſ.) gleich iſt, der Brennpunct deſſelben Durchmeſſers genannt wird (100. §.); ſo iſt offenbar, daß es auf jedem Zwergdurchmeſſer cd der Hyperbel und Ellipſe zween Brennpuncte q, q′ in gleichen entgegengeſetzten Entfernungen vom Mittelpuncte C giebt, wenn nur bey der Ellipſe n > m, oder der Zwergdurchmeſſer cd gröſſer als der ihm zugeordnete ab iſt.

12. Zuſatz.

Man findet ferner aus (10. Zuſ. 1. 3. Form.) bey der Ellipſe $Nm^2 = \frac{P}{n}(\frac{1}{4}n^2 - Cm^2) = \frac{P}{n}.cm.md$, und eben ſo $rq^2 = \frac{P}{n}.cq.qd$; bey der Hyperbel $Nm^2 = \frac{P}{n}(Cm^2 - \frac{1}{4}n^2) = \frac{P}{n}.cm.md$, und eben ſo $rq^2 = \frac{P}{n}.cq.qd$; alſo iſt bey beyden $Nm^2 : rq^2 = cm.md : cq.qd$, das heißt: Die Quadrate zwoer Ordinaten Nm, rq auf jedem Durchmeſſer n = cd der Ellipſe oder Hyperbel verhalten ſich gegen einander, wie die Producte aus den ihnen zugehörigen Segmenten deſſelben Durchmeſſers.

111. §. Aufgabe.

Die gerade Linie Tt berührt die Parabel in M (19. Fig.), und die vom Berührungspuncte M zur Axe AQ parallel gezogene Linie Mr wird für die Abſciſſenlinie genommen; man ſoll eine Gleichung zwiſchen den Abſciſſen Mm = v, und den zur Tangente TM parallelen Ordinaten mN = z finden. Fig. 19.

Auflösung. Nm verlängert trifft die Axe irgendwo in a: überdem seyen MP, mq, NQ auf die Axe senkrecht, und AP = x. Nun ist:

mp = z Cos Nmp = z Cos T;

TA = AP = x (104. §. 1. Zus.); Aa = AT − Mm = x − v.

AQ = AP + Mm + mp = x + v + z Cos T.

$NQ^2 = p.AQ$ (95. §.) = p (x + v + z Cos T).

aQ = AQ + Aa = 2x + z Cos T.

Aber NQ : aQ = MP : TP:

also $NQ^2 : aQ^2 = MP^2 : TP^2 = px : 4x^2$ (104. §.).

Daher $p(x+v+z\,Cos\,T) : (2x+z\,Cos\,T)^2 = px : 4x^2$

und nun $4x(x+v+z\,Cos\,T) = 4x^2 + 4xz\,Cos\,T + z^2\,Cos\,T^2$

welches giebt $z^2 = \frac{4x}{Cos\,T^2} \cdot v.$

Da aber TP : MT = Cos T : 1, mithin $Cos\,T^2 = \frac{TP^2}{MT^2}$

$= \frac{4x^2}{4x^2+px} = \frac{4x}{4x+p}$ (104. §.) ist; so kann man setzen $z^2 = (4x + p)v$.

1. Zusatz.

Weil $z = \pm\sqrt{(4x+p)v}$ ist; so müssen jeder Abscisse v = Mm zwo gleich grosse entgegengesetzte Ordinaten Nm, nm zugehören (92. §. 5. Zus.), mithin wird jede zur Tangente TM parallele Sehne Nn der Parabel von der geraden Linie Mr, die durch den Berührungspunct M zur Axe AQ parallel läuft, in m halbirt, und so ist eine solche Linie Mr allemal ein Durchmesser der Parabel (88. §.).

2. Zusatz.

Da es also keinen Punct M bey der Parabel giebt, woran eine Tangente Tt sich nicht ziehen liesse (104. §. 4. Zus.); so ist offenbar, daß jede gerade Linie Mr, welche von irgend einem Puncte M der Parabel zu ihrer Axe parallel gezogen wird, ein Durchmesser der Parabel ist, und die ihm zugeordneten Sehnen sind die, welche zur Tangente an M parallel sind (107. §.).

Von der Rectification der Parabel, Ellipse und Hyperbel.

112. §. Aufgabe.

Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten CD = x, MD = y einer krummen Linie OS (2. Fig.) ist gegeben; man soll die Länge des Bogens AM = φ bestimmen, welcher zwischen der am Anfangspuncte C der Abscissen stehenden Ordinate CA und einer unbestimmten Ordinate MD liegt. Fig. 2.

Auflösung. Der Bogen AM = φ soll durch eine Function von CD = x oder MD = y ausgedrückt werden, daß der ihr zugehörige Verschwindungs-Quotient, wegen (21. §.) $d\varphi = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ ist.

Da also die Gleichung zwischen y und x bekannt seyn soll; so kann man dy durch x und dx, oder dx durch y und dy ausdrücken, wofür die Formul für dφ in eine andere übergehen muß, welche entweder nur y nebst dy, oder nur x nebst dx enthält, da dann alles darauf ankommen wird,

den Ausdruck für $d\varphi$ zu integriren, um den verlangten Bogen φ zu bestimmen.

1. Zusatz.

Verlangt man den Bogen $\varphi = AM$ einer Parabel (11. Fig.); so dient dazu die Gleichung $y^2 = px$ (95. §.) für $x = AP$, $y = MP$. Denn es wird seyn:

Fig. 11.

$$2ydy = pdx; \quad dx = \frac{2ydy}{p}; \quad dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}:$$

$$\text{also } d\varphi = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{p^2}\right)};$$

$$\text{oder } d\varphi = \frac{dy}{p}\sqrt{(p^2 + 4y^2)}, \text{ mithin}$$

$$\varphi = AM = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{(p^2 + 4y^2)}.$$

Das Integral findet man nun nach (39. §. VII. Form.)

$$AM = \frac{y}{2p}\sqrt{(p^2 + 4y^2)} + \tfrac{1}{4}p\log(2y + \sqrt{(p^2 + 4y^2)}) + C.$$

Da nun $AM = o$ für $y = o$ wird; so ist nach (§. 28.) $\frac{1}{4}p\log p + C = o$, und nun $C = -\frac{1}{4}p\log p$:

$$\text{also } AM = \frac{y}{2p}\sqrt{(p^2 + 4y^2)} + \tfrac{1}{4}p\log\frac{2y + \sqrt{(p^2 + 4y^2)}}{p}.$$

Sonst kann man denselben Bogen auch durch die Abscisse x ausdrücken: denn es war

$$y = \sqrt{px}: \text{ also ist } dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}, \text{ mithin}$$

$$d\varphi = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \sqrt{\left(\frac{p^2dx^2}{4px} + dx^2\right)} = \frac{dx\sqrt{(\frac{1}{4}p + x)}}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Demnach

Demnach ist nach (41. §. 3. Zus. n. 1.)

$\varphi = AM = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p \log(x + \frac{1}{8}p + \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}) + C.$

Wegen $AM = o$ für $x = o$ ist nun nach (28. §.)

$\frac{1}{8}p \log \frac{1}{8}p + C = o$, mithin $C = -\frac{1}{8}p \log \frac{1}{8}p$:

also $AM = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p \log \frac{8x + p + 8\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}}{p}$.

2. Zusatz.

Auf diese Art läßt sich jeder parabolische Bogen AM für jede gegebene Ordinate $y = MP$ oder Abscisse $AP = x$ durch natürliche Logarithmen bestimmen. Will man den Bogen AQ haben, dessen Ordinate QF durch den Brennpunct F geht; so setze man $y = \frac{1}{2}p$, oder $x = \frac{1}{4}p$ in (1. Zus.) nach (100. §. 1. Zus.), und dann wird seyn

$AQ = \frac{1}{4}p(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$

und $2AQ = QAq = \frac{1}{2}p(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$.

3. Zusatz.

Unabhängig von Logarithmen läßt sich der parabolische Bogen AM durch eine Reihe der Potenzen von y bestimmen. Denn es war $dAM = \frac{1}{p}dy\sqrt{(p^2 + 4y^2)}$: also findet man $AM = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{(p^2 + 4y^2)}$ nach (26. §. 4. Zus. I. II.), für das dortige $\beta = p^2$, $\gamma = 4$, $m = o$, $n = 2$, nämlich

$$AM = y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8} + \text{.....}$$

113. §. Aufgabe.

Das Integral $\int \frac{dx\sqrt{(a+bx^2)}}{\sqrt{(c+ex^2)}}$ durch eine Reihe der Potenzen von x auszudrücken.

Auflösung. Einleuchtend ist es, daß hier alles darauf ankömmt den mit dx multiplicirten gebrochenen Factor in eine Reihe aufzulösen, um sodann das Integral selbst nach (26. §. 4. Zus.) bestimmen zu können: dem zufolge setze man

1) $\frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{\sqrt{(c+ex^2)}} = A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+\text{---}+Nx^{2r-6}$
$+Px^{2r-4}+Qx^{2r-2}+Rx^{2r}+\text{---}$

so wird seyn

2) $\int dx\frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{\sqrt{(c+ex^2)}} = Ax+\frac{1}{3}Bx^3+\frac{1}{5}Cx^5+\text{---}$
$+\frac{R}{2r+1}x^{2r+1}+\text{---}$

Nun müssen wir also sehen, was für Werthe die noch unbestimmten Coefficienten A, B, C --- haben müssen; so viel ist indessen klar, daß dieselben aus der Gleichung (n. 1.) sich sollen ableiten lassen, und diese Ableitung wird am bequemsten nach (86. §.) geschehen können. Sey nämlich

3) $A+Bx^2+\text{---}+Px^{2r-4}+Qx^{2r-2}+Rx^{2r}+\text{---}=S.$

so ist

4) $\frac{dS}{dx} = 2Bx+\text{---}+(2r-4)Px^{2r-5}+(2r-2)Qx^{2r-3}$
$+2rRx^{2r-1}+\text{---}$

nun

nun ist $\frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{\sqrt{(c+ex^2)}} = S = \sqrt{\left(\frac{a+bx^2}{c+ex^2}\right)}$:

also auch $\frac{1}{2}\log\frac{a+bx^2}{c+ex^2} = \log S$. Mithin auch

$$d.\tfrac{1}{2}\log\frac{a+bx^2}{c+ex^2} = d.\log S;$$

oder $\frac{1}{2}\left(d.\frac{a+bx^2}{c+ex^2}\right) : \frac{a+bx^2}{c+ex^2} = \frac{dS}{S}$,

und dieses giebt

$$S(bc-ae)x = (ac+(ae+bc)x^2+bex^4)\frac{dS}{dx}.$$

Demnach ist aus (n. 3. 4.)

$$A(bc-ae)x+\text{----}+Q(bc-ae)x^{2r-1} = 2Bacx+\text{---}+$$
$$\text{----------}+2racRx^{2r-1}$$
$$+(2r-2)(bc+ae)Qx^{2r-1}$$
$$+(2r-4)bePx^{2r-1}.$$

Und nun erhält man aus (I. B. 83. §. Zus.)

$$A(bc-ae) = 2acB$$
$$Q(bc-ae) = 2racR+(2r-2)(bc+ae)Q+(2r-4)beP.$$

Mithin ist

$$5)\quad R = \frac{-Q(be(2r-3)+ae(2r-1))-(2r-4)beP}{2rac}.$$

Aus der Formul (n. 5.) lassen sich nun so viel man will Coefficienten der Reihe (n. 1.) bestimmen: nämlich der Coefficient jedes Gliedes wird nach (n. 5.) durch die Coefficienten zweyer nächstvorhergehenden Glieder vollkommen bestimmt; z. B. der Coefficient des dritten Gliedes durch die Coefficienten des ersten und zweyten. Es ist ferner

ein-

einleuchtend, daß beym Gebrauch der Formul (n. 5.) der Buchstab r den Index des jedesmal verlangten Coefficienten bedeutet, dergestalt, daß man $r=1$, oder $r=2$, oder $r=3$ u. s. f. setzen muß, nachdem der Coefficient B des ersten, oder C des zweyten, oder D des dritten Gliedes u. s. f. verlangt wird, vorausgesetzt, daß die Glieder von Bx^2 an in (n. 1.) gerechnet werden. Mithin kömmt alles darauf an, daß man den Werth von A wisse, welcher aber sich leicht ergiebt: denn die Reihe (n. 1.) gilt für jeden Werth von x, mithin auch für $x=0$, wofür $\sqrt{\frac{a}{c}}=A$ erhalten wird. Ist aber der Werth von A einmal bestimmt, so können dadurch auch die Werthe von B, C u. s. f. nach (n. 5.) bestimmt werden; denn um B zu finden, muß man in (n. 5.) A statt Q nehmen, ferner $P=0$, und $r=1$ setzen; um hierauf C zu finden, muß man in (n. 5.) B statt Q, und A statt P nehmen, und $r=2$ setzen; um D zu bestimmen muß man in (n. 5.) C statt Q, und B statt P, und $r=3$ setzen u. s. f. Dem zufolge wird seyn

$$A=\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$B=\frac{A(bc-ae)}{2ac}$$

$$C=\frac{-B(bc+3ae)}{4ac}$$

$$D=\frac{-C(3bc+5ae)-2beB}{6ac}$$

$$E=\frac{-D(5bc+7ae)-4beC}{8ac}$$ u. s. f.

114. §. Aufgabe.

Für gegebene Axen AB, DE (12. Fig.) der Ellipse den Bogen DM zu bestimmen. Fig. 12.

Auflösung. Man setze, daß der Bogen DM durch die rechtwinklichten Coordinaten CP = u, und MP = y bestimmt wird; so ist $d.MD = \sqrt{(dy^2 + du^2)}$ nach (112. §.) Nun aber ist bey der Ellipse nach (96. §. 9 Zus.) $y^2 = \frac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2}u^2$. Wenn man aber, um die Rechnung zu erleichtern, die Zwergaxe $a = 2\alpha$ und die ihr zugeordnete Axe $b = 2\beta$ setzt; so wird man haben

$y^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}u^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - u^2)$. Mithin

$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - u^2)}$; $dy = \frac{-\beta u du}{\alpha\sqrt{(\alpha^2 - u^2)}}$; $dy^2 = \frac{\beta^2 u^2 du^2}{\alpha^2(\alpha^2 - u^2)}$:

also ist $d.DM = \sqrt{\left(\frac{\beta^2 u^2 du^2}{\alpha^2(\alpha^2 - u^2)} + du^2\right)}$

oder $d.DM = du\frac{\sqrt{(\alpha^4 - (\alpha^2 - \beta^2)u^2)}}{\sqrt{(\alpha^4 - \alpha^2 u^2)}}$:

also $DM = \int du \frac{\sqrt{(\alpha^4 - (\alpha^2 - \beta^2)u^2)}}{\sqrt{(\alpha^4 - \alpha^2 u^2)}}$.

Und nun kann man dieses Integral nach (113. §. n. 2.) bestimmen, wofern man die dortigen Coefficienten A, B, C u.s.f. nach (113. §. n. 5.) aufsucht: der verlangte elliptische Bogen wird nämlich seyn:

$$DM = Au + \tfrac{1}{3}Bu^3 + \tfrac{1}{5}Cu^5 + \tfrac{1}{7}Du^7 + \tfrac{1}{9}Eu^9 + \ldots + \frac{R}{2r+1}u^{2r+1} + \ldots$$

Und

Und die Coefficienten A, B, C, D, E---R.... findet man nach der dortigen Einleitung, wie sie folgen. Es ist nämlich das dortige

$$a=\alpha^4;\ b=\beta^2-\alpha^2;\ c=\alpha^4;\ e=-\alpha^2:$$

also ist:

$$A=1$$

$$B=\frac{\beta^2}{2\alpha^4}$$

$$C=\frac{\beta^2(4\alpha^2-\beta^2)}{2.4.\alpha^8}$$

$$D=\frac{\beta^2(24\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+3\beta^4)}{2.4.6.\alpha^{12}}$$

und überhaupt nach (113. §. n. 5.)

$$R=\frac{-Q((\alpha^2\beta^2-\alpha^4)(2r-3)-\alpha^4(2r-1))-(2r-4)(\alpha^2-\beta^2)P}{2r\alpha^6}$$

Aus diesem allgemeinen Ausdrucke kann man demnach so viel man will Coefficienten für die Glieder der obigen Reihe berechnen, welche den verlangten elliptischen Bogen DM für jede Abscisse u=CP ausdrückt. Es ist übrigens einleuchtend, daß dieselbe Reihe das wahre und vollkommene Integral von d.DM angiebt: man müßte zwar nach (28. §.) noch die Constante C hinzusetzen, da aber der Bogen DM=o für u=PC=o wird; so gäbe dieselbe Reihe auch C=o.

1. Zusatz.

Der elliptische Bogen DM übergeht in DA, welches der vierte Theil des ganzen elliptischen Umfanges ist, wenn die Abscisse u=CP=CA gesetzt wird: da wir also CA=α

gesetzt

geſetzt haben; ſo werden wir für $u = \alpha$ aus der obigen allgemeinen Formul den elliptiſchen Quadranten AD erhalten, es wird nämlich ſeyn

$$DA = A\alpha + \tfrac{1}{3}B\alpha^3 + \tfrac{1}{7}C\alpha^5 + \tfrac{1}{9}D\alpha^7 + \tfrac{1}{5}E\alpha^9 + \ldots\ldots + \frac{R}{2r+1}\alpha^{2r+1} + \ldots\ldots$$

und $A = 1$; $B = \frac{\beta^2}{2\alpha^4}$ u. ſ. f. wie oben.

2. Zuſatz.

Die Gleichung $y^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}u^2$ übergeht für $\beta = \alpha$ in die Gleichung $y^2 = \alpha^2 - u^2$, welche zu einer Kreislinie gehört, deren Halbmeſſer $= \alpha$ iſt (92. §.): aus der obigen allgemeinen Formul könnte man alſo jeden Kreisbogen d'M berechnen, welcher einer gewiſſen, vom Mittelpuncte C an gerechneten Abſciſſe $u = CP$ zugehören mag, wofern man daſelbſt $\alpha = \beta$ ſetzte. Und wenn man überdem $u = \alpha$ nähme, ſo würde man daraus den vierten Theil d'A der ganzen Kreislinie erhalten. Fig. 12.

3. Zuſatz.

Nach (113. §.) läßt ſich auch der hyperboliſche Bogen AM (Fig. 13.) auf gleiche Art beſtimmen, welcher einer gegebenen vom Mittelpuncte C an gerechneten Abſciſſe $u = CP$ zugehört. Denn wenn man die Zwergare BA oder $a = 2\alpha$ und die ihr zugeordnete Are DE oder $b = 2\beta$ ſetzt; ſo hat man $y^2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}u^2 - \beta^2$ nach (97. §. 8. Zuſ.): alſo iſt: Fig. 13.

$$dy = \frac{\beta u du}{\sqrt{(\alpha^2 u^2 - \alpha^4)}} \text{ mithin nach (112. §.)}$$

$$d.AM = \sqrt{\left(\frac{\beta^2 u^2 du^2}{\alpha^2 u^2 - \alpha^4} + du^2\right)};$$

$$\text{oder } d.AM = \frac{du\sqrt{((\alpha^2+\beta^2)u^2 - \alpha^4)}}{\sqrt{(\alpha^2 u^2 - \alpha^4)}}:$$

daher ist nach (113. §.) der verlangte Bogen

$$AM = Au + \tfrac{1}{3}Bu^3 + \tfrac{1}{5}Cu^5 + \tfrac{1}{7}Du^7 + \text{---} + \frac{R}{2r+1}u^{2r+1}$$
$$+ \text{---} + \text{Const.}$$

Es ist aber einleuchtend, daß der hyperbolische Bogen $AM = o$ für $u = CA = \alpha$ wird: also ist nach (28. §.)

$$A\alpha + \tfrac{1}{3}B\alpha^3 + \tfrac{1}{5}C\alpha^5 + \tfrac{1}{7}D\alpha^7 + \text{----} + \frac{R}{2r+1}.\alpha^{2r+1}$$
$$+ \text{----} + \text{Const.} = o$$

$$\text{mithin Const.} = -A\alpha - \tfrac{1}{3}B\alpha^3 - \tfrac{1}{5}C\alpha^5 - \tfrac{1}{7}D\alpha^7 - \text{---}$$
$$- \frac{R}{2r+1}\alpha^{2r+1} - \text{----}$$

folglich ist der verlangte hyperbolische Bogen

$$AM = A(u-\alpha) + \tfrac{1}{3}B(u^3-\alpha^3) + \tfrac{1}{5}C(u^5-\alpha^5) + \text{-----}$$
$$+ \frac{R}{2r+1}(u^{2r+1} - \alpha^{2r+1}).$$

Was nun die Coefficienten A, B, C, D anbelangt, sie werden nach (113. §. n. 5.) gefunden, wie sie folgen.

$$A = 1$$

$$A = 1$$

$$B = \frac{-\beta^2}{2\alpha^4}$$

$$C = \frac{-(\beta^2+4\alpha^2)\beta^2}{2\cdot 4\cdot \alpha^8}$$

und überhaupt

$$R = \frac{Q(\alpha^6+\alpha^4\beta^2(2r-3)+\alpha^6(2r-1))-(2r-4)(\alpha^4+\alpha^2\beta^2)P}{2r\alpha^8}\ldots$$

Anmerkung.

Die hier angewiesene Methode, einen elliptischen und hyperbolischen Bogen zu rectificiren, ist zum Gebrauch, den man davon machen kann, hinreichend: es wird indessen nicht überflüßig seyn, noch eine andere Methode herzusetzen, theils weil sie den Gebrauch der im (2. Abschnitt.) abgehandelten Integralformuln erläutert, theils auch weil sie zu schnell convergirenden Reihen führt.

115. §. Aufgabe.

Den elliptischen Bogen DM (12. Fig.), welcher einer gegebenen Abscisse CP = u zugehört, auf die Rectification der Kreislinie zurückzuführen. Fig. 12.

Auflösung. Es war in (114. §.)

$$DM = \int du \frac{\sqrt{(\alpha^4-(\alpha^2-\beta^2)u^2)}}{\sqrt{(\alpha^4-\alpha^2u^2)}}\ldots$$

Es sey aber $\frac{u}{\alpha} = z$; $du = \alpha dz$; $u^2 = \alpha^2z^2$; so ist

$$DM = \int \alpha dz \frac{\sqrt{(\alpha^4-(\alpha^2-\beta^2)\alpha^2z^2)}}{\sqrt{(\alpha^4-\alpha^4z^2)}} = \int dz \frac{\sqrt{(\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)z^2)}}{\sqrt{(1-z^2)}}\ldots$$

Oder $DM = \int \alpha dz \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)z^2}{\alpha^2}\right)}}{\sqrt{(1-z^2)}}$.

setzt man $m = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}$; so wird seyn

$$DM = \int \alpha dz \frac{\sqrt{(1-mz^2)}}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Nun ist nach (I. B. 78. §.) die Wurzelgrösse $\sqrt{(1-mz^2)}$ in einer Reihe leicht aufzulösen: es wird nämlich seyn.

$$\sqrt{(1-mz^2)} = 1 - Az^2 - Bz^4 - Cz^6 - \text{---} - Qz^{2r} - Rz^{2r+2} - \text{---}$$

I) und $A = \frac{1}{2}m$; $B = \frac{1.1}{2.4}m^2$; $C = \frac{1.1.3}{2.4.6}m^3$;

und überhaupt

$$Q = \frac{1.1.3.5 \cdots (2r-3)}{2.4.6.8 \cdots 2r} m^r; \quad R = \frac{1.1.3.5 \cdots (2r-1)}{2.4.6.8 \cdots (2r+2)} m^{r+1}$$

also der verlangte Bogen

II) $$DM = \alpha \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \alpha A \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \alpha B \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \text{---}$$

$$- \alpha Q \int \frac{z^{2r} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \alpha R \int \frac{z^{2r+2} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \text{---}$$

Also kömmt nun alles darauf an, daß man die einzelnen Integralien, woraus diese Reihe zusammengesetzt ist, bestimme: das erste Integral ist nach (34. §. VI. Formul) $= \alpha$ Arc Sin z: was aber die übrigen Integralien betrifft, so kann man jedes von ihnen vollkommen nach (40. §. 4. Zus. n. 1.) bestimmen. Es ist aber einleuchtend, daß das unbestimmte

bestimmte Integral $\int \frac{z^{2r}dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ zur Entwickelung der übrigen dienen kann, und dieses ist

$$\text{III)} \int \frac{z^{2r}dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \left(\frac{-z^{2r-1}}{2r} - \frac{(2r-1)z^{2r-3}}{2r(2r-2)} - \frac{(2r-1)(2r-3)z^{2r-5}}{2r(2r-2)(2r-4)} - \cdots - \frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 5.3.z}{2r(2r-2)\cdots 6.4.2}\right)\sqrt{(1-z^2)} + \frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 5.3.1}{2r(2r-2)\cdots 6.4.2}\,\text{Arc.Sin}\,z.$$

Nach (III) kann also jedes Integral in (II) berechnet werden, und wenn man hierauf die Werthe A, B, C, D... nach (I) nimmt; so wird man den verlangten elliptischen Bogen DM für jede gegebene Abscisse u = CP erhalten. Um dieses näher zu erläutern, will ich vier erste Glieder der Reihe (II) berechnen; nämlich

nach (III) ist

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{-z\sqrt{(1-z^2)}}{2} + \frac{1}{2}\,\text{Arc.Sin}\,z$$

$$\int \frac{z^4dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\left(\frac{z^3}{4} + \frac{3z}{2.4}\right)\sqrt{(1-z^2)} + \frac{3.1}{2.4}\,\text{Arc.Sin}\,z$$

$$\int \frac{z^6dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\left(\frac{z^5}{6} + \frac{5z^3}{6.4} + \frac{5.3z}{6.4.2}\right)\sqrt{(1-z^2)} + \frac{5.3.1}{2.4.6}\,\text{Arc.Sin}\,z.$$

also nach (II und I)

$$DM=\left(\frac{1}{2^2}m+\frac{1.1.3}{2^2.4^2}m^2+\frac{1.1.3.3.5}{2^2.4^2.6^2}m^3\right)\alpha z$$
$$+\left(\frac{1.1}{2.4^2}m^2+\frac{1.1.3.5}{2.4^2.6^2}m^3\right)\alpha z^3$$
$$+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6^2}m^3\right)\alpha z^5 \Big\}\sqrt{(1-z^2)}$$
$$+\left(\alpha-\frac{\alpha}{2^2}m-\frac{1.3}{2^2.4^2}\alpha m^2-\frac{1.3.3.5}{2^2.4^2.6^2}\alpha m^3\right)\text{Arc.Sin}z.$$

1. Zusatz.

Aus dieser Formul erhält man den elliptischen Quadranten DA (Fig. 12.) für die Abscisse $u=CA=\alpha$, oder, weil $z=\frac{u}{\alpha}$ war, für $z=1$; es ist aber klar, daß für $z=1$ alle Glieder der obigen Reihe (III) gleich Null sind, das letzte Glied aber $=\frac{(2r-1)\cdots 5.3.1}{2r\cdots 6.4.2}\frac{1}{2}\pi$ ist, wobey π die Hälfte der Kreislinie bedeutet. Demnach wird man den elliptischen Quadranten DA folgender Maaßen ausdrücken können.

Fig. 12.

$$\text{I) } DA=\alpha\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}-\alpha A\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)}}-\cdots$$
$$-\alpha Q\int\frac{z^{2r}dz}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

$$\text{II) }\int\frac{z^{2r}dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 5.3.1}{2r(2r-2)\cdots 6.4.2}\frac{1}{2}\pi.$$

Nach (II), welches den Werth des Integrals für $z=1$ giebt, kann man also den Quadranten DA so genau berechnen, als

als es immer beym wirklichen Gebrauch nothwendig seyn mag; nämlich es können aus (II) so viel man will Glieder der Reihe (I) bestimmt werden: was aber die Coefficienten A, B, C, ... anbelangt, so sind ihre Werthe aus der vorigen Auflösung bekannt. Z. B. die fünf ersten Glieder der Reihe (I) geben den Quadranten DA, wie er folgt.

$$DA = \frac{\alpha\pi}{2}\left(1 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}m - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}m^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}m^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}m^4 - \ldots\right)$$

und es ist $m = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}$.

2. Zusatz.

Für $\beta = 0$ übergeht der elliptische Quadrant in die halbe Zwergaxe $\alpha = CA$: da also $m = 1$ für $\beta = 0$ seyn muß, so erhält man aus (1. Zus.) die halbe Zwergaxe

$$\alpha = \frac{\alpha\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \ldots\right)$$

mithin

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \ldots\right)$$

Anmerkung.

Eine andere ungemein convergirende Reihe für den elliptischen Quadranten hat Herr Euler in (Nov. Comment. Petrop. Tom. XVIII. pag. 71.) angegeben: ich will den Zusammenhang davon mit der vorhergehenden Theorie hier kurz anführen.

Fig. 12. Es war

$$DM = \int du \frac{\sqrt{(\alpha^4 - (\alpha^2 - \beta^2)u^2)}}{\sqrt{(\alpha^4 - \alpha^2 u^2)}}.$$

Nun ſey $z = \frac{2u^2 - \alpha^2}{\alpha^2}$, mithin $u^2 = \frac{\alpha^2(1+z)}{2}$;

und $du = \frac{\alpha dz}{2\sqrt{2}\sqrt{(1+z)}}$: alſo iſt

$$DM = \int \frac{\alpha dz}{2\sqrt{2}\sqrt{(1+z)}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\alpha^4 - (\alpha^2 - \beta^2)\alpha^2\left(\frac{1+z}{2}\right)\right)}}{\sqrt{\left(\alpha^4 - \alpha^4\left(\frac{1+z}{2}\right)\right)}}$$

oder $DM = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}z\right)}}{\sqrt{(1-z^2)}}$

ſetzt man aber $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} = c$, und $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} = n$;

ſo iſt $DM = \frac{c}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz\sqrt{(1-nz)}}{\sqrt{(1-z^2)}}$.

Nun iſt nach (I. B. 78. §.)

$$\sqrt{(1-nz)} = 1 - Az - Bz^2 - Cz^3 - \ldots - Qz^r - Rz^{r+1}$$

und I)

$$A = \tfrac{1}{2}n\,;\ B = \frac{1.1}{2.4}n^2;\ C = \frac{1.1.3}{2.4.6}n^3;$$

und überhaupt

$$Q = \frac{1.1.3.5 \ldots (2r-3)}{2.4.6 \ldots 2r}n^r;$$

$$R = \frac{1.1.3.5 \ldots (2r-1)}{2.4.6 \ldots (2r+2)}n^{r+1}.$$

Mithin

Mithin II)

$$DM=\frac{c}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}\int\frac{Azdz}{\sqrt{(1-z^2)}}\int\frac{Bz^2dz}{\sqrt{(1-z^2)}}\cdots\right.$$
$$\left.-\int\frac{Qz^rdz}{\sqrt{(1-z^2)}}-\int\frac{Rz^{r+1}dz}{\sqrt{(1-z^2)}}-\cdots\right)$$

Hieraus erhellt schon, worauf es bey der Bestimmung des elliptischen Bogens DM für jede Abscisse u=CP ankommen würde: man müßte nämlich die einzelnen in (II) befindlichen Integralien bestimmen, hernach die Werthe von A, B, C --- nach (I) nehmen; es ist zugleich klar, daß dieselben Integralien sich nach der vorhergehenden Theorie vollkommen angeben lassen, nämlich für gerade Exponenten von z nach (40. §. 4. Zus.) und für ungerade nach (33. §. 1. Zus. I. Form.), und so wird zugleich einleuchtend, daß der elliptische Bogen DM zum Theil durch eine algebraische Function von u ausgedrückt, zum Theil aber von der Rectification der Kreislinie abhängig würde erhalten werden. Die Arbeit wird aber ungemein abgekürzt, wenn man den elliptischen Quadranten DA daraus ableiten will, welches Herr Euler (a. a. O.) ebenfalls gethan hat. Denn wenn man den elliptischen Quadranten DA wissen will, in welchen der Bogen DM für $u=\alpha$ übergeht, weil $u^2=\alpha^2\left(\frac{1+z}{2}\right)$ war; so muß man die einzelnen Integralien in (II) dergestalt bestimmen, daß am Ende bey jedem Integral $z=1$ gesetzt werde: wir wollen also sehen, was in diesem Fall die mit ungeraden Exponenten von z verbundenen Integra-

lien, hernach was die mit geraden Exponenten verbundenen geben würden.

Nehmen wir daher an, es sey r eine ungerade Zahl; so wird man für die Reihe (II) den unbestimmten Theil $\int \frac{Qz^r dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ nach (33. §. 1. Zus. I. Form.) für das dortige $\mu = \frac{r+1}{2}$, $a = 1$, $b = -1$, $p = -\frac{1}{2}$, $n = 2$, wie folgt erhalten.

$$\int \frac{Qz^r dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \pm \frac{Q}{2}\left(\frac{2(1-z^2)^{\frac{r}{2}}}{r} - \frac{(r-1)}{r-2}(1-z^2)^{\frac{r-2}{2}} + \frac{(r-1)(r-2)}{2.2(r-4)}(1-z^2)^{\frac{r-4}{2}} - \ldots\ldots\right) + C.$$

Um nun die Constante C gehörig zu bestimmen, darf man nur erwägen, daß der elliptische Bogen DM = o für u = CP = o wird; da also $u^2 = \frac{\alpha^2(1+z)}{2}$, mithin z = −1 für u = o seyn muß; so muß auch DM = o für z = −1 seyn. Setzt man aber beym gefundenen Integral z = −1, so werden alle Glieder gleich Null seyn, und dafür muß auch C gleich Null werden. Weil wir aber den elliptischen Quadranten DA haben wollen; so müssen wir, wie gesagt, bey diesem Integral z = 1 setzen, wofür dasselbe abermal gleich Null wird. Zum Beweiß, daß diejenigen Theile, welche bey der obigen Reihe (II) mit ungeraden Exponenten von z zusammenhängen, bey der Bestimmung des Quadranten DA alle wegfallen müssen, dergestalt, daß derselbe

Quadrant

Quadrant nur durch diejenigen Integralien in (II) vollkommen bestimmt wird, welche mit geraden Exponenten von z zusammenhängen. Es soll nämlich seyn

$$DA = \frac{c}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \int\frac{Bz^2dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \cdots\cdots - \int\frac{Rz^{r+1}dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \cdots\cdots\right).$$

Man kann nun diesen Quadranten nach (40. §. 4. Zus. n. 1.) bestimmen, nur darf man sich daran erinnern, daß erstlich jedes einzelne Integral für $z = -1$ gleich Null gesetzt, hernach für $z = 1$ genommen werden muß. Dem zufolge wäre das erste Integral

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{Arc.Sin}\, z + C, \text{ daher } \text{Arc Sin} - 1 + C = 0$$

oder $-\text{Arc.Sin}\, 1 + C = 0$, folglich $C = \text{Arc.Sin}\, 1 = \frac{1}{2}\pi$.

mithin für $z = 1$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{Arc.Sin}\, 1 + \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi,$$

und überhaupt für jede ungerade Zahl r nach

(40. §. 4. Zus. n. 1.)

$$\int\frac{Rz^{r+1}dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = R\left(\left(\frac{-z^r}{r+1} - \frac{rz^{r-2}}{(r+1)(r-1)} - \frac{r(r-2)z^{r-4}}{(r+1)(r-1)(r-3)} - \cdots\right.\right.$$

$$\left. - \frac{r(r-2)\cdots 5\cdot 3\cdot 2}{(r+1)(r-1)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}\right)\sqrt{(1-z^2)}$$

$$\left. + \frac{r(r-2)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(r+1)(r-1)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}\,\text{Arc. Sin}\, z\right) + C.$$

Nun

Nun soll auch hier für $z = -1$ alles gleich Null gesetzt, hernach was dadurch gefunden wird, für $z = 1$ genommen werden: da also für $z = -1$ die Constante C wie folgt bestimmt wird

$$+R\frac{r(r-2)\cdots\cdots 5.3.1}{(r+1)(r-1)\cdots 6.4.2}\text{Arc. Sin} -1 + C = 0.$$

$$\text{mithin } C = R\frac{r(r-2)\cdots\cdots 5.3.1}{(r+1)(r-1)\cdots 6.4.2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wenn man aber diese Constante zum vorigen Integral nimmt, hierauf $z = 1$ setzt; so erhält man

$$\int\frac{Rz^{r+1}dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = R\frac{r(r-2)\cdots\cdots 5.3.1}{(r+1)(r-1)\cdots 6.4.2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi$$
$$+R\frac{r(r-2)\cdots\cdots 5.3.1}{(r+1)(r-1)\cdots 6.4.2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi$$
$$= R\frac{r(r-2)\cdots\cdots 5.3.1}{(r+1)(r-1)\cdots 6.4.2}\cdot\pi.$$

Für den elliptischen Quadranten DA erhalten wir daher folgenden allgemeinen Ausdruck, wobey aus dem unbestimmten Gliede alle vorhergehende für $r = 1$, $r = 3$, $r = 5$ u. s. f. entwickelt werden können.

$$DM = \frac{c\pi}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1.1}{2.4}n^2 - \cdots\cdots\right.$$
$$\left. \cdots - \frac{1.1.3.5\cdots(2r-1)\times r(r-2)\cdots 5.3.1}{2.4.6\cdots(2r+2)\times(r+1)(r-1)\cdots 6.4.2}n^{r+1}\right).$$

Von

Von der Quadratur paraboliſcher, elliptiſcher und hyperboliſcher Räume.

116. §. Aufgabe.

Den Raum CDMA (Fig. 2.) zwiſchen zwoen rechtwinklichten Ordinaten AC und MD, und den Bogen AM einer krummen Linie OMS zu beſtimmen, wenn die Gleichung zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten derſelben Linie bekannt iſt. Fig. 2.

Auflöſung. Die Abſciſſen mögen von was immer für einem Puncte v an gerechnet werden, und die eine Ordinate AC mag in was immer für einer Entfernung Cv vom Anfangspuncte der Abſciſſen v liegen; ſo kann man doch überhaupt die Abſciſſe $vD = x$, und die ihr zugehörige Ordinate $MD = y$ ſetzen, welche als eine Function von x betrachtet wird, und es iſt ferner einleuchtend, daß der verlangte Raum CAMD ebenfalls eine Function von $vD = x$ ſeyn muß: wir wollen alſo denſelben Raum indeſſen mit R bezeichnen, mithin $R = CAMD$ ſetzen.

Wenn nun $vD = x$ um eine Differenz $DE = \Delta x$ wächſt; ſo nimmt, wenn $Mq = Lm$ zu PQ parallel iſt, die Ordinate $MD = y$ um $\Delta y = mq$, und der Raum $R = CAMD$ um $\Delta R = MmED$ zu (3. §.), dergeſtalt, daß $DMmE$ allemal gröſſer als das Rechteck $MqED = MD.DE = y.\Delta x$, und zugleich allemal kleiner, als das Rechteck $DLmE = DL.DE = (y+\Delta y)\Delta x$ ſeyn muß. Da alſo die Differenz Δy nach (6. §. 2. 3. Zuſ.) überhaupt durch $\Delta y = M\Delta x + N\Delta x^2$ ausgedrückt werden kann; ſo hat man

ΔR

$$\Delta R > y\Delta x;\ \Delta R < (y + M\Delta x + N\Delta x^2)\Delta x$$

$$\text{mithin } \frac{\Delta R}{\Delta x} > y;\ \frac{\Delta R}{\Delta x} < y + (M + N\Delta x)\Delta x,$$

und hieraus erhält man nach (20. §.)

$$dR = ydx.$$

Ist daher eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $y = MD$ und $x = vD$ gegeben, so wird man entweder y durch x, oder dx durch dy ausdrücken, hernach den verlangten Raum R mit Hülfe der Integralrechnung bestimmen können. Weil wir aber bey dieser Auflösung vorausgesetzt haben, daß bey zunehmenden Abscissen x auch die ihnen zugehörigen Ordinaten y wachsen, da doch das Gegentheil geschehen kann; so muß man nach (5. §. 8. Zus.) $-dy$ statt $+dy$ allemal nehmen, wenn y abnimmt, während daß x wächst.

1. Zusatz.

Fig. 11. Wenn man den paraboliſchen Raum $R = AMP$ (Fig. 11.) verlangt, welcher zwiſchen der Ordinate $MP = y$, Abſciſſe $AP = x$, und dem Bogen AM liegt; ſo findet man ihn mit Hülfe der Gleichung (95. §.). Es iſt nämlich

$$y^2 = px;\ \text{mithin } 2ydy = pdx;$$

$$\text{daher } dx = \frac{2ydy}{p}: \text{ alſo iſt}$$

$$dR = ydx = \frac{2y^2dy}{p};\ \text{mithin } R = \frac{2y^3}{3p} + C,$$

Weil

Weil aber $R = AMP = o$ für $y = MP = o$ wird; so hat man nach (28. §.) auch $C = o$, folglich ist der verlangte paraboliſche Raum vollkommen

$$AMP = \frac{2y^3}{3p} = \frac{2yx}{3}.$$

2. Zuſatz.

Das Rechteck PMdA iſt gleich $MP.AP = y.x$: der paraboliſche Raum APM beträgt alſo für jede Abſciſſe $AP = x$ und Ordinate $MP = y$ zwey Drittheile des Rechtecks, welches dieſelben Coordinaten zu ſeinen Seiten hat. Ferner iſt $AMd = dMPA - APM = yx - \frac{2}{3}yx = \frac{1}{3}yx$, das heißt: das auswendige paraboliſche Dreyeck AMd iſt der dritte Theil des Rechtecks MPAd, und die Hälfte des paraboliſchen Raums AMP.

3. Zuſatz.

Nehmen wir an, es ſey F der Brennpunct der Parabel; ſo iſt $AF = \frac{1}{4}p$ (100. §. 1. Zuſ.): nach erſtem Zuſatz iſt alſo für $x = AF$, mithin $y = QF = \frac{1}{2}p$ (100. §.) der paraboliſche Raum $AQF = \frac{1}{12}p^2$, und $AQq = \frac{1}{6}p^2$, das heißt: der paraboliſche Raum zwiſchen dem Bogen AQ, und der am Brennpuncte F ſtehenden Ordinate FQ iſt der zwölfte Theil des Quadrats vom Parameter p; und der paraboliſche Raum zwiſchen dem Bogen QAq und der Sehne Qq, welche am Brennpuncte F auf die Axe VX ſenkrecht ſteht, iſt der ſechſte Theil des Quadrats vom Parameter p.

4. Zusatz.

Der Raum zwischen dem paraboliſchen Bogen AM und der Sehne AM, iſt AQMoA = AMP — AOMP = $\frac{2}{3}$ yx — $\frac{1}{2}$ yx = $\frac{1}{6}$ yx; mithin iſt er gleich dem ſechſten Theile des Rechtecks QMdA, oder dem vierten Theile des paraboliſchen Raumes AMP.

5. Zusatz.

Fig. 12. Wenn man CP = u, und MP = y, überdem die Zwergaxe AB = 2α, und die zugeordnete Axe DE = 2β ſetzt; ſo findet man nach (96. §. 9. Zuſ.), wobey b, a was hier 2α, 2β, bedeuteten.

$$y^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}u^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - u^2)\text{: alſo}$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - u^2)}\text{; mithin d.CDMP} = y\,du$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}du\sqrt{(\alpha^2 - u^2)}.$$

Dieſe Formul integrirt, wird demnach den elliptiſchen Raum CDMP für jede Abſciſſe u = CP, und Ordinate y = MP geben, nämlich nach (39. §. VIII. Form.)

$$\text{I) CDMP} = \frac{\beta u}{2\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - u^2)} + \frac{\beta\alpha}{2}\text{Arc. Tang.}\frac{u}{\sqrt{(\alpha^2 - u^2)}}$$

oder nach (26. §. 4. Zuſ. I. II. Form.) für das dortige

$$m = o,\ n = 2,\ x = u,\ \gamma = -1,\ \beta = \alpha^2.$$

$$\text{II) CDMP} = \beta u - \frac{\beta u^3}{2.3\,\alpha^2} - \frac{1.\beta u^5}{2.4.5\,\alpha^4} - \frac{1.3\beta u^7}{2.4.6.7\,\alpha^6} - \frac{1.3.5\beta u^9}{2.4.6.8.9\,\alpha^8} - \ldots\ldots$$

6. Zu-

6. Zuſatz.

Weil der Raum CDMP in den Quadranten CDA übergeht, wenn die Abſciſſe CP der halben Zwergaxe CA gleich wird; ſo muß aus (5. Zuſ.) für $v = \alpha$ der vierte Theil der ganzen elliptiſchen Fläche erhalten werden, nämlich:

I) $DCA = \frac{\beta\alpha}{2}$ Arc. Tang $\frac{1}{0} = \frac{\beta\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\beta\alpha\pi$.

II) $DCA = \beta\alpha\left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1.3}{2.4.6.7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9} - \ldots\right)$.

7. Zuſatz.

Die ganze elliptiſche Fläche iſt $ADBEA = \beta\alpha\pi$. Da nun $1 : \pi$ das Verhältniß des Halbmeſſers zur Peripherie einer Kreisfläche überhaupt bedeutet; ſo wird $\pi\beta$ den halben Umfang, mithin $\pi\beta^2$ die Kreisfläche für den Halbmeſſer $= \beta$ bedeuten: ferner drückt $\pi\alpha$ den halben Umfang der Kreisfläche für den Halbmeſſer $= \alpha$ aus, und dieſe Kreisfläche ſelbſt iſt $= \alpha^2\pi$. Da alſo $\beta^2\pi : \beta\alpha\pi = \beta : \alpha$, und $\alpha^2\pi : \beta\alpha\pi = \alpha : \beta$ iſt; ſo verhält ſich die Fläche des Kreiſes, welcher die halbe zugeordnete Axe $\beta = CD$, oder die halbe Zwergaxe $\alpha = AC$ zum Halbmeſſer hat, zur Fläche der ganzen Ellipſe, wie dieſelbe Axe, deren Hälfte zum Halbmeſſer des Kreiſes diente, zu der andern Axe.

8. Zusatz.

Wollte man den elliptischen Raum AMP für die Abscisse AP = x, und MP = y suchen; so würde dazu die Gleichung (96. §.) dienen: denn für das dortige $b = 2\beta$, und $a = 2\alpha$ wäre

$$y^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha}x - \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2}; \quad y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(2\alpha x - x^2)};$$

mithin $d.AMP = \frac{\beta}{\alpha}dx\sqrt{(2\alpha x - x^2)}$,

und nun nach (39. §. X. Form.)

$$AMP = \frac{\beta}{2\alpha}(x-\alpha)\sqrt{(2\alpha x - x^2)} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta \text{ Arc. T}\frac{x-\alpha}{\sqrt{(2\alpha x - x^2)}} + C$$

Für $x = AP = 0$ ist aber $AMP = 0$: also nach (28. §.)

$$\tfrac{1}{2}\alpha\beta \text{ Arc. Tang}\frac{-\alpha}{\sqrt{(2\alpha.0 - 0^2)}} + C = 0,$$

mithin $C = \frac{1}{2}\alpha\beta.\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\alpha\beta\pi$,

folglich $AMP = \frac{1}{4}\alpha\beta\pi - \frac{\beta}{2\alpha}(\alpha - x)\sqrt{(2\alpha x - x^2)}$

$$- \tfrac{1}{2}\alpha\beta \text{ Arc. Tang}\frac{\alpha - x}{\sqrt{(2\alpha x - x^2)}}.$$

Sonst würde man das Integral $AMP = \frac{\beta}{\alpha}\int dx\sqrt{(2\alpha x - x^2)}$ auch nach (26. §. 4. Zus. I. II. Form.) durch eine Reihe bestimmen können, wenn man nämlich das dortige $\beta = 2\alpha$, $\gamma = -1$, $m = 1$, $n = 2$ setzte. Uebrigens ist klar, daß auch die hier gefundene Formul für die Fläche des elliptischen Quadranten ACD eben das giebt, was wir schon im (6. Z.) gefunden haben; denn aus AMP erhält man ADC für

AP

AP = AC, nämlich für $x = \alpha$, mithin ist $ADC = -\frac{1}{4}\alpha\beta$ Arc. Tang $\frac{0}{\alpha} + \frac{1}{4}\alpha\beta\pi = \frac{1}{4}\alpha\beta\pi$.

9. Zusatz.

Für die Zwergaxe $2\alpha = AB$, und die zugeordnete Axe $2\beta = DE$ (Fig. 14.) ist nach (114. §. 3. Zus.). Fig. 14.

$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(u^2 - \alpha^2)$, und $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(u^2 - \alpha^2)}$: also ist

$MAP = \frac{\beta}{\alpha}\int du\sqrt{(u^2 - \alpha^2)}$, mithin nach (39. §. VII. Form.)

$MAP = \frac{\beta}{2\alpha}.u\sqrt{(u^2 - \alpha^2)} - \frac{\beta\alpha}{2}\log(u + \sqrt{(u^2 - \alpha^2)}) + C.$

Da aber das hyperbolische Dreyeck $AMP = 0$ für $u = CP = CA = \alpha$ wird, so erhält man nach (28. §.)

$-\frac{\beta\alpha}{2}\log\alpha + C = 0$; und nun $C = \frac{\beta\alpha}{2}\log\alpha$:

also ist

$$MAP = \frac{\beta}{2\alpha}.u\sqrt{(u^2 - \alpha^2)} + \frac{\beta\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{u + \sqrt{(u^2 - \alpha^2)}}$$

$$= \frac{\beta}{2\alpha}.u\sqrt{(u^2 - \alpha^2)} + \frac{\beta\alpha}{2}\log\frac{u - \sqrt{(u^2 - \alpha^2)}}{\alpha}.$$

Diese Formul giebt demnach den hyperbolischen Raum AMP für jede Abscisse $u = CP$.

10. Zusatz.

Wollte man die Abscissen vom Scheitel A rechnen; so wäre für $AP = x$, $MP = y$, $AB = a = 2\alpha$, und $DE = b = 2\beta$, nach (97. §.).

$y^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha}x + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2$; mithin $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(2\alpha x + x^2)}$;

und nun

$MAP = \frac{\beta}{\alpha}\int dx\sqrt{(2\alpha x + x^2)}$, folglich nach (39. §. IX. Form.)

$MAP = \frac{\beta(x+\alpha)}{2\alpha}\sqrt{(2\alpha x + x^2)} - \frac{\beta\alpha}{2}l.(x+\alpha+\sqrt{(2\alpha x + x^2)}) + C.$

Da nun $MAP = o$ für $x = AP = o$ wird; so hat man nach (28. §.)

$-\frac{\beta\alpha}{2}\log.\alpha + C = o$; und nun $C = \frac{1}{2}\beta\alpha\log.\alpha$:

also

$MAP = \frac{\beta(x+\alpha)}{2\alpha}\sqrt{(2\alpha x + x^2)} + \frac{\beta\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{\alpha+x+\sqrt{(2\alpha x + x^2)}}$.

11. Zusatz.

Bey der gleichseitigen Hyperbel (98. §. 6. Zus.) ist $\beta = \alpha$: für eine solche erhält man demnach aus (9. Zus.)

$MAP = \frac{1}{2}u\sqrt{(u^2 - \alpha^2)} + \frac{\alpha^2}{2}\log\frac{u - \sqrt{(u^2 - \alpha^2)}}{\alpha}$.

12. Zusatz.

Will man das hyperbolische Trapezium NMAd haben, welches zwischen der zur zugeordneten Axe DE parallelen Ordinate $NM = z$, dem Stück dN der Asymptote CR, und dem hyperbolischen Bogen AM liegt; so findet man es mit Zuziehung der Gleichung (97. §. 13. Zus.). Es ist nämlich für $b = 2\beta$, $a = 2\alpha$.

$z = \frac{\beta}{e}(v - \sqrt{(v^2 - e^2)})$, wobey $e = Cd = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$

und $v = CN$:

also $AMNd = \frac{\beta}{e}\int v dv - \frac{\beta}{e}\int dv\sqrt{(v^2 - e^2)}$ mithin nach

(39. §. VII. Form.)

$$AMNd = \tfrac{1}{2}\frac{\beta v^2}{e} - \frac{\beta v}{2e}\sqrt{(v^2 - e^2)} + \frac{\beta e}{2}\log(v + \sqrt{(v^2 - e^2)}) + C.$$

Nun ist $AMNd = o$ für $v = CN = Cd = e$: also ist nach (28. §.)

$\frac{1}{2}\beta e + \frac{1}{2}\beta e \log. e + C = o$; und $C = -\frac{1}{2}\beta e - \frac{1}{2}\beta e \log. e$;

also

$$AMNd = \frac{\beta}{2e}(v^2 - e^2) - \frac{\beta v}{2e}\sqrt{(v^2 - e^2)} + \frac{\beta e}{2}\log\left(\frac{v + \sqrt{(v^2 - e^2)}}{e}\right).$$

13. Zusatz.

Bey der gleichseitigen Hyperbel ist $\beta = \alpha$, und $e = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} = \alpha\sqrt{2}$; für sie ist also

$$AMNd = \frac{1}{2\sqrt{2}}(v^2 - 2\alpha^2) - \frac{v}{2\sqrt{2}}\sqrt{(v^2 - 2\alpha^2)} + \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}\log. \frac{v + \sqrt{(v^2 - 2\alpha^2)}}{\alpha\sqrt{2}}.$$

14. Zusatz.

Sollen die Ordinaten $A\alpha$, $M\mu$ zur Asymptote Cn parallel seyn; so sey $C\mu = u$, und $M\mu = t$, mithin $t = \frac{e^2}{4u}$ (98. §.). Will man also das hyperbolische Trapezium $AM\mu\alpha$ haben; so wird seyn

$$A\alpha\mu M = \frac{e^2}{4}\int\frac{du}{u} = \frac{e^2}{4}\log. u + C.$$

Es ist aber $A\alpha\mu M = 0$ für $u = C\mu = C\alpha = \frac{1}{2}e$: also findet man nach (28. §.).

$$\frac{e^2}{4}\log.\tfrac{1}{2}e + C = 0;\quad C = -\frac{e^2}{4}\log\tfrac{1}{2}e;\ \text{daher}$$

$$A\alpha\mu M = \frac{e^2}{4}\log\frac{2u}{e}.$$

15. Zusatz.

Weil $A\alpha\mu M = \frac{e^2}{4}\log\frac{2C\mu}{e}$; $A\alpha qQ = \frac{e^2}{4}\log\frac{2Cq}{e}$ ist, nach (14. Zus.); so muß seyn $M\mu qQ = A\alpha qQ - A\alpha\mu M = \frac{e^2}{4}\log\frac{Cq}{C\mu}$: die hyperbolischen Trapezien, wie $M\mu qQ$, verhalten sich also gegen einander wie die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche die Quotienten $\frac{Cq}{C\mu}$ für die ihnen zugehörigen Abscissen Cq, $C\mu$ ausdrücken.

Von der Cubatur runder Körper, welche durch die Umdrehung gegebener Ebenen um ihre Axen entstehen.

117. §. Aufgabe.

Fig. 20. Die Gleichung für eine krumme Linie AD (Fig. 20.) zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten $\alpha b = x$, $bQ = y$ ist gegeben; man soll den Inhalt des runden Körpers bestimmen, welcher durch die Umdrehung der krummen Linie AD um ihre Abscissen-Axe $\alpha\beta$ entstehen mag.

Auflö-

Auflösung. Den Coordinaten $ab = x$, $bQ = y$ gehört der Bogen AQ zu, welcher während der Umdrehung der krummen Linie AD um ihre Abscissen-Axe $\alpha\beta$ das Stück $QAP = S$ des runden Körpers DAB erzeugt: dieses Stück, als eine Function von $x = ab$ wächst um die Differenz $\Delta S = PpqQ$, wenn die Abscisse $x = ab$ um $bc = \Delta x$ zunimmt, und es ist $\Delta S = PpqQ$ allemal grösser, als der Cylinder $PgfQ = PQ \times \Delta x$ bey der Grundfläche PQ, und zugleich allemal kleiner, als der Cylinder $hpqe = pq \cdot \Delta x$ bey der Grundfläche pq. Da nun die Ordinate $Qb = y$ der Halbmesser der kreisförmigen Grundfläche PQ ist, und sie in $y' = y + \Delta y$ übergeht, indem x um Δx wächst, mithin $cq = y + \Delta y$ der Halbmesser der ebenfalls kreisförmigen Grundfläche pq seyn muß; so findet man, wenn $1 : \pi$ das Verhältniß des Halbmessers zur halben Peripherie bedeutet, den halben Umfang der Grundfläche $PQ = \pi y$, und den halben Umfang der Grundfläche $pq = \pi(y + \Delta y)$, mithin den körperlichen Inhalt des Cylinders $PgfQ = \pi y^2 \cdot \Delta x$, und des Cylinders $hpqe$ seinen $= \pi(y + \Delta y)^2 \cdot \Delta x$: also ist allemal

$$\Delta S > \pi y^2 \cdot \Delta x; \quad \Delta S < \pi(y + \Delta y)^2 \cdot \Delta x,$$

daher $\frac{\Delta S}{\Delta x} > \pi y^2$; $\frac{\Delta S}{\Delta x} < \pi y^2 + (2\pi y + \pi \Delta y)\Delta y$,

und für $\Delta y = \alpha \Delta x + \psi \Delta x^2$ (§. 6. Zus. 2.)

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} > \pi y^2; \quad \frac{\Delta S}{\Delta x} < \pi y^2 + (2\pi y + \pi \Delta y)(\alpha + \psi \Delta x)\Delta x.$$

Hieraus erhält man nun nach (20. §.) die Formul $dS = \pi y^2 dx$, welche, wie es für sich klar ist, zur Bestimmung des Stückes S = QAP des runden Körpers DAB für jede Abscisse x = αb dienen wird, sobald man voraussetzt, daß die Gleichung zwischen x und y für die krumme Linie AD, durch deren Umdrehung um die Axe αβ derselbe Körper entsteht, bekannt ist.

1. Zusatz.

Sey AD die Parabel, wofür $y^2 = px$ ist (95. §.); so muß seyn:

$d.AQP = \pi px dx$ für $x = Ab$;

mithin $AQP = \frac{1}{2}\pi px^2 + C$.

Da nun das Stück QAP = 0 für x = Ab = 0 wird; so ist nach (28. §.) auch C = 0, mithin ist der körperliche Inhalt des Paraboloids QAP allemal $= \frac{1}{2}\pi px^2$, man mag die Abscisse x = Ab wie immer groß oder klein nehmen. Setzt man x = p, so ist dasselbe Stück $QAP = \frac{1}{2}\pi p^3$.

2. Zusatz.

Sey QA ein elliptischer Bogen, und Aβ die Zwerg-Axe der Ellipse, der Mittelpunct aber in C; so ist für x = Ab nach (96. §.)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2), \text{ mithin } QAP = \frac{\pi b^2}{a^2}\int dx(ax - x^2),$$

daher $QAP = \frac{\pi b^2}{a^2}(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3) = \frac{\pi b^2}{6a^2}(3ax^2 - 2x^3)$.

Diese Formul giebt demnach das Stück QAP des Elliptoids für jede Abscisse x = Ab. Setzt man $x = \frac{1}{2}a$; so findet

findet man daraus die Hälfte, und für $x = a$ das ganze Elliptoid, nämlich $= \frac{\pi b^2 a}{6}$.

3. Zusatz.

Wenn die Ellipse um die zugeordnete Axe DE (Fig. 12.) gedrehet wird; so beschreibt der Bogen DQ' das Stück Q'DQ, wovon der Inhalt so gefunden wird. Für $Dk = r$, $kQ' = s$, ist $Q'f = CD - r$, $= \frac{1}{2}b - r$, und $Cf = s$. Es ist aber nach (96. §. 9. Zus.) Fig. 12.

$$Q'f^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot Cf^2, \text{ also } (\tfrac{1}{2}b - r)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot s^2,$$

$$\text{mithin } s^2 = \frac{a^2}{b}r - \frac{a^2}{b^2} \cdot r^2, \text{ und nun ist}$$

$$Q'DQ = \pi \int dr \left(\frac{a^2}{b^2} \cdot r - \frac{a^2}{b^2} \cdot r^2 \right) = \frac{\pi a^2}{6b^2}(3br^2 - 2r^3).$$

Diese Formul giebt daher den körperlichen Inhalt des Stückes Q'DQ des elliptischen Sphäroids, welches durch die Umdrehung der halben Ellipse DPE um ihre zugeordnete Axe DE entsteht, es mag die Abscisse $r = Dk$ wie immer klein oder groß, doch kleiner als $DE = b$, genommen werden. Setzt man $r = DE = b$; so erhält man daraus den Inhalt des ganzen Sphäroids $= \frac{\pi a^2 b}{6}$.

4. Zusatz.

Der körperliche Inhalt des paraboliſchen Conoids QAP war für jede Abscisse $x = Ab$ und die Ordinate $y = bQ$, im (1. Zus.) $= \frac{1}{2}\pi px^2 = \frac{1}{2}\pi y^2 x$. Stellt man sich nun auf der Grundfläche PQ, deren Halbmesser $= y$ ist, einen Fig. 20.

Cylinder und einen Kegel vor, welche beyde $x = Ab$ zur Höhe haben; so ist der körperliche Inhalt des ersten $= \pi y^2 x$, und des zweyten seiner $= \frac{1}{2}\pi y^2 x$: das paraboliſche Conoid QAP, der Kegel und Cylinder bey einerley Grundfläche PQ und einerley Höhe Ab verhalten sich also gegeneinander, wie die Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1$.

5. Zusatz.

Fig. 12. Der körperliche Inhalt eines Cylinders, welcher die halbe zugeordnete Axe $DC = \frac{1}{2}b$ (Fig. 12.) zum Halbmesser seiner Grundfläche, und die ganze Zwergaxe $AB = a$ zu seiner Höhe hätte, wäre $= \frac{\pi b^2 a}{4}$: ein solcher Cylinder verhält sich demnach zum elliptischen Sphäroid, welches durch die Umdrehung der halben Ellipse ADB um ihre Zwergaxe AB entsteht, wie $\frac{1}{4} : \frac{1}{6}$, oder wie $3 : 2$. (2. Zus.). Ein anderer Cylinder, welcher die halbe Zwergaxe $AC = \frac{1}{2}a$ zum Halbmesser seiner Grundfläche, und die ganze zugeordnete Axe $DE = b$ zu seiner Höhe hätte, wäre seinem körperlichen Inhalt nach, $= \frac{\pi a^2 b}{4}$: also verhält sich auch dieser Cylinder zum elliptischen Sphäroid, welches durch die Umdrehung der halben Ellipse DBE um ihre zugeordnete Axe DE entsteht, wie $3 : 2$. (3. Zus.).

6. Zusatz.

Wenn die halbe zugeordnete Axe $CD = CA$ wird; so übergeht die Ellipse in die Kreislinie, und aus dem elliptischen Sphäroid ADBE wird eine Kugel: nach (2. Zus.) findet man also für $b = a$ den körperlichen Inhalt des

Kugel-

Kugelabschnitts MAm für jede Abscisse AP = x, $= \frac{1}{n}\pi(3ax^2 - 2x^3)$, und hieraus folgt für $x = \frac{1}{2}a$, die halbe Kugel $= \frac{\pi a^3}{12}$, und nun die ganze Kugel $= \frac{\pi a^3}{6}$, wie dieses aus andern Gründen bekannt ist.

7. Zusatz.

Wenn AQ (Fig. 20.) ein hyperbolischer Bogen ist; so hat man nach (97. §.) $y^2 = \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2}{a^2}x^2$: also ist der körperliche Inhalt des hyperbolischen Conoids QAP für jede Abscisse x = Ab. Fig. 20.

$$QAP = \frac{\pi b^2}{a^2}\int dx(ax + x^2) = \frac{\pi b^2}{6a^2}(3ax^2 + 2x^3).$$

8. Zusatz.

Wäre die Abscisse x = Ab = a so groß als die Zwergaxe der Hyperbel; so wäre das hyperbolische Conoid $QAP = \frac{5\pi b^2 a}{6}$ (7. Zus.).

9. Zusatz.

Die bey der Auflösung der vorigen Aufgabe gefundene Formul dient auch zur unmittelbaren Bestimmung jedes körperlichen Stückes RSQP, welches zwischen zwoen Ebenen RS, PQ bey einen solchen runden Körper liegen mag, wobey die Entfernung der einen Ebene RS von der Spitze A gegeben, etwa Aa = e, und die Entfernung der andern Ebene PQ unbestimmt, etwa Ab = x angenommen wird; denn

denn es ist auch jetzt $RSQP = \pi \int y^2 dx$, welches Integral aber so genommen werden muß, daß es für $x = Aa = e$ gleich Null werde. Z. B. es sey

$y^2 = Ax + Bx^2$; so ist $RSQP = \pi \int dx (Ax + Bx^2)$, mithin

$RSQP = \frac{A\pi}{2} x^2 + \frac{B\pi}{3} x^3 + C$; daher nach (28. §.)

$\frac{A\pi}{2} e^2 + \frac{B\pi}{3} e^3 + C = 0$, und $C = -\frac{A\pi}{2} e^2 - \frac{B\pi}{3} e^3$,

folglich $RSQP = \frac{A\pi}{2}(x^2 - e^2) + \frac{B\pi}{3}(x^3 - e^3)$.

Ist nun QAP ein paraboliſches Conoid; ſo iſt nach (1. Zuſ.) $A = p$, und $B = 0$: alſo iſt $RSQP = \frac{p\pi}{2}(x^2 - e^2)$.

Iſt aber QAP ein Stück des elliptiſchen Sphäroids; ſo iſt nach (2. Zuſ.) $A = \frac{b^2}{a}$, und $B = -\frac{b^2}{a^2}$: alſo

$RSQP = \frac{b^2\pi}{2a}(x^2 - e^2) - \frac{b^2\pi}{3a^2}(x^3 - e^3)$.

Iſt QAP ein Stück des hyperboliſchen Sphäroids; ſo iſt nach (7. Zuſ.) $A = \frac{b^2}{a}$, $B = \frac{b^2}{a^2}$; alſo $RSQP = \frac{b^2\pi}{2a}$

$(x^2 - e^2) + \frac{b^2\pi}{3a^2}(x^3 - e^3)$.

118. §. Aufgabe.

Fig. 21. Ein paraboliſcher Bogen AB (Fig. 21.), vom Scheitel-Puncte B an gerechnet, wird von der geraden Linie BC in C berührt: man ſoll den Inhalt des

des Körpers ABa bestimmen, welcher durch die Umdrehung des Bogens AB um die Tangente BC erzeugt wird.

Auflösung. Die Tangente BC am Scheitelpuncte B der Parabel steht auf ihrer Axe senkrecht; man nehme also an, es sey Bb ein Stück dieser Axe, welchem die rechtwinklichte Ordinate Ab, zu BC parallel, zugehört. Nun ist $Ab^2 = p.Bb$ (95. §.): setzt man also $BC = x$, und CA (zu Bb parallel) $= y$; so ist auch $x^2 = py$, mithin $y^2 = \frac{x^4}{p^2}$. Also ist für $BC = x$ allemal

$$ABa = \pi \int \frac{x^4}{p^2} dx = \frac{\pi}{5p^2} x^5 = \frac{\pi}{5} xy^2.$$

Der Cylinder Abda, welcher $x = BC$ zur Höhe, und $y = AC$ zum Halbmesser seiner Grundfläche hat, ist, seinem körperlichen Inhalte nach, $= \pi y^2 x$: der fünfte Theil dieses Cylinders giebt also den Cubik-Inhalt des Körpers ABa, welchen der paraboliſche Bogen AB, durch die Umdrehung um die auf der Axe Bb senkrechte Tangente BC erzeugt.

119. §. Aufgabe.

Es ist Bb ein Stück der Zwergaxe der Ellipse, welche am Scheitel-Puncte B von der geraden Linie BC berührt wird: man verlangt den Cubik-Inhalt des Körpers ABa zu wissen, welcher entsteht, indem der elliptische Bogen AB um die Tangente BC gedrehet wird.

Auflö-

Auflösung. Es sey demnach $BE=\frac{1}{2}a$ die halbe Zwergaxe, und $DE=\frac{1}{2}b$ die halbe zugeordnete Axe; ferner Ab auf BE senkrecht, und AC parallel zu BE; so ist nach (96. §. 9. Zus.)

$$Ab^2=\tfrac{1}{4}b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot Eb^2,$$ also für $Ab=BC=x$, u. $AC=y$,

$$x^2=\tfrac{1}{4}b^2-\frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}a-y)^2,$$ daher $y=\frac{1}{2}a-\frac{a}{2b}\sqrt{(b^2-4x^2)}$,

mithin $y^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{a^2}{b^2}x^2-\frac{a^2}{2b}\sqrt{(b^2-4x^2)}$: daher ist

nach (117. §.)

$$ABa=\int\pi y^2dx=\tfrac{1}{4}\pi a^2\int dx-\frac{\pi a^2}{b^2}\int x^2dx-\frac{\pi a^2}{2b}\int dx\sqrt{(b^2-4x^2)},$$

also erhält man nach (26. §. und 39. §. VIII. Form.)

$$ABa=\tfrac{1}{4}\pi a^2x-\frac{\pi a^2x^3}{3b}-\frac{\pi a^2x}{4b}\sqrt{(b^2-4x^2)}-\frac{\pi a^2b}{8}$$

$$\text{Arc. Tang}\frac{2x}{\sqrt{(b^2-4x^2)}}.$$

1. Zusatz.

Für $x=BG=DE=\frac{1}{2}b$ wäre also $DBH=\frac{1}{4}\pi a^2b$

$$-\frac{\pi a^2b}{24}-\frac{\pi a^2}{8}\sqrt{(b^2-b^2)}-\frac{\pi a^2b}{8}\text{Arc. T.}\frac{b}{\sqrt{(b^2-b^2)}}$$

nämlich $DBH=\frac{5}{24}\pi a^2b-\frac{\pi a^2b}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{5}{24}\pi a^2b-\frac{1}{16}\pi^2a^2b.$

Wenn Q den vierten Theil einer Kreislinie bedeutet, deren Halbmesser $=\frac{1}{2}b$ ist; so hat man $1:\pi=\frac{1}{2}b:2Q$, daher $\pi=\frac{4Q}{b}$, und für diesen Werth erhält man aus

der

der vorigen Formul DBH = $\frac{2}{3}\pi a^2 b - \frac{1}{4}\pi a^2 Q$. Es ist aber klar, daß $\frac{1}{3}\pi a^2 b$ den Cubik-Inhalt des Cylinders DEeH ausdrückt, welcher die halbe Zwergaxe BE = $\frac{1}{2}a$ zum Halbmesser seiner Grundfläche, und die halbe zugeordnete Axe DE = $\frac{1}{2}b$ zu seiner Höhe hat; ferner ist klar, daß $\frac{1}{4}\pi a^2 Q$ ebenfalls den Cubik-Inhalt eines Cylinders ausdrückt, welcher bey voriger Grundfläche eine solche Höhe hat, die dem vierten Theile der Kreislinie gleich ist, deren Halbmesser = BE = $\frac{1}{2}a$ ist: der Körper DBH, welcher durch die Umdrehung des elliptischen Quadranten BD um die zur zugeordneten Axe DE parallele Tangente BG erzeugt wird, ist also seinem Cubikinhalt nach so groß, als fünf Drittheile des Cylinders DEeH, weniger dem ganzen Cylinder, der bey gleicher Grundfläche Ee, den vierten Theil der mit dem Halbmesser DE = $\frac{1}{2}b$ beschriebenen Kreislinie zur Höhe hat.

2. Zusatz.

Weil die Ellipse in die Kreislinie übergeht, wenn die zugeordnete Axe b der Zwergaxe a gleich wird; so setze man im (1. Zus.) $r = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a$, wofür DBH = $\frac{5}{3}\pi r^3 - \pi r^2 . Q$ = $\frac{5}{3}\pi r^3 - \pi r^2 . BD$ erhalten wird: das heißt, wenn man fünf Drittheile des Cylinders DEeH nimmt, dessen Höhe BG, und der Halbmesser BE der Grundfläche so groß, als der Halbmesser r = ED des Kreisbogens BD ist, und davon den ganzen Cylinder abzieht, welcher bey gleicher Grundfläche Ee den vierten Theil BD der Kreislinie beym Halbmesser DE = r zur Höhe hat; so giebt die Differenz den Cubik-Inhalt des Körpers DBH, welchen der Kreis-

Qua

Quadrant BD, durch die Umdrehung um seine Tangente BG erzeugt.

3. Zusatz.

Wenn $BE=\frac{1}{2}b$ die halbe zugeordnete, und $DE=\frac{1}{2}a$ die halbe Zwergare der Ellipse ist, so ist nach (96. §. 9. Zus.)

$$AF^2=\tfrac{1}{4}b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot FE^2=\tfrac{1}{4}b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot BC^2:$$

für $BC=x$, $AC=y$, mithin $AF=\frac{1}{2}b-y$ ist also

$(\frac{1}{2}b-y)^2=\frac{1}{4}b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2$, und dieses giebt

$$y=\tfrac{1}{2}b-\frac{b}{2a}\sqrt{(a^2-4x^2)}, \text{ daher}$$

$$y^2=\tfrac{1}{2}b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2-\frac{b^2}{2a}\sqrt{(a^2-4x^2)}.$$

Wenn man also annimmt, daß der elliptische Bogen BA durch die Umdrehung um die, nun zur Zwergare DE parallele Tangente BE den Körper ABa erzeugt, so ist nach (117. §.) der Cubik-Inhalt dieses Körpers

$$ABa=\int\pi y^2dx=\tfrac{1}{2}\pi b^2\int dx-\frac{\pi b^2}{a^2}\int x^2dx-\frac{\pi b^2}{2a}\int dx\sqrt{(a^2-4x^2)}.$$

Weil diese Formul mit der bey der Auflösung der vorigen Aufgabe gefundenen vollkommen übereinstimmt, und in jene übergeht, wenn man nur die Buchstaben a und b verwechselt; so ist hier

$$ABa=\tfrac{1}{2}\pi b^2x-\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}-\frac{\pi b^2x}{4a}\sqrt{(a^2-4x^2)}-\frac{\pi b^2a}{8}$$

$$\cdot\text{Arc.Tang}\frac{2x}{\sqrt{(a^2-4x^2)}}.$$

Setzt

Setzt man voraus, daß $x = BG = DE = \frac{1}{2}a$ wird, in welchem Fall der elliptische Quadrant BD durch die Umdrehung um die Tangente BG den Körper DBH erzeugt, dessen Höhe BG der halben Zwergaxe $DE = \frac{1}{2}a$ gleich ist; so ist der Cubik-Inhalt dieses Körpers $DBH = \frac{1}{4}\pi b^2 a - \frac{1}{4}\pi b^2 Q$, wobey Q den vierten Theil der Kreislinie bedeutet, deren Halbmesser der halben Zwergaxe $DE = \frac{1}{2}a$ gleich ist (1. Zus.).

4. Zusatz.

Bey der Voraussetzung, daß BA ein hyperbolischer Bogen ist, und der Mittelpunct der Hyperbel sich in e befindet, dergestalt, daß Be die halbe Zwergaxe darstellt, worauf die am Scheitelpuncte B gezogene Tangente BG senkrecht steht; so läßt sich der Inhalt des Körpers ABa, welchen der Bogen AB durch die Umdrehung um die Tangente BG erzeugt, auf gleiche Art bestimmen. Denn es ist nach (97. §. 8. Zus.)

$$Ab^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot eb^2 - \frac{1}{4}b^2 \text{ : mithin für } eB = \frac{1}{2}a, AC = y, BC = x$$

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}a + y)^2 - \frac{1}{4}b^2; \text{ daher } y = \frac{a}{2b}\sqrt{(4x^2 + b^2)} - \tfrac{1}{2}a,$$

$$\text{und } y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{b^2}x^2 - \frac{a^2}{2b}\sqrt{(b^2 + 4x^2)}; \text{ also ist}$$

$$ABa = \int \pi y^2 dx = \frac{\pi a^2}{2}\int dx + \frac{\pi a^2}{b^2}\int x^2 dx - \frac{\pi a^2}{2b}\int dx\sqrt{(b^2 + 4x^2)}$$

und nun findet man nach (26. §. und 39. §. VII. Form.)

$$ABa = \frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^2 x^3}{3b^2} - \frac{\pi a^2 x}{4b}\sqrt{(b^2 + 4x^2)} - \frac{\pi a^2 b}{8}$$
$$\log(2x + \sqrt{(b^2 + 4x^2)}) + C.$$

Da aber ABa = o für x = BC = o wird; so ist nach (28. §.)

$$-\frac{\pi a^2 b}{8}\log b + C = o, \text{ und } C = \frac{\pi a^2 b}{8}\log. b; \text{ folglich}$$

$$ABa = \frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^2 x^3}{3b^2} - \frac{\pi a^2 x}{4b}\sqrt{(b^2+4x^2)} + \frac{\pi a^2 b}{8}$$
$$\log \frac{b}{2x+\sqrt{(b^2+4x^2)}}.$$

Hier war die Höhe x = BC ganz unbestimmt: setzt man, es sey $x = \frac{1}{2}b$ nämlich so groß, als die halbe zugeordnete Axe; so wird seyn

$$ABa = \frac{\pi a^2 b}{24}(7-3\sqrt{2}) + \frac{\pi a^2 b}{8}\log\sqrt{(2-1)}.$$

Von der Quadratur der Oberflächen derjenigen Körper, welche durch die Umdrehung gegebener Ebenen um ihre Axen entstehen.

120. §. Aufgabe.

Fig. 22. Wenn die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x = Aa, y = Qa einer krummen Linie AQD gegeben wird, den Quadratinhalt der runden Oberfläche desjenigen Körpers zu bestimmen, welcher durch die Umdrehung der krummen Linie AD um ihre Axe EB erzeugt wird (22. Fig.).

Auflösung. 1) Man bilde sich ein, daß die Abscisse Aa = x um ab = Δx, und dabey die Ordinate aQ = y

um

um $ks = \Delta y$ wächst, und daß an Q die Tangente EG gezogen sey, welche die Abscissenaxe in E und die Ordinate bk in r trifft; so wird während der Umdrehung der krummen Linie AQD um ihre Axe AB vom Bogen AQ ein unbestimmtes Stück AQP des von der ganzen Linie AQD erzeugten Körpers, und von der Tangente EQ ein Kegel EQP erzeugt werden. Die runde Oberfläche des Stückes AQP als eine Function F von x wächst um eine Differenz ΔF, welche die runde Oberfläche des Stückes PQkm ausdrücken würde, und eben diese Differenz ist allemal grösser, als die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels QokmvP, und zugleich allemal kleiner, als die Summe der runden Oberfläche des Kegelstückes PQrp und der Fläche der um den Körper DAC von der geraden Linie kr beschriebenen kreisförmigen Krone: da also für das Verhältniß des Halbmessers zur halben Peripherie $= 1 : \pi$ der Flächeninhalt dieser Krone $= \pi(2y + 2\Delta y + pm)pm$, die runde Oberfläche des Kegelstückes PprQ aber $= \pi(2y + \Delta y + pm)Pp$, und die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels PvmkoQ, $= \pi(2y + \Delta y)Pvm$ gefunden wird; so hat man

$$\Delta F > \pi(2y + \Delta y)Pvm.$$

$$\Delta F < \pi(2y + 2\Delta y + pm)pm + \pi(2y + \Delta y + pm)Pp.$$

2) Es mag aber y was immer für eine Function von x seyn; so kann man doch allemal $\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + N\Delta x^2$ setzen (6. §. 3. 4. Zus.).

3) Demnach ist $Pvm = \sqrt{(mq^2+Pq^2)} = \sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{2Ndy}{dx}\Delta x^3 + N^2\Delta x^4 + \Delta x^2\right)}$$

$$= \Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} + S\Delta x^2,$$

wo S irgend eine Function von Δx von der Form $\alpha+\beta\Delta x + \gamma\Delta x^2+\cdots$ bedeuten soll: also kann man $\pi(2y+\Delta y)Pvm = 2\pi y\Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} + Z\Delta x^2$ setzen, wenn Z eine solche Function von Δx bedeutet, welche die Form $\alpha+\beta\Delta x + \gamma\Delta x^2+\cdots$ hat.

4) Ferner ist $pq = \frac{Pq \cdot Pa}{aE}$ und $Pq = \Delta x, Pa = y, aE = \frac{ydx}{dy}$ (103. §. BD), mithin $pq = \frac{dy}{dx}\Delta x$: also ist $Pp = \sqrt{(pq^2+Pq^2)} = \Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}$, und $pm = pq - mq = \frac{dy}{dx}\Delta x - \Delta y = N\Delta x^2$ wegen (n. 2.). Hieraus und aus (n. 2.) erhellt die Richtigkeit folgender Ausdrückungen, wobey X, Y gewisse Functionen von Δx von der Form $\alpha+\beta\Delta x+\gamma\Delta x^2+\cdots$ bedeuten sollen.

$\pi(2y+2\Delta y+pm)pm = Y\Delta x^2$

$\pi(2y+\Delta y+pm)Pp = 2\pi y\Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} + X\Delta x^2.$

5) Aus (n. 1. 3. 4.) erhält man demnach für ΔF folgende Gränzen, welche allemal bestehen müssen, man mag Δx wie immer klein nehmen.

$$\Delta F > 2\pi y \Delta x \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} + Z\Delta x^2,$$

$$\Delta F < 2\pi y \Delta x \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} + (X+Y)\Delta x^2;$$

daher $\frac{\Delta F}{\Delta x} > 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} + Z\Delta x.$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} < 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} + (X+Y)\Delta x.$$

6) Und aus diesen Gränzen findet man nach (20. §.) die Formul, welche zur Bestimmung der runden Oberfläche QAP für jede Abscisse Aa = x dienen wird, sobald die Gleichung zwischen y und x bekannt ist: es wird nämlich seyn

$$d.QAP = 2\pi y dx \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} \text{ und}$$

$$QAP = 2\pi \int y dx \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}.$$

1. Zusatz.

Wenn AD die Parabel ist; so ist AQP ein unbestimmtes Stück des paraboliſchen Conoids, und man findet den Quadrat-Inhalt seiner runden Oberfläche für jede Abscisse x = Aa nach (95. §.): denn es ist

$$y^2 = px;\ 2ydy = pdx;\ \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y};\ dx = \frac{2ydy}{p};$$

also $QAP = 2\pi \int \frac{2y^2 dy}{p} \sqrt{\left(\frac{p^2}{4y^2}+1\right)}$

oder $QAP = \frac{2\pi}{p} \int y dy \sqrt{(p^2+4y^2)}$, mithin nach (26. §.

$$QAP = \frac{\pi}{6p}(p^2+4y^2)\sqrt{(p^2+4y^2)}+C.$$

Nun ist QAP = o, für x = Aa = o und y = aQ = o: also ist nach (28. §.)

$$\frac{\pi p^2}{6}+C=o;\quad C=-\frac{\pi p^2}{6},\ \text{mithin}$$

$$QAP=\frac{\pi}{6p}(p^2+4y^2)\sqrt{(p^2+4y^2)}-\frac{\pi p^2}{6}.$$

Hätte man dx beybehalten, und dy weggeschaft; so würde man gefunden haben.

$$QAP=2\pi\int y\,dx\sqrt{\left(\frac{p^2}{4y^2}+1\right)}=\pi\int dx\sqrt{(p^2+4y^2)},$$

oder $QAP=\pi\int dx\sqrt{(p^2+4px)}$, und nun nach (26. §. 2. Z.)

$$QAP=\frac{\pi(p+4x)}{6}\sqrt{(p^2+4px)}+C,\ \text{und (28. §.)}$$

$$\frac{\pi p^2}{6}+C=o;\quad C=-\frac{\pi p^2}{6},\ \text{mithin}$$

$$QAP=\frac{\pi(p+4x)}{6}\sqrt{(p^2+4px)}-\frac{\pi p^2}{6}.$$

2. Zusatz.

Fig. 12. Wenn die halbe Ellipse ADB (12. Fig.) um ihre Zwergaxe AB gedreht wird; so wird dadurch das elliptische Sphäroid ADBEA erzeugt, und man findet die runde Oberfläche seines Segments MAm für jede Abscisse AP = x vermittelst der Gleichung (96. §.): denn wenn man die Ordinate MP = y, die Zwergaxe 2a = AB, und die zugeordnete Axe 2b = DE setzt, statt a, b in (96. §.); so wird seyn

y^2

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)\text{: also}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)};\ dy = \frac{b(a-x)dx}{a\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

daher $d.MAm = 2\pi y dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}$

$$= \frac{2\pi b\sqrt{(2ax-x^2)}}{a}dx\sqrt{\left(\frac{b^2(a-x)^2}{a^2(2ax-x^2)} + 1\right)}$$

oder $d.MAm = \frac{2\pi b}{a}dx\sqrt{(a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)x^2)}$

$$= \frac{2\pi b\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2}\cdot dx\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{a^2-b^2} + 2ax - x^2\right)}.$$

Und für $c = \sqrt{(a^2-b^2)}$

$$d.MAm = \frac{2\pi bc}{a^2}dx\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)}:$$

$$\text{also } MAm = \frac{2\pi bc}{a^2}\int dx\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)}.$$

Nimmt man nun dieses Integral nach (38. §. 7. Zus. III. Form.); so ist

$$MAm = \frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{2x-2a}{4}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{4a^2b^2}{c^2} + 4a^2}{8}\text{Are Tang}\frac{2x-2a}{2\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)}}\right) + C$$

$$= \frac{\pi bc(x-a)}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)}$$

$$+ \frac{\pi b(b^2+c^2)}{c}\text{Are Tang}\frac{x-a}{\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)}} + C.$$

Nun ist MAm = o für x = o: also ist

$$-\pi b^2 + \frac{\pi b(b^2+c^2)}{c}\,\text{ArcTang}\,\frac{-c}{b} + C = o,$$

oder $$-\pi b^2 - \frac{\pi b(b^2+c^2)}{c}\,\text{ArcTang}\,\frac{c}{b} + C = o$$

und $$C = \pi b^2 + \frac{\pi b(b^2+c^2)}{c}\,\text{ArcTang}\,\frac{c}{b}.$$

Demnach ist

$$\text{MAm} = \pi b^2 + \frac{\pi bc(x-a)}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)} + \frac{\pi b(b^2+c^2)}{c}\left(\text{Arc. Tang}\,\frac{x-a}{\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + 2ax - x^2\right)}} + \text{Arc. Tang}\,\frac{c}{b}\right)$$

oder wegen $c^2 = a^2 - b^2$

$$\text{MAm} = \pi b^2 + \frac{\pi b(x-a)}{a^2}\sqrt{(a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)x^2)} + \frac{\pi ba^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\left(\text{ArcTang}\,\frac{(x-a)\sqrt{(a^2-b^2)}}{\sqrt{(a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)x^2)}} + \text{ArcTang}\,\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\right).$$

3. Zusatz.

Aus dieser Formul ergiebt sich die runde Oberfläche eines Segments MAm des elliptischen Sphäroids ADBEA für jede Abscisse x = AP; so lang x < AC = a ist, so lang ist x − a verneint, mithin ist auch die Tangente des ersten zwischen den Klammern befindlichen Bogens verneint, folglich

folglich muß man denſelben Bogen mit dem Zeichen (—) nehmen, alsdann aber bey ſeiner Tangente a — x ſtatt x—a ſetzen.

4. Zuſatz.

Setzt man x = AP = AC = a; ſo erhält man aus der gefundenen Formul die Oberfläche des halben Sphäroids ADE; und dieſe zweymal genommen giebt die Oberfläche des ganzen Sphäroids ADBEA, nämlich

$$ADE = \pi b x + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{Arc. Tang.} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b} \cdot$$

$$ADBEA = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{ArcTang} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b} \cdot$$

5. Zuſatz.

Für AC = CD oder a = b übergeht das elliptiſche Sphäroid in eine Kugel, wovon der Halbmeſſer a = b ſeyn ſoll: für b = a erhält man alſo aus (2. Zuſ.) die Oberfläche des Kugel-Segments MAm für jede Abſciſſe x = AP; aus (4. Zuſ.) aber die Oberfläche der halben DAE, und ganzen Kugel ADBEA, nämlich:

$$MAm = \pi b^2 + \pi b(x - b) + \frac{\pi b^3}{b\sqrt{(1-1)}} (\text{ArcTang } o + \text{ArcTo})$$

$$= \pi b x + \frac{\pi b^2 . o}{o} = \pi b x + \pi b^2 = \pi b (b + x)$$

$$ADE = 2\pi b^2; \quad ADBEA = 4\pi b^2.$$

6. Zuſatz.

Wird die halbe Ellipſe DBE um ihre zugeordnete Axe DE gedreht; ſo entſteht ebenfalls ein elliptiſches Sphäroid

DBEAD. Setzt man Dk = r, Q'k = s, die halbe Zwergaxe BC = a, und die halbe zugeordnete DC = b; so ist, 2a, 2b statt a, b in (117. §. 3. Zus.) genommen.

$$s^2 = \frac{2a^2}{b}r - \frac{a^2}{b^2}r^2 = \frac{a^2}{b^2}(2br - r^2);$$

$$s = \frac{a}{b}\sqrt{(2br - r^2)};\quad ds = \frac{a(b-r)dr}{b\sqrt{(2br - r^2)}}: \text{ also}$$

$$d.QDQ' = \frac{2\pi a\sqrt{(2br - r^2)}}{b}\cdot dr\sqrt{\left(\frac{a^2(b-r)^2}{b^2(2br - r^2)} + 1\right)}$$

$$= \frac{2\pi a}{b^2}\,dr\sqrt{(a^2b^2 - 2b(a^2 - b^2)r + (a^2 - b^2)r^2)}.$$

Und dieses nach (38. §. 7. Zus. II. Form.) integrirt, giebt

$$QDQ' = \frac{\pi a(r-b)}{b^2}\sqrt{(a^2b^2 - 2b(a^2 - b^2)r + (a^2 - b^2)r^2)}$$

$$+ \frac{\pi ab^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\log\left(r\sqrt{(a^2 - b^2)} - b\sqrt{(a^2 - b^2)}\right.$$

$$\left. + \sqrt{(a^2b^2 - 2b(a^2 - b^2)r + (a^2 - b^2)r^2)}\right) + C.$$

Aber für r = Dk = o wird QDQ' = o: also ist

$$-\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\log(-b\sqrt{(a^2 - b^2)} + ab) + C = o$$

$$C = \pi a^2 - \frac{\pi ab^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\log b(a - \sqrt{(a^2 - b^2)}) \text{ mithin}$$

$$QDQ' = \pi a^2 + \frac{\pi a(r-b)}{b^2}\sqrt{(a^2b^2 - 2b(a^2 - b^2)r + (a^2 - b^2)r^2)}$$

$$+ \frac{\pi ab^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\log\frac{\sqrt{(a^2b^2 - 2b(a^2 - b^2)r + (a^2 - b^2)r^2)} - (b-r)\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})}.$$

Diese Formul giebt demnach die Oberfläche des Segments QDQ' für jede Abscisse r = Dk. Setzt man

r =

$r = DC = b$; so erhält man daraus die Oberfläche des halben um die zugeordnete Axe DE beschriebenen elliptischen Sphäroids, und sie zweymal genommen giebt die Oberfläche des ganzen Sphäroids, nämlich

$$ADB = \pi a^2 + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \log \frac{b}{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}$$

$$= \pi a^2 + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \log \frac{a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b},$$

$$ADBEA = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \log \frac{a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}.$$

Um diese Formuln auf die Oberfläche einer Kugel anzuwenden, muß man $b = a$ setzen, wofür das elliptische, um die zugeordnete Axe DE beschriebene Sphäroid in eine Kugel übergeht, deren Halbmesser $= a$ ist: für die Oberfläche eines Kugel-Segments QDQ' erhält man nun, wegen $b = a$,

$$QDQ' = \pi a^2 + \pi a(r-a) + \frac{\pi a^2}{0} \log 1;$$ Aber $\operatorname{Log} 1 = 0$: also

$$QDQ' = 2\pi a^2 + \pi ar - \pi a^2 = \pi a(a+r).$$

Der halben Kugel Oberfläche $= 2\pi a^2$ für $r = a$,

und der ganzen $= 4\pi a^2$.

7. Zusatz.

Wenn EB (22. Fig.) die Zwergaxe der Hyperbel (eigentlich soll es nur die verlängerte Zwergaxe seyn) ist, und man annimmt, ihr Mittelpunct sey in E, und der Scheitel in A; so wird durch die Umdrehung des hyperbolischen Bogens AQ um AB das hyperbolische Conoid QAP erzeugt, Fig. 22

dessen

deſſen runde Oberfläche man für jede Abſciſſe $u = Ea$ ſo findet. Sey $Qa = y$, die Zwergaxe $= 2a$, mithin $EA = a$, und die zugeordnete Axe $= 2b$; ſo iſt nach (97. §. 8. Zuſ.) für $2a$, $2b$ ſtatt der dortigen a, b.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}u^2 - b^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2): \text{ alſo}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(u^2 - a^2)};\quad dy = \frac{-bdu}{a\sqrt{(u^2 - a^2)}}.$$

Daher $d.QAP = \frac{2\pi b\sqrt{(u^2-a^2)}}{a} \cdot du\sqrt{\left(\frac{b^2u^2}{a^2(u^2-a^2)} + 1\right)}$

$$= \frac{2\pi b}{a^2}\, du\sqrt{((a^2+b^2)u^2 - a^4}).$$

Nach (39. §. VII. Form.) iſt alſo

$$QAP = \frac{2\pi b}{a^2}\left(\tfrac{1}{2}u\sqrt{((a^2+b^2)u^2 - a^4)}\right.$$

$$\left. - \frac{a^4}{2\sqrt{(a^2+b^2)}}\log\left(u\sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt{((a^2+b^2)u^2 - a^4)}\right)\right) + C$$

$$= \frac{\pi bu}{a^2}\sqrt{((a^2+b^2)u^2 - a^4)} - \frac{\pi ba^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\log\left(u\sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt{((a^2+b^2)u^2 - a^4)}\right) + C.$$

Es wird aber $QAP = o$ für $u = EA = a$: alſo iſt

$$\pi b^2 - \frac{\pi ba^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\log a\left(b + \sqrt{(a^2+b^2)}\right) + C = o$$

$$C = \frac{\pi ba^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\log a\left(b + \sqrt{(a^2+b^2)}\right) - \pi b^2: \text{ alſo}$$

$$QAP = \frac{\pi bu}{a^2}\sqrt{((a^2+b^2)u^2 - a^4)} - \pi b^2$$

$$+ \frac{\pi ba^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\log\frac{ab + a\sqrt{(a^2+b^2)}}{u\sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt{((a^2+b^2)u^2 - a^4)}}.$$

8. Zu-

8. Zusatz.

Bey der Voraussetzung (118. §.), wo AC=y, BC=x, (21. Fig.), und $x^2=py$ war, erhält man:

$$x=\sqrt{py};\ dx=\frac{pdy}{2\sqrt{\ }};\ \frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{py}}{p};\ \frac{dy^2}{dx^2}=\frac{4y}{p};$$

da also $d.ABa=2\pi y dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}$ seyn soll; so ist nun

$$d.ABa=2\pi y.\frac{pdy}{2\sqrt{py}}.\sqrt{\left(\frac{4y}{p}+1\right)}=\pi y^{\frac{1}{2}}dy\sqrt{(4y+p)}.$$

Nimmt man dieses Integral nach (39. §. IX. Form.); so ist

$$ABa=\frac{\pi(8y+p)\sqrt{(4y^2+py)}}{16}-\frac{\pi p^2}{64}\log\left(2y+\frac{p}{4}+\sqrt{(4y^2+py)}\right)+C.$$

Da nun ABa=o für x=BC=o und y=AC=o wird; so ist

$$-\frac{\pi p^2}{64}\log\frac{p}{4}+C=o,\text{ und }C=\frac{\pi p^2}{64}\log\frac{p}{4}:\text{ also}$$

$$ABa=\frac{\pi(8y+p)\sqrt{(4y^2+py)}}{16}-\frac{\pi p^2}{64}\log\frac{8y+p+4\sqrt{(4y^2+py)}}{p}.$$

Diese Formul giebt die runde Oberfläche des Körpers ABa, welchen der paraboliſche Bogen AB durch die Umdrehung um die auf der paraboliſchen Axe BE senkrecht ſtehende Tangente BG erzeugt, und wovon die Höhe x=BC $=\sqrt{py}$ ist, für y=AC. Nimmt man an, es soll x=BC=p seyn; so ist auch y=p, mithin die runde Oberfläche

$$ABa=\frac{9\pi p^2\sqrt{5}}{16}-\frac{\pi p^2}{64}\log(9+4\sqrt{5}).$$

9. Zu

9. Zusatz.

Zur Bestimmung der runden Oberfläche des Körpers ABa, welchen ein elliptischer Bogen AB durch die Umdrehung um die auf der Zwergare senkrecht stehende Tangente BG erzeugt, dient die Formul (119. §.) für BC=x, AC=y, die halbe Zwergare BE=½a, und die halbe zugeordnete DE=½b, nämlich

$$y=\tfrac{1}{2}a-\frac{a}{2b}\sqrt{(b^2-4x^2)}\text{: also }\frac{dy}{dx}=\frac{2ax}{b\sqrt{(b^2-4x^2)}}.$$

Daher

$$d.ABa=2\pi\left(\tfrac{1}{2}a-\frac{a}{2b}\sqrt{(b^2-4x^2)}\right)dx\sqrt{\left(\frac{4a^2x^2}{b^2(b^2-4x^2)}+1\right)}$$

$$=\frac{\pi a}{b}dx\frac{\sqrt{(b^4+(4a^2-4b^2)x^2)}}{\sqrt{(b^2-4x^2)}}-\frac{\pi a}{b^2}dx\sqrt{(b^4+(4a^2-4b^2)x^2)}\text{:}$$

$$\text{also }ABa=\frac{\pi a}{b}\int dx\frac{\sqrt{(b^4+4(a^2-b^2)x^2)}}{\sqrt{(b^2-4x^2)}}$$

$$-\frac{\pi a}{b^2}\int dx\sqrt{(b^4+4(a^2-b^2)x^2)}.$$

Die runde Oberfläche ABa kann man daher weder durch die Logarithmen, noch durch die Kreisbogen vollkommen angeben: das zweyte Integral läßt sich zwar nach (39. §. VII. Form.) bestimmen, woraus schon erhellt, daß dieselbe Oberfläche zum Theil von Logarithmen abhängt, die man durch eine Näherung bestimmen würde, wenn man das erste Integral nach (26. §. 4. Zus.) durch eine Reihe suchte.

10. Zusatz.

Für BE = DE, mithin $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$ wäre BD der Quadrant eines Kreises, der $\frac{1}{2}a$ zum Halbmesser hätte, und dafür fände man aus (9. Zus.)

$$ABa = \pi a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - 4x^2)}} = \pi a \int dx : \text{also nach (34. §.)}.$$

$$ABa = \frac{\pi a^2}{2} \text{ Arc. Sin } \frac{2x}{a} - \pi ax.$$

Dieses wäre demnach die runde Oberfläche des Körpers ABa, welchen ein Kreisbogen BA durch die Umdrehung um seine Tangente BG erzeugte. Da aber der hier gebrauchte Sinus für den Halbmesser = 1 gilt; so dividire man denselben Bogen durch den Halbmesser $\frac{1}{2}a$, um ihn in einen gleichgültigen Kreisbogen zu verwandeln, dessen Halbmesser $\frac{1}{2}a$ ist, und dann wird seyn

$$ABa = \pi a \text{ Arc. Sin} \frac{2x}{a} - \pi ax.$$

Für $x = \frac{1}{2}a = BG = BE = DE$ ist $DBH = \pi a \text{ Arc.Sin } 1.$

$$- \frac{\pi a^2}{2} = \pi a . BAD - \frac{\pi a^2}{2}.$$

11. Zusatz.

Wenn ein hyperbolischer Bogen BA um die gerade Linie BG gedreht wird, welche die Hyperbel am Scheitelpuncte B berührt, mithin auf der Zwergaxe senkrecht stehet; so ist für AC = y, BC = x nach (119. §. 4. Zus.)

$$y = \frac{a}{2b}\sqrt{(b^2 + 4x^2)} - \frac{1}{2}a; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{b\sqrt{(b^2 + 4x^2)}}:$$

also

$$d.ABa=2\pi\left(\frac{2}{2b}\sqrt{(b^2+4x^2)}-\frac{1}{2}a\right)dx\sqrt{\left(\frac{4a^2x^2}{b^2(b^2+4x^2)}+1\right)}$$

$$=\frac{2\pi}{b^2}dx\sqrt{(b^4+4(a^2+b^2)x^2)}-\frac{\pi a}{b}dx\frac{\sqrt{(b^4+4(a^2+b^2)x^2)}}{\sqrt{(b^2+4x^2)}},$$

daher $$ABa=-\frac{\pi a}{b}\int\frac{dx\sqrt{(b^4+4(a^2+b^2)x^2)}}{\sqrt{(b^2+4x^2)}}$$

$$+\frac{\pi a}{b^2}\int dx\sqrt{(b^4+4(a^2+b^2)x^2)}.$$

Und von dieſen Integralien gilt das, was in (9. Zuſ.) von ähnlichen Integralien geſagt worden iſt.

Verzeichnungen der Parabel, Ellipſe und Hyperbel, nebſt Erzeugung derſelben am Kegel.

121. §. Aufgabe.

Man ſoll die Parabel verzeichnen, wofür auf einer geraden Linie VX (11. Fig.) der Brennpunct F nebſt dem Scheitelpuncte A gegeben iſt. Fig. 11.

Auflöſung. Weil AX die Axe, und A der Scheitel der Parabel ſeyn ſoll; ſo nehme man von A an gegen X ſo viel man will Puncte P, und ſetze an jeden von ihnen eine auf VX ſenkrechte Linie Mm von unbeſtimmter Länge: man wird demnach ſo viele Senkſtriche Mm, als Puncte P haben, und nun wird alles darauf ankommen, an jedem Senkſtriche zween von P gleich weit entfernte Puncte M, m zu beſtimmen, welche in der verlangten Parabel liegen mögen.

Dem

Dem zufolge mache man AF = AT, sodann nehme man für jeden Punct P den Abstand TP zum Halbmesser, und beschreibe damit aus dem gegebenen Brennpuncte F einen Kreis, der den Senkstrich Mm in M und m schneiden mag; so gehören die Puncte M, m zur verlangten Parabel, welche daher durch dergleichen Puncte M, m allemal wird verzeichnet werden können, und zwar desto genauer, je näher die Puncte P neben einander liegen werden.

Beweis. Die krumme Linie, welche durch die Puncte M, m gezogen wird, hat die Eigenschaft, daß für jeden Punct M, die Entfernung des Brennpuncts davon FM = TP = TF + FP = 2AF + FP oder FM = AP + AF ist, welche Eigenschaft der Parabel zugehört (100. §. 3. Zus.).

Zusatz.

Für gegebenen Parameter $p = \alpha\beta$, und gegebene Axe VX findet man den Scheitel A, und Brennpunct F, wofern man $AF = \frac{1}{4}p$ machet (100. §. 1. Zus.): sodann läßt sich die Parabel auf die angeführte Art verzeichnen.

122. §. Aufgabe.

Die Ellipse zu verzeichnen, wenn ihre beyden Axen bekannt sind. Fig. 12.

Auflösung. 1) Die grössere Axe sey AB (12. Fig.): man halbire sie in C, und setze an C die kleinere Axe DE senkrecht auf AB, daß DE ebenfalls in C halbirt werde; sodann beschreibe man aus C mit dem Halbmesser CA = CB die halbe Kreislinie AMB. Nun nehme man auf der Axe

AB so viel man will Puncte P, und ziehe an jedem von ihnen eine auf AB senkrechte Ordinate PM′: auf jeder solchen Ordinate soll nun ein Punct M der verlangten Ellipse liegen, mithin muß man sehen, wie dergleichen Puncte M zu bestimmen sind, damit durch sie die halbe Ellipse AMαB verzeichnet werden könne; denn die andere Hälfte Amq′B kann hierauf durch Puncte m gezogen werden, welche durch die einmal gefundenen Puncte M dergestalt bestimmt sind, daß an jeder durch einen Punct P der Axe AB gehenden Sehne MP=mP ist (96. §. 6. Zus.).

Dem zufolge suche man die vierte Proportionallinie zu AC, CD und jeder Ordinate PM′ des über AB beschriebenen Kreises, hierauf trage man sie von P an auf dieselbe Ordinate PM′, z. B. daß AC:CD=PM′:PM wird; so gehört der Punct M zur Ellipse.

Beweis. Sey MP=y, CP=u; so soll seyn $y^2=\frac{1}{4}b^2-\frac{b^2}{a^2}u^2$ für a=AB, und b=DE (96. §. 9. Zus.), welche Gleichung auch wirklich Statt findet. Denn bey der Kreislinie AM′B ist $M'P^2=AC^2=CP^2$ (92. §.) $=\frac{1}{4}AB^2-CP^2=\frac{1}{4}a^2-u^2$. Es ist aber AC:DC=M′P:MP, vermöge der Voraussetzung, mithin auch $\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}b=M'P:y$, und nun $\frac{1}{4}a^2:\frac{1}{4}b^2=M'P^2:y^2$, daher $M'P^2=\frac{a^2y^2}{b^2}$: also ist $\frac{a^2y^2}{b^2}=\frac{1}{4}a^2-u^2$, mithin $y^2=\frac{1}{4}b^2-\frac{b^2}{a^2}u^2$.

II) Puncte

II) Puncte M, wodurch die Ellipse gehen soll, können auch so, durch gegebene Axe bestimmt werden. Nachdem man, wie oben, die halbe Kreislinie AM'B wird beschrieben haben, trage man die kleinere Axe DE von B an auf dieselbe Kreislinie, und merke den Punct k, wo sie sich endigt: hierauf nehme man die Hälfte der Entfernung Ak, und trage dieselbe von C an auf AC und CB, etwa in CF und Cf; so werden F, f die Brennpuncte der verlangten Ellipse seyn. Denn es ist, vermöge der Voraussetzung, $CF=Cf=\frac{1}{2}Ak$; und bey der Kreislinie AM'B ist $Ak^2=AB^2-Bk^2=a^2-b^2$: also $CF=Cf=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b^2)}$ (101. §. 1. Zus.).

Sind die Brennpuncte F, f bestimmt; so nehme man jedes beliebige Stück der Axe AB, etwa $A\gamma > AF$; beschreibe hierauf mit dem Halbmesser $=A\gamma$ aus F, und mit dem Halbmesser $=B\gamma$ aus f Kreisbogen, die einander irgendwo in M schneiden werden; so wird allemal $FM+fM=AB$, mithin M ein Punct der Ellipse seyn (101. §. 4. Zus.).

III) Nach diesem Grund läßt sich die Ellipse aus beyden Brennpuncten F, f auf eine mechanische Art beschreiben: man darf nämlich nur einen Faden nehmen, dessen Länge der Zwergaxe AB gleich ist; hierauf befestige man seine Enden an Brennpuncten F, f, und dehne ihn mit Hülfe eines Stiftes dergestalt aus, daß er zwo Seiten FM, fM des Dreyecks abgebe, das die Entfernung Ff beyder Brennpuncte von einander zur Grundlinie hat. Wird nun der Stift herumgeführt, und hiebey der Faden immer ausgedehnt

erhalten; so wird der Stift von A an bis B die eine, und von B an über E bis A die andere Hälfte der Ellipse beschreiben.

123. §. Aufgabe.

Für gegebene Axen die Hyperbel zu verzeichnen.

Fig. 81. **Auflösung.** I) Die grössere Axe sey AB in C halbirt (18. Fig.), und darauf sey die kleinere Axe DE senkrecht gelegt, und ebenfalls in C halbirt, nämlich DC = EC; so sind A, B die beyden Scheitelpuncte der Hyperbel, und nun muß man sehen, auf was für eine Art sich Puncte M bestimmen lassen, wodurch der Gang der hyperbolischen Aeste (97. §. 5. Zus.) bestimmt wird. Für jede beliebige Abscisse AQ soll es nämlich eine rechtwinklichte Ordinate QM geben, deren oberster Punct M in der verlangten Hyperbel liegt, und diese Ordinate wird für jede Abscisse AQ so gefunden.

Am Scheitelpuncte A errichte man eine gerade Linie Aβ von unbestimmter Länge senkrecht auf AB. Aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser = CQ beschreibe man nun eine Kreislinie, welche Aβ irgendwo in α schneiden wird, und suche hierauf die vierte Proportionallinie nach beyden Axen AB, ED und Aα; so wird sie die verlangte Ordinate QM geben.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung ist AB : DE = Aα : MQ: setzt man also AB = a, DE = b, MQ = y; so ist $y = \frac{A\alpha \cdot b}{a}$ und $y^2 = \frac{A\alpha^2 \cdot b^2}{a^2}$. Nun aber ist bey der Kreislinie Qα allemal $A\alpha^2 = CQ^2 - CA^2$ (92. §.)

=

$= CQ^2 - \frac{1}{4}a^2$: wenn daher $CQ = u$ ist; so hat man $A\alpha^2 = u^4 - \frac{1}{4}a^2$, und nun $y^2 = \frac{b^2}{a^2}u^2 - \frac{1}{4}b^2$, mithin ist $MQ = y$ die Ordinate der verlangten Hyperbel (97. §. 8. Zus.).

II) Wenn man am Endpuncte A der einen Axe BA die andere $DE = A\alpha$ senkrecht auf AB legt, hernach die Hypothenuse αB ziehet; so ist $\alpha B = \sqrt{(AB^2 + \alpha A^2)}$: man nehme also $\frac{1}{2}\alpha B$, und mache $CF = Cf = \frac{1}{2}\alpha B$ (16. Fig.); so werden F, f beyde Brennpuncte der Hyperbel seyn (102. §. 1. Zus.) Will man nun Puncte M bestimmen, welche in der verlangten Hyperbel liegen; so nehme man eine beliebige Abscisse $A\gamma > AF$, und beschreibe aus dem Brennpuncte F mit dem Halbmesser $FM = A\gamma$ einen Kreisbogen; und einen andern Kreisbogen beschreibe man aus dem andern Brennpuncte f mit dem Halbmesser $fM = B\gamma$. Denn die auf diese Art beschriebenen Kreisbogen werden einander irgendwo in M schneiden, und eben der Durchschnittspunct M wird ein Punct der verlangten Hyperbel seyn: es ist nämlich $fM - FM = B\gamma - A\gamma = BA$ (102. §. 3. Zus.).

124. §. Aufgabe.

Ein gerader Regel wird durch einen auf seiner Fig. 23.
Oberfläche gegebenen Punct E (19. Fig.) nach einer ebenfalls gegebenen Richtung EF mit einer Ebene geschnitten; man soll eine Gleichung für den Schnitt FNEMF zwischen seinen rechtwinklichten Coordinaten bestimmen.

Auflösung. 1) Der Winkel, welchen die Seiten des Kegels an seiner Spitze einschliessen, sey $BAC = \alpha$; die Entfernung aber des Puncts E, durch welchen der Schnitt geschieht, von der Spitze A sey $EA = e$, und der Winkel, welchen an E die Richtung EF des Schnitts mit der Seite AC einschließt, sey $FEC = \beta$.

2) Nun bilde man sich eine durch die Spitze A geführte und auf der Ebene des Schnitts FNEMF senkrechte Ebene BAC ein; die Linie, wo diese Ebene und die Ebene des Schnitts FNEMF einander schneiden, sey EF. Diese nehme man für die Abscissenaxe, und E für den Anfangspunct der Abscissen an, mithin sey $EP = x$ eine Abscisse, und $PM = y$, in der Ebene des Schnitts FNEMF, die ihr zugehörige rechtwinklichte Ordinate. Wird nun durch P in der Ebene BAC die gerade Linie GH senkrecht auf die Kegels-Axe AD gezogen; so ist GH der Durchmesser eines kreisförmigen zur Kegels-Grundfläche parallelen Durchschnitts des Kegels, dessen Umfang durch den Punct M dergestalt geht, daß MP auf GH senkrecht ist: also ist $PM^2 = y^2 = GP \cdot PH$.

3) Zieht man aber vom Puncte E in der Ebene BAC die gerade Linie EI zu GH, Ee zu AB parallel; so wird man haben $PHE = AEI = 90° - \frac{1}{2} EAI = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, mithin

$$PH = PE \cdot \frac{\operatorname{Sin} PEH}{\operatorname{Sin} PHE} = \frac{x \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\alpha}.$$

4) Und

4) Und im Dreyecke EAI, dessen Seite $AE = AI = e$ seyn soll, wird seyn:

$$EI = AE \cdot \frac{\text{Sin } EAI}{\text{Sin } AIE} = \frac{e \text{ Sin } \alpha}{\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha}.$$

5) Ferner ist im Dreyecke PeE der Winkel $PEe = PEH - eEH = PEH - GAH = \beta - \alpha$, und $PeE = 180° - AEI$, mithin $\text{Sin } PeE = \text{Sin } AEI = \text{Cos } \frac{1}{2}\alpha$: also ist

$$Pe = EP \cdot \frac{\text{Sin } PEe}{\text{Sin } PeE} = \frac{x \text{ Sin } (\beta - \alpha)}{\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha}.$$

6) Da also $Ge = EI$, daher $GP = EI - Pe$ seyn muß; so erhält man aus (n. 4 5.).

$$GP = \frac{e \text{ Sin } \alpha - x \text{ Sin } (\beta - \alpha)}{\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha}.$$

7) Und nun findet man aus (n. 2. 3. 6.) die verlangte Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $x = EP$, $y = MP$ des Kegelschnittes FNEMF, wie sie folgt.

$$y^2 = x \cdot \frac{e \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } \beta}{(\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha)^2} - x^2 \cdot \frac{\text{Sin } \beta \text{ Sin } (\beta - \alpha)}{(\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha)^2}.$$

1. Zusatz.

Für $e = 0$, und $\beta < \alpha$ wäre $\text{Sin } (\beta - \alpha)$ verneint, mithin $y = \frac{\pm x}{\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha} \sqrt{(-\text{Sin } \beta \text{ Sin } (\beta - \alpha))}$ wäre allemal eine mögliche Grösse: es ist eine Gleichung von der ersten Ordnung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten eines geradlinichten Dreyecks, welches der unter diesen Voraussetzungen durch die Spitze A fortgehende Schnitt nothwendig bilden muß.

2. Zusatz.

Setzt man aber $e=0$ und $\beta=\alpha$; so giebt die gefundene Gleichung $y=0$, wie es auch seyn muß, weil nun der Schnitt durch die Spitze A nach der Richtung der Seite AB geschehen, mithin die Abscissenaxe EF auf der Oberfläche des Kegels liegen müßte: eigentlich ist es kein Schnitt, sondern die Seite selbst des Kegels.

3. Zusatz.

Wenn aber nicht $e=0$, sondern $e=AE$ eine wirkliche, wie immer kleine oder grosse Entfernung von A ist; so hat man entweder $\beta<\alpha$ oder $\beta>\alpha$, oder $\beta=\alpha$. Für $\beta=\alpha$ ist $\mathrm{Sin}(\beta-\alpha)=0$, mithin $y^2=\frac{e\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{(\mathrm{Col}\,\frac{1}{2}\alpha)^2}\cdot x$: der Kegelschnitt FGEM, welchem diese Gleichung zugehört, ist in diesem Fall zur Seite AB parallel, und eine wirkliche Parabel (95. §.), deren Parameter $p=\frac{e\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{(\mathrm{Col}\,\frac{1}{2}\alpha)^2}$ seyn muß.

4. Zusatz.

Ist aber $\beta>\alpha$; so liegt zwar der Kegelschnitt unter A, er schneidet aber die Seite AB irgendwo in F, und die oben (bey der Auflös. der vor. Aufg.) gefundene Gleichung zeigt an, daß er eine Ellipse ist (96. §.). Setzt man hingegen $\beta=90°+\frac{1}{2}\alpha$; so liegt der Schnitt in der Richtung EI, mithin ist er ein Kreis, und dafür verwandelt sich die obige Gleichung in $y^2=2e\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\alpha\,.\,x-x^2$, weil $\mathrm{Sin}\,(\beta-\alpha)=\mathrm{Col}\,\frac{1}{2}\alpha=\mathrm{Sin}\,\beta$, daher $\frac{\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\beta-\alpha)}{(\mathrm{Col}\,\frac{1}{2}\alpha)^2}=\frac{(\mathrm{Col}\,\frac{1}{2}\alpha)^2}{(\mathrm{Col}\,\frac{1}{2}\alpha)^2}=1$,

und

und $\frac{\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta}{(\text{Cof}\,\frac{1}{2}\alpha)^2} = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cof}\,\frac{1}{2}\alpha} = 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\alpha$ (I. B. 156. §. 4. Zuſ. XIV.) ſeyn muß.

5. Zuſatz.

Wenn man endlich annimmt, es ſey $\beta < \alpha$ oder FEC < FAC; ſo muß der Kegelſchnitt durch die Grundfläche des Kegels gehen; die für ihn oben gefundene Gleichung bleibt ungeändert, nur das zweyte Glied muß nun bejahet ſeyn, wegen des verneinten Sinus, der dem nun verneinten Bogen $\beta - \alpha$ zugehört, und eben dadurch zeige dieſelbe Gleichung an, daß der Kegelſchnitt GNEM für $\beta < \alpha$ eine Hyperbel iſt (97. §.).

6. Zuſatz.

Aus (3. 4. 5. Zuſ.) erhellet demnach die Urſache, warum die bey den vorhergehenden Unterſuchungen betrachteten krummen Linien, nämlich die Parabel, Ellipſe, und Hyperbel, Kegelſchnitte genannt werden.

Merkwürdigſte Eigenſchaften der gemeinen Cykloide.

125. §. Erklärung.

Der Durchmeſſer AB eines Kreiſes (Fig. 24.) ſtehe auf der geraden Linie BC ſenkrecht: man bilde ſich nun ein, daß derſelbe Kreis ANBA ſich auf derſelben geraden Linie BC gegen C zu fortwälzt, bis der Durchmeſſer AB in die verkehrte auf BC ebenfalls ſenkrechte Lage FC kömmt, dergeſtalt, daß nun A in C und B in F ſich befinde; ſo iſt der Weg AMC, Fig. 24.

welchen der Punkt A beſchrieben hat, die gemeine Cykloide, oder die Radlinie; BC iſt ihre Grundlinie, und ANBA heißt der Erzeugungs-Kreis.

1. Zuſatz.

Der Kreis ANBA kann ſich auch auf der entgegengeſetzten Seite über der nach B verlängerten geraden Linie CB fortwälzen, in welchem Fall der Punct A auch auf der andern Seite eine Linie AC beſchreiben würde; dieſe beyden Linien machen eigentlich die Radlinie aus, wovon demnach die Hälfte AC ausdrückt.

2. Zuſatz.

Offenbar iſt es, daß die Grundlinie BC = ANB, mithin ſo groß ſeyn muß, als die halbe Peripherie des Erzeugungs-Kreiſes. Wenn man aber das aufmerkſam erwäget, was während der Fortwälzung des Erzeugungs-Kreiſes gegen C zu geſchieht; ſo wird man leicht einſehen, daß in jedem Augenblicke ein neuer Durchmeſſer des Erzeugungs-Kreiſes ſenkrecht auf BC zu ſtehen kömmt, und daß der unterſte Punct dieſes Durchmeſſers von dem allmählig ſteigenden Puncte B ſo weit abſtehen muß, als ſein oberſter Punct von dem allmählig ſinkenden Puncte A abſteht: wenn wir alſo annehmen, daß der Erzeugungs-Kreis in eine beliebige Stelle oMbio gekommen iſt, ſo iſt bo der auf Bc ſenkrecht ſtehende Durchmeſſer, der Punct A iſt in die Stelle i gekommen, mithin iſt der Bogen bi = Bo, folglich wegen BC = bio iſt auch io = oC.

3. Zu-

3. Zusatz.

Zieht man demnach MD zu BC und Md zu AB parallel; so muß BP = Mo = Co + 2od seyn; also ist AP = APB − PB = BC − PB (2. Zus.) = DM + do + oC − PB = MP + 2do + oC − BP. Es ist daher AP = MP + 2do + oC − oC − 2od = MP. Das heißt, man mag aus was immer für einem Puncte M die zur Grundlinie CB parallele MD ziehen, welche den Umfang des Erzeugungs-Kreises in P schneiden wird; so ist doch allemal der Bogen AP so groß, als die gerade Linie PM.

4. Zusatz.

Um eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AD = x und MD = y zu bestimmen, setze man den Halbmesser des Erzeugungs-Kreises AE = r; so ist $DP = \sqrt{(2rx - x^2)}$: da also MD = DP + PM = DP + AP (3. Zus.), und AP der Bogen ist, welchem DP als Sinus zugehört; so muß seyn

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)} + \text{Arc. Sin} \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Es ist aber einleuchtend, daß der hier vorhandene Sinus und Bogen für den Halbmesser r = AE gelten: wenn man also dieselben auf den Halbmesser = 1 zurückführen will; so muß man den Sinus mit r dividiren und den Bogen damit multipliciren. Für den Halbmesser = 1 wird demnach seyn:

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)} + r \,\text{Arc. Sin} \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$$

$$= \sqrt{(2rx - x^2)} + r \,\text{Arc. Sin} \sqrt{\frac{x}{r}}.$$

5. Zuſatz.

Hieraus findet man

$$dy = d\sqrt{(2rx - x^2)} + r\,d\,\text{Arc.Sin v}\frac{x}{r}.$$

$$\text{aber } d\sqrt{(2rx - x^2)} = \frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$\text{und } r\,d\,\text{Arc.Sin v}\frac{x}{r} = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} \text{ nach (22. §. 5. Z.):}$$

$$\text{alſo } dy = \frac{(2r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{dx\sqrt{(2r-x)}}{\sqrt{x}}.$$

Nach (112. §.) kann man demnach den Bogen AM für jede Abſciſſe AD = x auf folgende Art beſtimmen.

Es iſt

$$d.AM = dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} = dx\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}+1\right)} = dx\sqrt{\frac{2r}{x}};$$

$$\text{alſo } AM = \int dx\sqrt{\frac{2r}{x}} = 2\sqrt{2rx}.$$

Für x = AB = 2r übergeht der Bogen AM in AC: es iſt alſo AC = 4r, oder die halbe Cykloide AC iſt zweymal ſo groß als der Durchmeſſer AB, und viermal ſo groß als der Halbmeſſer AE des Erzeugungs-Kreiſes.

6. Zuſatz.

Nach (116. §.) kann man den Raum MDA für jede Abſciſſe AD = x auf dieſe Art quadriren. Wegen (4. Zuſ.) wird nämlich ſeyn:

MDA

$$MDA = \int dx \sqrt{(2rx - x^2)} + r \int dx \text{ Arc. Sin.v. } \frac{x}{r}.$$

$$\int dx \sqrt{(2rx - x^2)} = \tfrac{1}{2}(x - r)\sqrt{(2rx - x^2)} + \tfrac{1}{2} r^2 \text{ Arc. Tang. } \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} \text{ (39. §. X.)}$$

$$r \int dx \text{ Arc.Sin.v} \frac{x}{r} = r \text{ Arc.Sin.v.} \frac{x}{r} \int dx - r \int \text{Arc.Sin.v.} \frac{x}{r} \int dx \text{ (38. §.)}$$

$$= rx \text{ Arc.Sin.v.} \frac{x}{r} - r \int \frac{x dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} \text{ (22. §. 5. Zuſ.)}$$

$$= rx \text{ Arc.Sin.v.} \frac{x}{r} + r\sqrt{(2rx - x^2)} - r^2 \text{ Arc.Tang} \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} \text{ (41. §. 2. Zuſ.)}$$

alſo $MDA = \tfrac{1}{2}(r + x)\sqrt{(2rx - x^2)} + rx \text{ Arc.Sin.v} \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2} r^2 \text{ Arc.Tang} \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} + C.$

Da nun $DAM = o$, für $x = AD = o$ wird, ſo wird ſeyn

$-\tfrac{1}{2} r^2 \text{ Arc.Tang.} \frac{-r}{o} + C = o$, oder

$\tfrac{1}{4} r^2 \pi + C = o$, mithin $C = -\tfrac{1}{4} r^2 \pi$; alſo

$$MDA = \tfrac{1}{2}(r + x)\sqrt{(2rx - x^2)} + rx \text{ Arc.Sin.v} \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2} r^2 \text{ Arc. Tang.} \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} - \tfrac{1}{4} r^2 \pi.$$

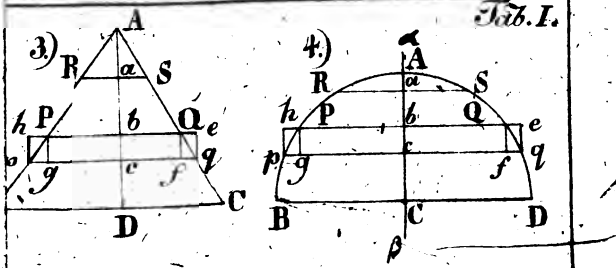
Aus

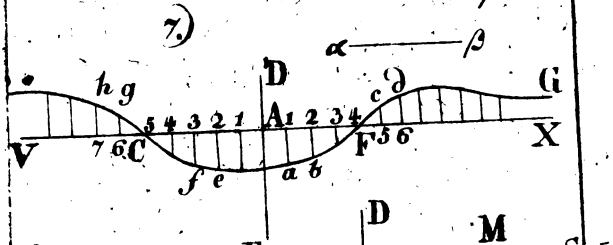
Aus dieſer Formul erhält man für $x = AB = 2r$, den Flächeninhalt der halben Cycloide ACB, nemlich

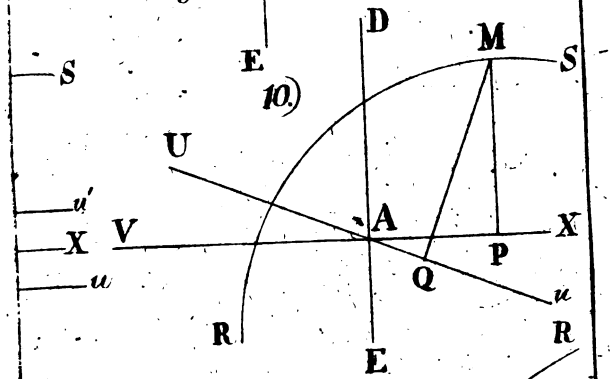
$$ACB = 2r^2 \text{ Arc. Sin. v. } 2 - \tfrac{1}{4} r^2 \text{ Arc. Tang. } \tfrac{1}{0} - \tfrac{1}{4} r^2 \pi$$
$$= 2r^2 \pi - \tfrac{1}{2} r^2 . \tfrac{1}{2} \pi - \tfrac{1}{4} r^2 \pi = \tfrac{3}{4} r^2 \pi.$$

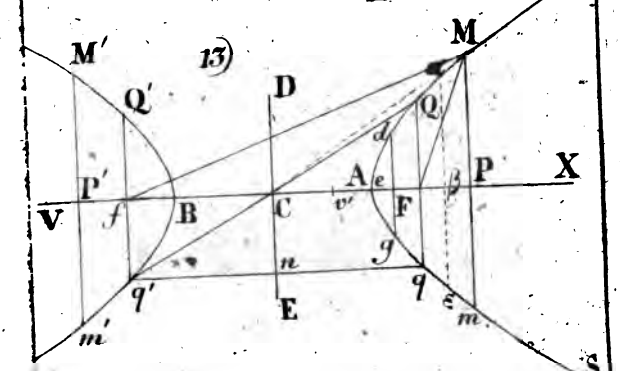
Weil $1 : \pi$ das Verhältniß des Halbmeſſers zur halben Peripherie bedeutet, ſo iſt $r^2 \pi$ der Flächeninhalt des ganzen Erzeugungs-Kreiſes, und $\frac{1}{2} r^2 \pi$ iſt die Hälfte davon: alſo iſt der Flächeninhalt ACB dreymal ſo groß, als ANB.

Tab. I.

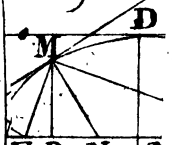

3)
A
R
α
S
h
P
b
Q
e
p
g
c
f
q
C
D
4.)
A
R
α
S
h
P
b
Q
e
p
g
c
f
q
B
C
D
β


7.)
α
β
D
h g
5 4 3 2 1
A 1 2 3 4
c d
G
V
7 6 C
F 5 6
X
f e
a b
E

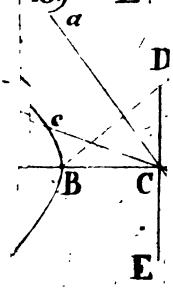
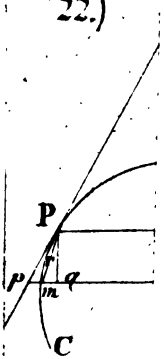
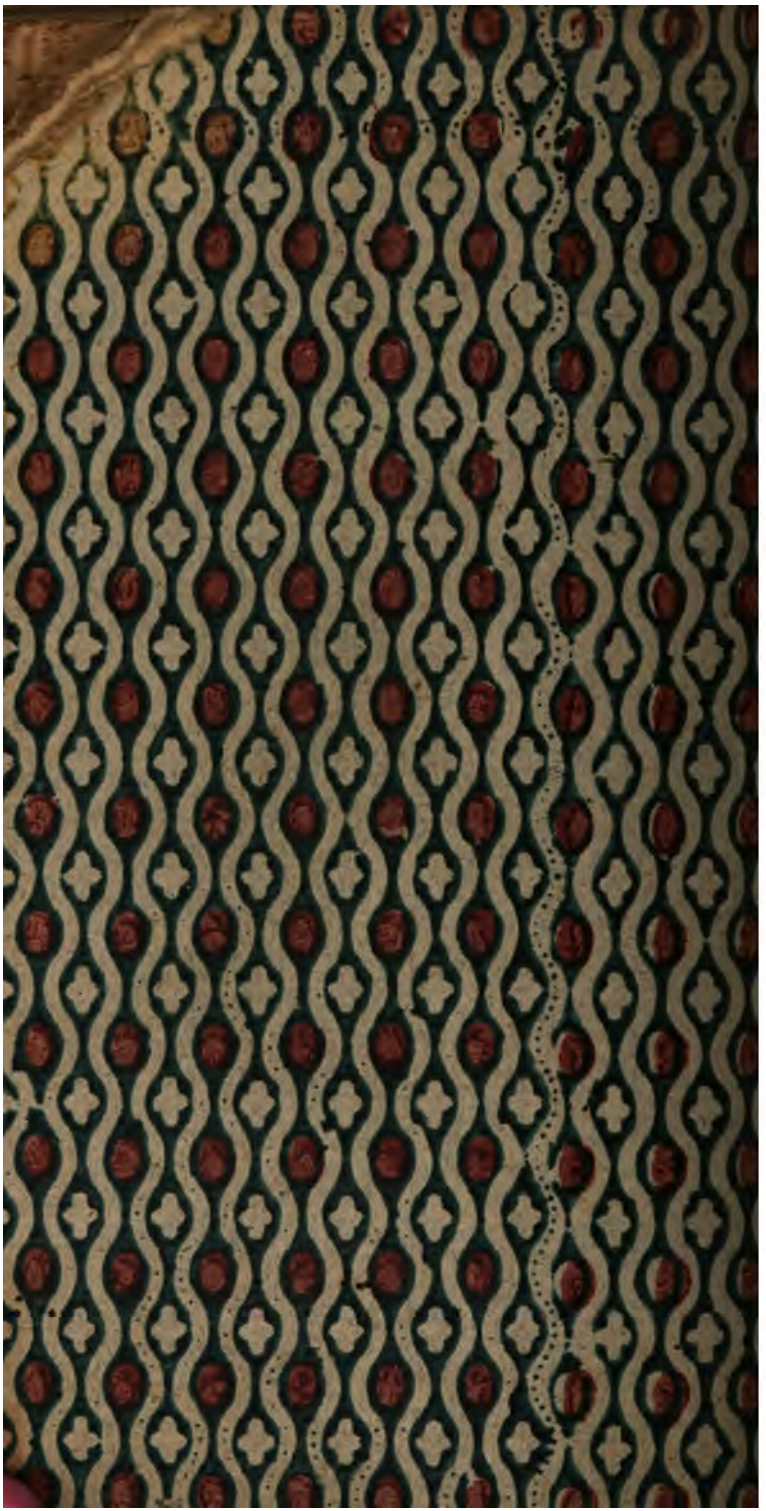

D
M
S
S
10.)
U
u'
X
V
A
X
P
Q
u
u
R
E
R


M
M'
13)
D
Q'
Q
d
P'
A e
P
X
V
f
B
C
v'
F
β
g
n
q'
E
q
e
m
m'
S

15.)



18.)



22.)